LUCIANA MARIA TENUTA DE FREITAS (COORDENAÇÃO)
ADILSON LONGEN
RODRIGO MOROZETTI BLANCO

PNLD 2021 • OBJETO 2
CÓDIGO DA COLEÇÃO
0149P21202
CÓDIGO DO LIVRO
0149P21202136

ENTER AÇÃO

MATEMÁTICA

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO • VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO

A ESTATÍSTICA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR MEIO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

ENSINO MÉDIO
Matemática e suas Tecnologias

Editora do Brasil

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

ENTRE AÇÃO

MANUAL DO PROFESSOR

MATEMÁTICA

A ESTATÍSTICA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR MEIO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

Luciana Maria Tenuta de Freitas (Coordenação)

Mestre em Ensino de Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC-Minas)

Bacharel e licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Assessora pedagógica da Educação Básica, com atuação na formação de professores

Adilson Longen

Doutor em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Mestre em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Professor do Ensino Médio

Rodrigo Morozetti Blanco

Mestre em Matemática com linha de pesquisa em Filosofia da Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat)

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP)

Professor da Educação Básica com atuação na formação de professores

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Ensino Médio

1ª edição
São Paulo, 2020

Editora do Brasil

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Longen, Adilson
Interação matemática : a estatística e a resolução de problemas por meio de análise combinatória e probabilidade / Adilson Longen, Rodrigo Morozetti Blanco ; coordenação Luciana Maria Tenuta de Freitas. -- 1. ed. -- São Paulo : Editora do Brasil, 2020. -- (Interação)

ISBN 978-85-10-08362-1 (aluno)
ISBN 978-85-10-08363-8 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) 2. Matemática e suas tecnologias (Ensino médio) I. Blanco, Rodrigo Morozetti. II. Freitas, Luciana Maria Tenuta de. III. Título. IV. Série.

20-42647 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

© Editora do Brasil S.A., 2020
Todos os direitos reservados

Direção-geral: Vicente Tortamano Avanso

Direção editorial: Felipe Ramos Poletti
Gerência editorial: Erika Caldin
Supervisão de arte: Andrea Melo
Supervisão de editoração: Abdonildo José de Lima Santos
Supervisão de revisão: Dora Helena Feres
Supervisão de iconografia: Léo Burgos
Supervisão de digital: Ethel Shuña Queiroz
Supervisão de controle de processos editoriais: Roseli Said
Supervisão de direitos autorais: Marilisa Bertolone Mendes

Supervisão editorial: Rodrigo Pessota
Consultoria técnico-pedagógica: Eduardo Wagner e Maria Cristina Bonomi
Edição: Adriana Soares Netto, Daniel Leme, Everton José Luciano, Katia Simões de Queiroz e Marcos Gasparetto de Oliveira
Assistência editorial: Juliana Bomjardim, Viviane Ribeiro e Wagner Razvickas
Especialista em copidesque e revisão: Elaine Silva
Copidesque: Gisélia Costa, Ricardo Liberal e Sylmara Beletti
Revisão: Amanda Gabriel, Andreia Andrade, Fernanda Almeida, Fernanda Sanchez, Flávia Gonçalves, Gabriel Ornelas, Jonathan Busato, Mariana Paixão, Martin Gonçalves e Rosani Andreani
Pesquisa iconográfica: Daniel Souza
Assistência de arte: Daniel Souza
Design gráfico: Talita Lima
Capa: Megalo Design
Imagem de capa: AndrewJohnson/iStockphoto.com, AnthonyRosenberg/iStockphoto.com, Devonyu/iStockphoto.com, DmitriyKazitsyn/iStockphoto.com, MADDRAT/iStockphoto.com, malerapaso/iStockphoto.com, matejmo/iStockphoto.com, Prostock-Studio/iStockphoto.com, Sergio Delle Vedove/iStockphoto.com e unkas_photo/iStockphoto.com
Edição de arte: Paula Coelho e Talita Lima
Ilustrações: Dawidson França, Mauro Salgado, Reinaldo Vignati e Tarcísio Garbellini
Editoração eletrônica: JS Design
Licenciamentos de textos: Cinthya Utiyama, Jennifer Xavier, Paula Harue Tozaki e Renata Garbellini
Controle de processos editoriais: Bruna Alves, Carlos Nunes, Rita Poliane, Terezinha Oliveira e Valéria Alves

1ª edição, 2020

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Editora do Brasil

Rua Conselheiro Nébias, 887
São Paulo/SP – CEP 01203-001
Fone: +55 11 3226-0211
www.editoradobrasil.com.br

Caro professor

A implementação da proposta do Novo Ensino Médio é um desafio para professores e estudantes. Por meio desta coleção, pretendemos auxiliá-lo nessa importante jornada.

Para que as aprendizagens escolares capacitem os jovens a atuar, com competência e responsabilidade, na sociedade em que vivem, é importante que se apropriem da Matemática como uma das diversas formas de leitura da realidade e possam utilizá-la como ferramenta que os auxilie a intervir, de forma consciente e responsável, nessa realidade.

Com esse objetivo, apresentamos a você esta obra, que tem o estudante como centro do processo de aprendizagem, numa proposta interativa e aberta de ensino de Matemática. Os diversos tipos de atividades propiciam aos alunos a discussão de ideias, o desenvolvimento de hipóteses, a argumetação, a elaboração de problemas, o desenvolvimento de projetos, entre outros, enquanto desenvolvem as competências socioemocionais. Dessa forma, a sala de aula passa a ser um espaço vivo, em que ideias matemáticas são discutidas, confrontadas, validadas ou refutadas o tempo todo.

Cabe a você ser o organizador/mediador desse processo estimulando as discussões, promovendo debates, orientando as reformulações, valorizando as produções e o posicionamento dos estudantes, o que contribui para o desenvolvimento integral deles.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Este Manual foi elaborado visando orientá-lo nesse processo. Esperamos que você possa aproveitar nossas sugestões de forma criativa, desenvolvendo e ampliando o trabalho de acordo com suas possibilidades e com a realidade em que está inserido.

Os autores

SUMÁRIO

O NOVO ENSINO MÉDIO V

A BNCC E O NOVO ENSINO MÉDIO VI

A BNCC e o letramento matemático VII

ABORDAGEM TEÓRICO-METODOLÓGICA IX

O desenvolvimento de competências e habilidades IX

A resolução de problemas e a investigação matemática X

O papel do erro XII

O trabalho em grupo XII

O pensamento computacional XIV

AVALIAÇÃO XIV

A CULTURA JUVENIL, A CONSTRUÇÃO DE UMA CONVIVÊNCIA DE PAZ E O PROJETO DE VIDA XVII

A cultura juvenil XVII

A construção de uma convivência de paz XVIII

O projeto de vida XXI

A ORGANIZAÇÃO DA OBRA XXIII

I. O Manual do Professor XXIII

II. O Livro do Estudante XXIII

1. A organização dos livros XXIII

1.1 Quadro de conteúdos XXIV

2. A organização das unidades XXVII

2.1 Os eixos XXVII

2.2 As seções XXIX

2.3 Outros recursos XXX

3. Conexões & projetos XXX

REFERÊNCIAS COMENTADAS XXXII

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS PARA ESTE LIVRO XXXVII

Objetivos XXXVII

Justificativas XXXVII

Conexões com outras áreas do conhecimento XXXVII

Temas Contemporâneos Transversais abordados no livro XXXVIII

Cronograma XXXVIII

Unidade 1 – Estatística descritiva XXXIX

Objetivos XXXIX

Justificativa XXXIX

Competências e habilidades da BNCC trabalhadas nesta unidade XXXIX

Competências gerais XXXIX

Competências específicas e habilidades de Matemática XL

Resoluções e comentários XLI

Unidade 2 – Análise combinatória LVI

Objetivos LVI

Justificativa LVI

Competências e habilidades da BNCC trabalhadas nesta unidade LVI

Competências gerais LVI

Competências específicas e habilidades de Matemática LVII

Resoluções e comentários LVII

Unidade 3 – Probabilidades LXXXIV

Objetivos LXXXIV

Justificativa LXXXIV

Competências e habilidades da BNCC trabalhadas nesta unidade LXXXIV

Competências gerais LXXXIV

Competências específicas e habilidades de Matemática LXXXV

Resoluções e comentários LXXXV

Conexões & projetos CIV

Objetivos CIV

Justificativa CIV

Competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) CIV

Competências gerais trabalhadas nos projetos CIV

Projeto 1 CV

Objetivo CV

Competências específicas de Matemática: 1, 2, 3, 4 e 5 CV

Orientações ao professor CVI

Projeto 2 CVIII

Objetivo CVIII

Competências específicas de Matemática 1, 2, 3 e 5 CVIII

Orientações ao professor CVIII

ATIVIDADES COMPLEMENTARES CX

REFERÊNCIAS CXII

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

O NOVO ENSINO MÉDIO

As mudanças trazidas pelo Novo Ensino Médio visando a formação integral dos estudantes propõem que as aprendizagens escolares os capacitem para que ao final desta etapa de escolaridade estejam aptos a atuar, com competência e responsabilidade, na sociedade em que vivem.

Segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio:

> [...] formação integral: é o desenvolvimento intencional dos aspectos físicos, cognitivos e socioemocionais do estudante por meio de processos educativos significativos que promovam a autonomia, o comportamento cidadão e o protagonismo na construção de seu projeto de vida.

BRASIL. Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes [...]. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, n. 224, p. 21, 22 nov. 2018. Disponível em: http://www.in.gov.br/materia/-/asset_publisher/Kujrw0TZC2Mb/content/id/51281622. Acesso em: 1 ago. 2020.

No Novo Ensino Médio, os currículos são compostos por duas partes que se integram e se complementam: a **formação geral básica** e os **itinerários formativos**.

Na **formação geral básica** os currículos e as propostas pedagógicas devem garantir as aprendizagens essenciais definidas na BNCC, das quatro áreas de conhecimento: **Linguagens e suas Tecnologias**, **Matemática e suas Tecnologias**, **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, bem como desenvolver as competências gerais para a Educação Básica e as competências específicas e habilidades de cada área, definidas na BNCC, de modo integrado e articulado, considerando ainda o contexto histórico, econômico, social, ambiental, cultural local, do mundo do trabalho e da prática social.

Os **itinerários formativos** possibilitam aos estudantes fazer escolhas que irão compor seu currículo para aprofundar seus conhecimentos ou para se preparar para o mundo do trabalho. Quatro itinerários estão diretamente relacionados a cada área do conhecimento e um quinto itinerário é destinado à formação técnica e profissional.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Os itinerários são orientados por meio de quatro eixos estruturantes:

GoodStudio/Shutterstock.com

I – investigação científica: supõe o aprofundamento de conceitos fundantes das ciências para a interpretação de ideias, fenômenos e processos para serem utilizados em procedimentos de investigação voltados ao enfrentamento de situações cotidianas e demandas locais e coletivas, e a proposição de intervenções que considerem o desenvolvimento local e a melhoria da qualidade de vida da comunidade;
II – processos criativos: supõe o uso e o aprofundamento do conhecimento científico na construção e criação de experimentos, modelos, protótipos para a criação de processos ou produtos que atendam a demandas para a resolução de problemas identificados na sociedade;

III – mediação e intervenção sociocultural: supõem a mobilização de conhecimentos de uma ou mais áreas para mediar conflitos, promover entendimento e implementar soluções para questões e problemas identificados na comunidade;

IV – empreendedorismo: supõe a mobilização de conhecimentos de diferentes áreas para a formação de organizações com variadas missões voltadas ao desenvolvimento de produtos ou prestação de serviços inovadores com o uso das tecnologias.

BRASIL. Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes [...]. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, n. 224, p. 21, 22 nov. 2018. Disponível em: http://www.in.gov.br/materia/-/asset_publisher/Kujrw0TZC2Mb/content/id/51281622. Acesso em: 1 ago. 2020.

A BNCC E O NOVO ENSINO MÉDIO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) está estruturada com base em **dez competências gerais** que devem ser desenvolvidas pelos estudantes desde a Educação Infantil até o Ensino Médio.

Competências gerais

1. **Conhecimento**
Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. **Pensamento científico, crítico e criativo**
Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. **Repertório cultural**
Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4. **Comunicação**
Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. **Cultura digital**
Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6. **Trabalho e projeto de vida**
Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7. **Argumentação**
Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8. **Autoconhecimento e autocuidado**
Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9. **Empatia e colaboração**
Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

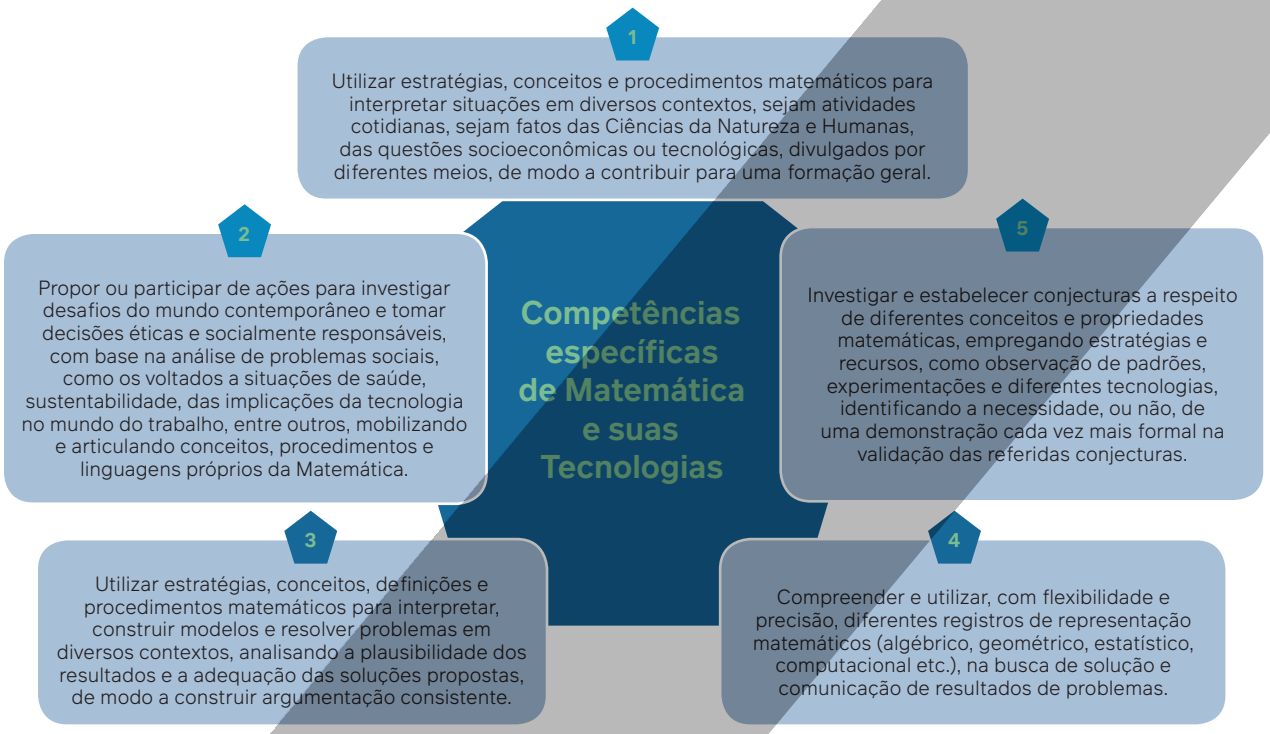
10. **Responsabilidade e cidadania**
Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

DAE

Fonte: BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 9. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 20 maio 2020.

As quatro áreas de conhecimento estabelecidas para o Ensino Médio estão definidas por meio de **competências específicas** que se articulam às competências gerais. No caso da área de **Matemática e suas Tecnologias** são cinco competências específicas, e cada uma delas se desdobra em um conjunto de habilidades que devem ser desenvolvidas ao longo dos três anos do Ensino Médio.



DAE

Fonte: BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 531. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 20 maio 2020.

Nesse novo contexto, a palavra-chave passa a ser **flexibilidade** e esta é a característica da coleção de Matemática que você tem em mãos. Esta obra foi escrita para atender à **formação geral básica** e atende às 10 competências gerais, às 5 competências específicas e às 43 habilidades [illegible] e suas Tecnologias.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

A BNCC e o letramento matemático

De acordo com o que propõe a BNCC, o desenvolvimento das habilidades e competências no Ensino Médio está articulado às "aprendizagens essenciais estabelecidas para o Ensino Fundamental" devendo consolidá-las, ampliá-las e aprofundá-las.

Para tanto devemos observar que:

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do **letramento matemático**, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição). (BRASIL, 2018, p. 266).

E ainda que:

> A área de Matemática, no **Ensino Fundamental**, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No **Ensino Médio**, na área de **Matemática e suas Tecnologias**, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade. (BRASIL, 2018, p. 471).

As mudanças proporcionadas pela BNCC ainda nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental são de grande importância para a compreensão da Matemática como uma disciplina muito mais ampla do que somente o trabalho com as operações básicas e o campo numérico.

Visando dar continuidade à proposta de desenvolvimento do letramento matemático do Ensino Fundamental, é essencial promover no Ensino Médio a consolidação, o aprofundamento e a ampliação do trabalho com as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, com foco na formulação e resolução de problemas em contextos variados, fazendo uso das ferramentas matemáticas e dos conhecimentos adquiridos previamente.

Temos ainda que:

> Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior. (BRASIL, 2018, p. 528).

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

O documento afirma ainda que:

> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos **processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas**. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2018, p. 529).

Assim, fica evidente o fato de que saber Matemática não se resume aos conteúdos específicos ou aos procedimentos de cálculo estudados, mas principalmente em compreender que o estudante letrado matematicamente é aquele que consegue argumentar claramente sobre determinada situação, defender seus pontos de vista, raciocinar sobre caminhos a serem escolhidos, priorizar questões a serem resolvidas, comunicar e ler com

propriedade as informações que lhe são apresentadas. A Matemática tecnicista, que perdurou na escola por muito tempo, hoje dá lugar à valorização do pensamento matemático e do raciocínio sobre os fatos, sejam eles relacionados ao cotidiano do estudante ou a descobertas que ampliarão seu repertório.

Ao se apresentar dessa forma, a BNCC estimula você, professor, e os estudantes a buscar maneiras diferentes de ensinar e aprender Matemática, promovendo o protagonismo, a troca de ideias e o compartilhamento de estratégias, além da autonomia dos estudantes para avançar em suas aprendizagens escolhendo estratégias próprias de resolução dos problemas que encontrarem.

Apresentamos a seguir a abordagem teórico-metodológica que fundamenta esta coleção e o modo que, por meio dela, a obra dialoga com a proposta da BNCC para o Ensino Médio.

ABORDAGEM TEÓRICO-METODOLÓGICA

A Matemática tem diferentes aplicações na vida das pessoas e estabelece relações com diversas áreas. É papel da escola mostrar essas relações, que podem ou não ser evidentes. Além disso, o trabalho com a Matemática deve levar os jovens a compreender a origem histórica de alguns conceitos, verificar suas aplicações nas Ciências da Natureza, no campo da Biologia, da Física e da Química; nas diferentes expressões da área de Linguagens, em especial na música, nas artes plásticas, nas artes cênicas e na dança; nas Ciências Humanas e Sociais, como nos estudos geográficos de escala ou topologia; enfim: perceber que a Matemática marca sua presença na vida das pessoas.

Constatar essa presença, fazer bom uso dela e aprender Matemática de maneira reflexiva, investigativa e valorizando os conhecimentos prévios é um caminho que auxilia o estudante, tanto dentro quanto fora da escola.

O desenvolvimento de competências e habilidades

Por meio do trabalho proposto nesta coleção pretendemos que os estudantes desenvolvam competências e habilidades de Matemática e suas Tecnologias, previstas na BNCC.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Porém, é de suma importância, compreender que:

> Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da ida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p. 8).

As competências gerais dizem respeito à formação integral dos estudantes e estão relacionadas tanto a seu desenvolvimento cognitivo quanto ao socioemocional.

Nesta obra, as competências gerais são desenvolvidas por meio dos diversos tipos de atividades propostos. A **competência geral 2**, por exemplo, que se refere ao exercício da curiosidade intelectual por meio da investigação, da análise crítica, da imaginação e da criatividade para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas, é trabalhada em vários momentos, uma vez que a resolução de problemas e a investigação matemática, que serão detalhadas a seguir, constituem o eixo condutor de todo o trabalho. Ao resolverem as atividades em grupos ou em duplas discutindo ideias, argumentando com

base em fatos e informações confiáveis e confrontando diferentes pontos de vista, os estudantes mobilizam a **competência geral 7**. Nesse processo desenvolvem também a **competência geral 4**, ao usarem diferentes formas de linguagem para se expressar. As atividades em grupos são ricas em oportunidades para mobilizar também a **competência geral 9**, que envolve o desenvolvimento de atitudes e valores como empatia e respeito, favorecendo o diálogo e uma convivência harmônica entre os jovens.

Na parte específica deste manual estão apontadas e exemplificadas as competências gerais trabalhadas em cada livro, unidade por unidade.

Já as habilidades se relacionam ao "saber fazer" e indicam o que os estudantes são capazes de aprender e a desenvolver. Elas são associadas a verbos como identificar, associar, analisar, investigar, argumentar, criar, entre outros. Também podem ser entendidas como objetivos de conhecimento, ou seja, aquilo que se espera do estudante e de seu desenvolvimento ao final do Ensino Médio.

Como apresentadas anteriormente, na área de Matemática e suas Tecnologias, as habilidades estão agrupadas nas 5 competências específicas indicadas na BNCC sem uma ordem preestabelecida, porque, diferentemente do Ensino Fundamental, seus códigos não indicam uma progressão, o que favorece a flexibilidade dos currículos e das propostas pedagógicas das escolas.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

De modo resumido, as habilidades que integram a competência específica 1 estão relacionadas aos contextos externos à Matemática. Na competência específica 2 estão as habilidades que se relacionam ao contexto social. A competência específica 3 envolve habilidades que se referem à resolução de problemas e à modelagem matemática, e na competência 4 estão agrupadas aquelas que dizem respeito a diferentes representações para um mesmo objeto matemático. Finalmente, na competência específica 5 encontram-se as habilidades que envolvem um tratamento mais formal da Matemática. Assim agrupadas, habilidades que se referem a um mesmo conteúdo são associadas a diferentes competências específicas. Esse é o caso, por exemplo, do estudo das probabilidades, que está ligado às competências específicas 1, 3 e 5 por meio das habilidades EM13MAT106, EM13MAT311, EM13MAT312 e EM13MAT511.

Na parte específica deste manual estão indicadas as habilidades trabalhadas em cada unidade com os respectivos exemplos.

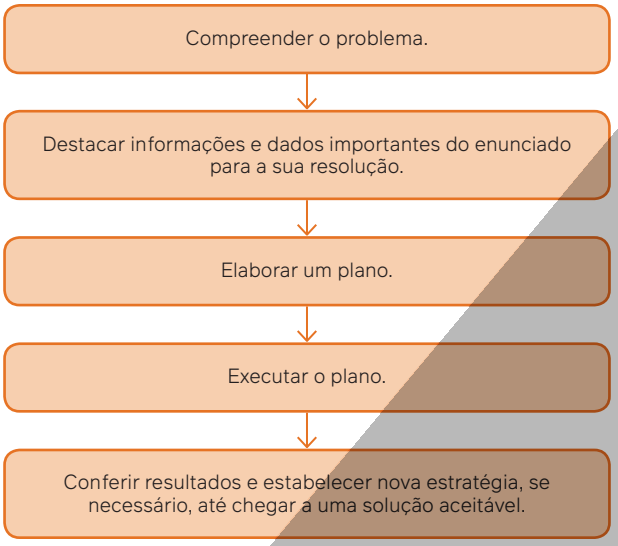
A resolução de problemas e a investigação matemática

Resolver problemas é uma prática diária, cotidiana e envolve os mais diversos tipos de situações. Para resolver um problema é necessário levantar hipóteses, discutir possibilidades, criar estratégias com base em conhecimentos prévios identificados visando atingir novos objetivos. Por mais simples que se configure, todo problema desafia quem o enfrenta fomentando o gosto pela descoberta de formas para resolvê-lo. Ao sentir-se desafiado, o estudante desprende um esforço cognitivo que lhe possibilita ir além. Junto com o trabalho de resolução de problemas, a investigação matemática estimula a busca por soluções criativas, inovadoras ou não, para situações que façam parte do cotidiano dos estudantes, dentro ou fora da escola.

Quando analisamos o trabalho em sala de aula sob o viés da resolução de problemas, entendemos que o desenvolvimento do pensamento matemático sempre parte de um problema e este é o meio pelo qual a Matemática será apreendida. Ao longo do processo histórico de constituição dos conceitos e conhecimentos matemáticos, o avanço dos estudos e as descobertas

foram ocasionados pela necessidade de solucionar problemas nos mais variados contextos. Para resolvê-los, o processo de investigação ganhou força e se configurou como um caminho importante para se chegar a conclusões sobre temas matemáticos.

George Polya (1978) resume as etapas de resolução de um problema conforme esquema a seguir.



DAE

Sob essa perspectiva, fica evidente sua proximidade com o que propõe a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) quando trata do letramento matemático e do desenvolvimento da autonomia e do protagonismo do estudante.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Segundo Sternberg (2001), partimos do pressuposto de que problema é toda situação inédita que leva o aluno a pensar e utilizar ferramentas mentais conhecidas por ele para se chegar a uma solução, o que também condiz com as ideias apresentadas pela BNCC.

Ao longo desta obra, além do trabalho fundamentado na resolução de problemas, as atividades tiveram como base a proposta da investigação matemática, em que os estudantes buscam a solução para situações que podem envolver um ou mais problemas. No trabalho com investigação matemática, o caminho a ser percorrido é mais importante do que a meta final. Nesse sentido, cabe a você acompanhar o estudante ao longo de todo o processo.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p. 23):

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os colegas e o professor.

O seu papel, professor, tanto no campo da resolução de problemas quanto nas investigações matemáticas é saber dosar e fazer as perguntas certas nos momentos certos, sem dar respostas, criando um movimento de construção do espírito investigativo, com a intenção de levar os estudantes a alcançar conquistas maiores por seus próprios meios promovendo, assim, a autonomia e a busca pelo aprendizado.

Os processos de investigação matemática estão estreitamente relacionados ao desenvolvimento da competência específica 5 da área de Matemática e suas tecnologias proposta na BNCC (BRASIL, 2018, p. 531) para o Ensino Médio:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

A proposta desta obra é recriada a todo momento, de acordo com os caminhos

traçados por você e pelo próprio estudante, por isso é essencial que a criação de processos investigativos aconteça de maneira eficiente, visando manter a atenção e a curiosidade do estudante de forma efetiva de acordo com o que você propõe e pelas descobertas próprias e da turma. Cabe também a você proporcionar momentos de trocas entre os estudantes e de criação de novas estratégias. Dessa forma, a construção se tornará muito mais significativa.

O papel do erro

Os estudantes devem desenvolver o hábito de encarar suas dificuldades e entender que os erros são parte integrante do processo de aprendizagem, não com medo, mas com a percepção de que são parte da caminhada rumo ao acerto. O próprio processo de investigação matemática favorece essa percepção: nele o estudante constrói, reconstrói, avalia e reavalia a situação quantas vezes for necessário. Segundo Rico (1995), os erros contêm um potencial educativo que precisa ser bem explorado. O ato de explicar e dar sentido aos próprios erros é uma atividade altamente estimuladora e provocativa para os estudantes.

É importante lembrar que o estudante só adquire esse tipo de postura com a prática, tornando-se um hábito esse movimento. Não é com uma ou duas propostas que a turma adquire esse posicionamento questionador e protagonista, mas com o trabalho de diferentes habilidades, com o olhar de que é possível explorar as ideias matemáticas de diferentes formas, por diferentes caminhos, partilhando com seus pares e discutindo as estratégias de resolução. Nesse sentido, é papel do estudante argumentar sobre suas ações e dialogar com você e com os colegas a respeito das ideias matemáticas, do que entendeu e dos conceitos trabalhados e das habilidades desenvolvidas no processo de aprendizagem.

Você pode organizar debates para que a turma discuta diferentes estratégias de resolução para determinada situação. Ao conhecer diferentes estratégias, ideias e resoluções para um problema específico, o estudante consegue ser protagonista da própria prática e desenvolve autonomia.

O trabalho em grupo

Na perspectiva da resolução de problemas e da investigação matemática que orientam o trabalho desta coleção, a realização das atividades em duplas ou em pequenos grupos tem importância fundamental.

Em seu livro *Planejando o trabalho em grupo* Cohen e Lotan (2017, p. 1) definem esse tipo de trabalho como:

> [...] alunos trabalhando juntos em grupos pequenos de modo que todos possam participar de uma atividade com tarefas claramente atribuídas. Além disso é esperado que os alunos desempenhem suas tarefas sem supervisão direta e imediata do professor.

As autoras defendem que, quando você, professor, propõe uma atividade em grupo e permite que os estudantes se esforcem sozinhos, inclusive cometendo erros, delega autoridade aos estudantes e essa autoridade é a primeira característica-chave do trabalho em grupo.

A construção de um ambiente propício a esse tipo de trabalho, inclusive em relação à forma de constituição dos grupos, pode ocorrer com diálogo sobre os combinados que envolvem a relação entre professor e estudante e entre os próprios estudantes. Além do estímulo a serem autônomos na tomada de decisões, está a seu cargo fazer com que a turma coloque em jogo as decisões tomadas, vivenciando-as.

A segunda característica-chave do trabalho em grupo, ainda segundo as autoras, é que nenhum dos participantes consegue fazer todas as partes da atividade sozinho, ou seja, todos precisam uns dos outros

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

para completar a atividade. A terceira característica-chave está relacionada à natureza das atividades propostas.

> Se o professor quer que os alunos se comuniquem de maneira autônoma e produtiva, eles vão precisar ter algo a respeito do que irão conversar. Se o professor quer que os alunos se engajem em conversas substantivas e de alta qualidade, a atividade precisa estabelecer problemas complexos ou dilemas, ter diferentes soluções possíveis e contar com a criatividade. (COHEN; LOTAN, 2017, p. 2-3).

Nessa perspectiva, trabalhando em duplas ou em pequenos grupos por meio de atividades diversificadas, que envolvem discussões com os colegas, o estudante tem a oportunidade de levantar hipóteses, argumentar, defender suas ideias, mudar de opinião ao ouvir a argumentação do colega e, assim, desenvolver a empatia e o respeito pelo outro, o que contribui para sua formação humana. Esse exercício de respeito às opiniões dos outros, da valorização das diversas ideias apresentadas, com reflexão constante sobre o que o outro pensa, sem pré-julgamentos, desenvolve a escuta ativa e as competências gerais da BNCC 4, 7 e 9 relacionadas ao uso de diferentes linguagens, à argumentação e ao exercício da empatia, do diálogo, da resolução de conflitos e da cooperação, respectivamente.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Ao estudante que desenvolve um trabalho em grupo é dada a oportunidade de reconhecer as próprias emoções frente a opiniões contrárias às suas, ao ser questionado por seu posicionamento. Conflitos de opiniões são constantes na vida em sociedade e o trabalho em grupo se configura uma experiência única no ambiente escolar, observado sob essa perspectiva, e promove o desenvolvimento integral do estudante.

Quando professores e estudantes compreendem a potencialidade de aprendizagem do trabalho em grupo, e incorporam a cultura desse tipo de trabalho, os resultados se efetivam em um ambiente envolto em compreensão, soluções de conflitos, com orientações claras, perguntas pertinentes, bom convívio, respeito e com parceria entre todos os envolvidos no processo.

Uma sugestão para esse tipo de trabalho, inclusive envolvendo turmas com número grande de estudantes, é constituir grupos permanentes para determinado período, um mês por exemplo. Dessa forma, esse mesmo grupo se reúne sempre que forem propostas atividades coletivas. Entre as vantagens desse tipo de organização está a facilidade de você ficar mais próximo dos estudantes para observar suas necessidades e fazer intervenções em relação a conhecimentos, habilidades, atitudes e valores. Seu olhar para o grupo como um todo possibilita a observação mais aguçada de cada estudante.

Nesse tipo de organização envolvendo grupos mais permanentes, as possibilidades de intervenção que atendam às necessidades individuais dos estudantes também se intensificam. Por exemplo, enquanto todos os grupos desenvolvem determinada atividade, você pode pedir a um ou mais estudantes que tenham necessidades comuns de aprendizagem, que se reúnam com você ou com estudantes que não apresentaram a mesma dificuldade, para que haja um atendimento mais específico. A reorganização dos grupos periodicamente, inclusive com a participação dos estudantes para definir critérios de escolha dos integrantes dos novos grupos, é fundamental para que desenvolvam competências ligadas à incorporação de direitos e responsabilidades, ponderação sobre consequências, participação social e liderança, entre outros.

O trabalho em grupo, incorporado como

cultura, transforma consideravelmente os indivíduos de maneira positiva porque proporciona verdadeiro desenvolvimento pessoal e coletivo. A escola tem a oportunidade de tornar esses momentos propícios para a construção de uma sociedade mais empática, de respeito entre todos, a partir do momento que os estudantes conseguem fazer um paralelo entre suas práticas ao longo do processo de aprendizagem e as atividades cotidianas.

O pensamento computacional

Diferentemente do que se possa imaginar, o pensamento computacional não está necessariamente associado à programação de computadores, ao uso de tecnologias ou à comunicação pela internet.

Veja no esquema a seguir o que se entende por cultura digital, tecnologia digital e pensamento computacional, nas etapas da educação básica.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

DAE

O pensamento computacional se relaciona aos processos de pensamento utilizados para modelar problemas e resolvê-los de forma eficiente, determinando soluções genéricas para classes inteiras de problemas e pode ser decomposto em quatro etapas (PENSAMENTO..., 2019):

- decomposição – divisão de um problema em partes menores;
- padrões – identificação de um ou mais padrões que geram o problema;
- abstração – seleção dos dados essenciais de um problema;
- algoritmo – estabelecimento de uma sequência ou ordem em que o problema será resolvido.

O pensamento computacional se relaciona aos processos de pensamento utilizados para formular e resolver problemas e suas soluções. Ele enfatiza que as soluções precisam ser representadas de tal forma que possam ser realizadas tanto por humanos como por "agentes de processamento de informações". Wing (PENSAMENTO..., 2019), André (PENSAMENTO..., 2019).

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 474), o pensamento computacional possibilita ao estudante "compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos".

Assim, o trabalho voltado para a autonomia do sujeito, por meio da investigação matemática e da resolução de problemas, conforme proposto nesta coleção, contém elementos essenciais para o desenvolvimento do pensamento computacional dos estudantes. Esse trabalho é potencializado nesta obra por meio de um dos eixos que estruturam as unidades de cada livro chamado "Algoritmos e fluxogramas". Informações detalhadas deste eixo encontram-se na explicação da organização do Livro do Estudante, neste manual.

AVALIAÇÃO

A avaliação da aprendizagem dos estudantes deve estar alinhada à proposta metodológica desenvolvida. Mudanças na

concepção de ensino/aprendizagem e na abordagem dos conteúdos implicam repensar as finalidades da avaliação, o que e como se avalia, em um trabalho cotidiano que pressupõe uma variedade de situações de aprendizagem, inclusive coletivas.

Quando se trabalha na perspectiva do desenvolvimento de competências e habilidades, o conceito de avaliação se amplia e deve levar em conta possibilidades de avaliar aprendizagens que vão além dos tópicos de conteúdo específico. Várias competências e habilidades de Matemática dizem respeito à investigação, à discussão de ideias, à capacidade de argumentação que demandam outros tipos de avaliação.

ysclips design/Shutterstock.com

Alinhado à perspectiva metodológica aqui adotada está o conceito de avaliação mediadora proposto por Hoffmann (2006). Segundo a autora:

> O significado primeiro e essencial da avaliação mediadora é o "prestar muita atenção" nas crianças, nos jovens, eu diria "pegar no pé" desse aluno mesmo, insistindo em conhecê-lo melhor, em entender suas falas, seus argumentos, teimando em conversar com ele em todos os momentos, ouvindo todas as suas perguntas, fazendo-lhes novas e desafiadoras questões, "implicantes", até, na busca de alternativas para uma ação educativa voltada para a autonomia moral e intelectual. (HOFFMANN, 2006).

Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) lembram que as investigações matemáticas são atividades de aprendizagem e, como tais, precisam ser avaliadas para que você possa saber se está havendo progresso dos estudantes de acordo com suas expectativas. Caso contrário, precisará fazer possíveis intervenções, retomadas ou replanejamento de seu trabalho. Além disso, por meio da avaliação os estudantes tomam conhecimento de como o desempenho deles é visto por você e podem refletir sobre aspectos em que precisam avançar. Esses autores apresentam algumas possibilidades de instrumentos de avaliação:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- **relatórios escritos**, em que um estudante ou um grupo de estudantes apresenta o trabalho desenvolvido. Nesse tipo de relatório podem ser apresentadas tanto as conclusões como todo o processo percorrido durante a investigação;
- **observação informal** dos estudantes enquanto realizam a tarefa e apresentam suas conclusões à turma. Nesses momentos podem ser observados aspectos tais como o modo de mobilizar os conhecimentos matemáticos formais e informais, o modo como entendem o processo investigativo e qual é o papel de cada estudante no desenvolvimento da atividade proposta. Cabe a você, quando oportuno, fazer perguntas que evidenciem como os estudantes estão pensando;
- **apresentações orais**, nas quais os estudantes têm a oportunidade de apresentar a você e aos colegas os resultados de suas investigações. Esses momentos se constituem uma oportunidade tanto para você avaliá-los quanto para o aprendizado dos

estudantes, uma vez que possibilitam a eles desenvolver processos de comunicação e de argumentação.

Outros tipos de instrumentos podem ser indicados para avaliar os estudantes, de forma coerente com o trabalho desenvolvido nesta obra.

- **Autoavaliação:** o estudante deve interpretar o próprio desempenho em relação a atitudes, habilidades desenvolvidas e desempenho intelectual. Para que esse instrumento seja aplicado de forma adequada, é necessário que os estudantes estejam bem preparados e que os critérios sejam bem definidos. Com a colaboração dos estudantes, podem ser elaboradas fichas para que eles preencham.
- **Prova em duplas:** nesse tipo de avaliação, o estudante tem oportunidade de discutir ideias, exercitar a argumentação, aprender a trabalhar de forma colaborativa e aprimorar as relações sociais. Para favorecer o desenvolvimento dessas habilidades, é fundamental que as questões propostas nesse tipo de prova propiciem o debate entre os estudantes.
- **Prova individual:** na seleção dos conteúdos deve-se dar ênfase àqueles realmente significativos. As questões devem ser planejadas e elaboradas com a intenção de levar o estudante a refletir e a estabelecer relações e não simplesmente repetir informações. No momento da escolha do instrumento de avaliação, observe se é compatível com o tipo de conteúdo a ser avaliado e com os objetivos que se deseja alcançar.
- **Portfólio:** é uma coletânea das produções dos estudantes durante determinado período. Pode conter produções de textos, atividades diversas, trabalhos e avaliações para que o próprio estudante acompanhe a evolução de seu processo de aprendizagem.
- **Provas tipo teste:** de tempos em tempos podem ser aplicados testes que simulem exames de vestibulares, Enem e avaliações de larga escala, uma vez que esse tipo de avaliação faz parte da vida dos estudantes, especialmente os do Ensino Médio. Entretanto, é importante lembrar que não é o treinamento sistemático nesse tipo de prova que vai garantir o sucesso dos estudantes. Mais preparados estarão para se sair bem em qualquer tipo de prova os estudantes que desenvolverem um pensamento matemático articulado e que souberam encontrar estratégias para resolver qualquer tipo de problema.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para a utilização de qualquer um desses instrumentos, devem-se ter bem claros os objetivos que orientam sua aplicação. Vasconcellos (2003) aponta questões fundamentais que servem de reflexão na elaboração de instrumentos de avaliação: Como os instrumentos são preparados? Como são aplicados? Como são analisados/corrigidos? Como os resultados são comunicados? E o mais importante, o que vai se fazer com os resultados?

É importante ressaltar a importância das **avaliações diagnósticas** que, independentemente dos tipos de instrumentos utilizados, devem auxiliá-lo na identificação do ponto de partida dos processos de ensino tendo como referência as aprendizagens ocorridas nos processos anteriores.

Para Frade, Val e Bregunci (2014, p. 39), esse tipo de avaliação:

> [...] é entendida também como a avaliação que ocorre ao longo dos processos de ensino e aprendizagem, visando a sua regulação. Ou seja, a avaliação diagnóstica pode ser entendida como aquela que verifica se o aluno aprendeu aquilo que lhe foi ensinado, a fim de identificar dificuldades de aprendizagem a serem superadas.

Ainda de acordo com as autoras, seja qual for a interpretação, a **avaliação diagnóstica** é parte de um percurso de aprendizagem cuja finalidade é delimitar pontos de partida e/ou de retomada para o ensino.

Cabe a você, professor, na elaboração do planejamento de uma etapa de trabalho, estabelecer momentos de avaliação prevendo, inclusive, um número de aulas para possíveis retomadas, de acordo com as necessidades de aprendizagem dos estudantes, evidenciadas nas avaliações.

Ao compreender o processo de aprendizagem, o educador desenvolve a percepção de que os erros e as dúvidas dos estudantes, numa dimensão educativa, são elementos altamente significativos para o desenvolvimento da ação educacional. São eles que fornecem informações sobre o nível de desenvolvimento das habilidades de cada estudante em resolver problemas, em utilizar adequadamente as diversas formas de linguagem para comunicar suas ideias, no desenvolvimento de raciocínios e análises e na integração de todos esses aspectos para promover seu desenvolvimento, tanto em termos cognitivos quanto pessoais.

É importante lembrar que as avaliações diagnósticas devem considerar, além dos aspectos relativos aos conhecimentos e habilidades, aqueles relacionados a atitudes e valores que os estudantes carregam consigo ao chegar à escola. As atividades em grupo são uma ótima oportunidade para que atitudes e valores sejam avaliados e problematizados, com o objetivo de provocar reflexões que os levem a se desenvolver nos aspectos cognitivo e pessoal. Em alguns casos, podem ser implementados projetos que potencializem atitudes e valores positivos nos estudantes.

Nessa perspectiva a avaliação deixa de ser o momento terminal do processo ensino-aprendizagem para se transformar em um movimento contínuo, com momentos constantes de busca da compreensão dos avanços e das dificuldades do estudante. Aprimorar os processos avaliativos de forma a torná-los mais justos, equilibrados e eficientes é realmente um grande desafio para os educadores.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

A CULTURA JUVENIL, A CONSTRUÇÃO DE UMA CONVIVÊNCIA DE PAZ E O PROJETO DE VIDA

A cultura juvenil

De acordo com Correa, Alves e Maia (2014, p. 15-16) a expressão “culturas juvenis” se refere:

> [...] a modos de vida específicos e práticas habituais dos jovens, que expressam certos significados e valores tanto no âmbito das instituições quanto no âmbito da própria vida cotidiana.

Para essas autoras, são muitas as imagens que se relacionam à ideia de juventude, podendo estar associadas a uma fase da vida, a uma determinada faixa etária, ou ainda, a um jeito de ser.

> Se estivermos considerando a pluralidade de maneiras e símbolos que representam e expressam a juventude, é porque há também variadas formas

> e lugares de construção de identidades juvenis. Para que compreendamos as diferenças e semelhanças, é preciso investigar as experiências que os sujeitos vivenciam em seu contexto social e os significados que atribuem a elas. (CORREA; ALVES; MAIA, 2014, p. 14).

Quanto aos procedimentos para se trabalhar as culturas juvenis, as autoras apontam para a importância da cultura na construção das identidades dos jovens, possibilitando "práticas coletivas e de interesses comuns, sobretudo em torno dos diferentes estilos musicais". (CORREA; ALVES; MAIA, 2014, p. 15).

Elas recomendam música, danças, grafite, esportes e tecnologias como importantes mediadores da construção de vivências de jovens. No portal EMDiálogo (UFF, [20--?]) podem ser encontradas várias sugestões para o trabalho com as culturas juvenis.

Por meio das atividades propostas nesta coleção os jovens terão a oportunidade de exercitar a convivência discutindo ideias, confrontando pontos de vista, argumentando, ouvindo os colegas, desenvolvendo projetos, entre tantas outras possibilidades. Exercitam assim o diálogo, a empatia e resolvem conflitos. Todas essas experiências, vivenciadas no dia a dia e no ambiente escolar, oferecem aos jovens a oportunidade de se desenvolver como sujeitos capazes de construir uma sociedade em que os indivíduos reconheçam que há diferenças entre as pessoas, que essas diferenças são legítimas e devem ser respeitadas para que haja convivência de paz. Em todos os livros da coleção, a última parte intitulada **Conexões & Projetos** oferece várias oportunidades de se trabalhar, por meio de projetos, as culturas juvenis.

A construção de uma convivência de paz

Entre as competências gerais expressas na BNCC, duas são particularmente importantes para a construção dessa convivência de paz. Uma delas é a **competência geral 8**:

> Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas. (BRASIL, 2018, p. 10).

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Essa competência diz respeito ao autocuidado e ao desenvolvimento da autoconsciência, da autoestima, da autoconfiança, do equilíbrio emocional, da saúde e do desenvolvimento físico. Ao longo de todo o Ensino Médio, é seu papel estar atento aos sofrimentos psíquicos dos estudantes e manter um ambiente de diálogo, de escuta e abertura para acolher as demandas deles no que diz respeito à prevenção do suicídio e da automutilação.

HilaryGraphic/Shutterstock.com

Recomenda-se a toda a comunidade escolar – que inclui professores, pais, estudantes e demais funcionários da instituição – a adoção de um olhar atento para prevenir a automutilação e o suicídio entre os estudantes, bem como uma postura ativa no sentido de intervir, quando necessário, para buscar o encaminhamento de situações identificadas para tratamento, na intenção de controlar fatos prejudiciais à saúde mental e evitar a violência autoprovocada.

De acordo com duas pesquisas realizadas pela Universidade Federal de São Paulo (ESTUDOS..., 2019), a atenção às rotinas dos jovens é fundamental como possibilidade de prevenção do suicídio.

Segundo os pesquisadores (TAVARES, 2019), quadros depressivos aliados a sentimentos de desesperança e inutilidade podem desencadear comportamento suicida. As pesquisas revelaram que os rapazes, a partir da puberdade, apresentam taxas de suicídio de 3 a 4 vezes maiores que as meninas. As possíveis causas estão ligadas às características de impulsividade e agressividade, além do uso de drogas, como tabaco e álcool. No caso das meninas, as pesquisas apontaram como possíveis causas crises e instabilidades de ordem financeira, econômica e social.

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, a Constituição Federal, o Estatuto da Criança e do Adolescente, a Política Nacional de Prevenção da Automutilação e do Suicídio e as leis que regem a educação no Brasil, é importante destacar de maneira enfática o posicionamento ético que se espera da escola na sociedade brasileira.

> O governo do Brasil optou pela abordagem interdisciplinar em uma ação conjunta entre os Ministério da Saúde (MS) e da Mulher, da Família e dos Direitos Humanos (MMFDH).
>
> As políticas públicas de prevenção ao suicídio e automutilação pretendem, de modo inédito, realizar ações programáticas que alterem os índices de suicídio e autolesão entre crianças e jovens (PREVENÇÃO..., [2019]).

Diante do que foi exposto, torna-se parte do trabalho de todos os profissionais responsáveis pela educação escolar se abrir ao diálogo em relação aos sofrimentos psíquicos e emocionais dos jovens, buscando caminhos para auxiliá-los quando for o caso. O artigo intitulado "A escola tarnsdisciplinar: lugar para falar sobre saúde mental" (LOPES, 2019) apresenta sugestões de como a escola pode atuar na detecção precoce e na prevenção de casos de suicídio, depressão, ansiedade e outros transtornos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Outra importante competência expressa na BNCC (BRASIL, 2018, p. 10) para a construção de uma convivência de paz entre os jovens é a **competência geral 9**.

> Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

Por meio de diversas atividades propostas nesta obra os estudantes têm a oportunidade de desenvolver essa competência, que diz respeito à valorização da diversidade, ao reconhecimento do outro, ao acolhimento da perspectiva do outro, ao diálogo e à convivência, à colaboração e à resolução de conflitos. Na parte específica deste manual estão indicadas algumas delas.

Entretanto, a convivência diária entre os jovens pode favorecer um tipo de atitude negativa denominada *bullying*.

> De origem inglesa e sem tradução no Brasil, é utilizado para qualificar comportamentos agressivos no âmbito escolar, praticados tanto por meninos quanto por meninas. Os atos de violência (física ou não) ocorrem de forma intencional e repetitiva contra um ou mais alunos que se encontram impossibilitados de fazer frente às agressões sofridas. Tais comportamentos não apresentam motivações específicas ou justificáveis. Em última instância, significa dizer que, de forma "natural", os mais fortes utilizam os mais frágeis como meros objetos de diversão, prazer e poder, com o intuito de maltratar, intimidar, humilhar e amedrontar suas vítimas. (SILVA, 2010, p. 7).

Consiste em um tipo de agressão que se repete intencionalmente e desqualifica o outro na forma de constrangimento, que muitas vezes está relacionado a características físicas ou identitárias da vítima. Cláudio Marques da Silva Neto (2018) afirma que:

> O *bullying* já é considerado um problema de saúde pública no Brasil. Uma pesquisa do Fundo das Nações Unidas para Infância (Unicef) aponta o Brasil como quarto país com maior prática de *bullying* no mundo. Dados mostram que 43% dos estudantes de 11 a 12 anos disseram ter sido vítimas de violência física ou psicológica na escola pelo menos uma vez em outubro do ano passado.

Segundo Ana Beatriz Barbosa Silva (2010, p. 7), as formas de *bullying* são:

- Verbal (insultar, ofender, falar mal, colocar apelidos pejorativos, "zoar")
- Física e material (bater, empurrar, beliscar, roubar, furtar ou destruir pertences da vítima)
- Psicológica e moral (humilhar, excluir, discriminar, chantagear, intimidar, difamar)
- Sexual (abusar, violentar, assediar, insinuar)
- Virtual ou *Ciberbullying* (*bullying* realizado por meio de ferramentas tecnológicas: celulares, filmadoras, internet etc.)

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Ainda segundo a autora, seguem algumas formas de se reconhecer quando uma criança ou adolescente está sofrendo *bullying* na escola:

> No recreio encontram-se isoladas do grupo, ou perto de alguns adultos que possam protegê-las; na sala de aula apresentam postura retraída, faltas frequentes às aulas, mostram-se comumente tristes, deprimidas ou aflitas; nos jogos ou atividades em grupo sempre são as últimas a serem escolhidas ou são excluídas; aos poucos vão se desinteressando das atividades e tarefas escolares; e em casos mais dramáticos apresentam hematomas, arranhões, cortes, roupas danificadas ou rasgadas. (SILVA, 2010, p. 10).

Para que o *bullying* seja combatido ou minimizado na escola, é importante que você esteja atento a esse tipo de situação. No caso de identificar essa prática, o tema deve ser trazido para discussão entre os estudantes e, por meio do diálogo, inclusive com a conscientização dos agressores, devem ser estabelecidos combinados que assegurem o respeito e a dignidade no ambiente escolar.

No artigo intitulado "5 ações para promover a saúde mental na escola" (SEMIS, 2018) são propostas atitudes que visam à prevenção e à promoção da saúde mental dos estudantes. Entre elas estão a atenção permanente ao tema, o investimento no trabalho das competências socioemocionais, conforme já indicamos anteriormente, e o envolvimento e o empoderamento dos alunos. Algumas sugestões de atividades para promover o combate à violência nas escolas, em especial o *bullying*, podem ser encontradas na aula proposta por Lérida Oliveira (2012), no Portal do Professor, no *site* do Ministério da Educação.

Nas *Cartilhas sobre como enfrentar a violência e promover a cultura de paz nas escolas* (CARTILHAS..., [2018]), também podem ser encontradas algumas estratégias para promover a cultura de paz entre os estudantes.

O projeto de vida

A Base Nacional Comum Curricular propõe que no Ensino Médio as escolas organizem suas práticas de modo a contemplar o projeto de vida dos estudantes.

De acordo com Moran (2017),

> O projeto ou plano de vida representa o que o indivíduo quer ser e o que ele vai fazer em certos momentos de sua vida, bem como as possibilidades de alcançá-lo. Projeto de vida, num sentido amplo, é tornar conscientes e avaliar nossas trilhas de aprendizagem, nossos valores, competências e dificuldades e também os caminhos mais promissores para o desenvolvimento em todas as dimensões. É um exercício constante de tornar visível, na nossa linha do tempo, nossas descobertas, valores, escolhas, perdas e também desafios futuros, aumentando nossa percepção, aprendendo com os erros e projetando novos cenários de curto e médio prazo. É um roteiro aberto de autoaprendizagem, multidimensional, em contínua construção e revisão, que pode modificar-se, adaptar-se e transformar-se ao longo da nossa vida.

O compromisso com o desenvolvimento integral dos estudantes pressupõe seu desenvolvimento tanto social como pessoal, incluindo uma formação que possibilite a reflexão e possíveis tomadas de decisão a respeito de seu projeto de vida.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 473):

> [...] é papel da escola auxiliar os estudantes a aprender a se reconhecer como sujeitos, considerando suas potencialidades e a relevância dos modos de participação e intervenção social na concretização de seu projeto de vida. É, também, no ambiente escolar que os jovens podem experimentar, de forma mediada e intencional, as interações com o outro, com o mundo, e vislumbrar, na valorização da diversidade, oportunidades de crescimento para seu presente e futuro.

Ao vislumbrar o futuro, os jovens precisam também se preparar para o mercado de trabalho. A **competência geral 6** da BNCC (BRASIL, 2018, p. 9) deixa claro o compromisso da escola nesse sentido.

> Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

O artigo “Como preparar nossos jovens para o mercado de trabalho do futuro?” (PARENTE, 2018), traz uma reflexão sobre as transformações que a escola precisa fazer para formar jovens com as habilidades necessárias a um mercado de trabalho em mudanças constantes e cada vez mais velozes, e apresenta as seguintes estratégias:

> – Encorajar crianças a explorar novos interesses e a encontrar propósitos em pequenos projetos;
> – Ensinar os estudantes a acolher a diversidade de ideias e comportamentos, e a aceitar *feedbacks* (retornos avaliativos);
> – Encorajar a execução de ideias. Inovações não precisam ser grandiosas, podem ser pequenas implementações que mudam processos e fazem a diferença em um ambiente de trabalho e na comunidade onde vivem;
> – Utilizar a escrita e a arte para lidar com emoções e exercer empatia;
> – Dar espaço para que os estudantes explorem e sejam capazes de imaginar;
> – Criar situações que exponham essas crianças a inovações, como visitas a museus, acesso a leituras e cursos sobre temas atuais;
> – Reconfigurar a relação entre professores e estudantes, com o professor sendo mais um mediador inspirador do que um “chefe”.

Esta coleção, por meio de diversos tipos de atividades, que propiciam diferentes tipos de interação entre os colegas e entre os estudantes e o professor, enquanto vivenciam diferentes experiências, oferece a oportunidade a cada jovem de projetar, definir e redefinir o que deseja para sua vida.

Especialmente no trabalho com os projetos, trazidos em cada livro desta coleção na seção **Conexões & Projetos**, os estudantes têm a oportunidade de viver experiências que podem marcar definitivamente a forma como veem o mundo e atuam nele. Essa parte do livro será detalhadamente explicada nas seções relativas ao Livro do Estudante.

Finalmente, alinhada ao Novo Ensino Médio e à BNCC, comprometida com o referencial teórico acima exposto e com as recomendações para a construção de uma cultura de paz e para o projeto de vida dos jovens, esta coleção foi pensada para que os estudantes tenham experiências que os levem a desenvolver um pensamento matemático consistente, [illegible] que aplicam esse conhecimento a outras áreas do conhecimento e [illegible] mundo real, desenvolvendo-se assim como sujeitos autônomos, capazes de atuar com competência e responsabilidade em uma sociedade cada vez mais complexa.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Boyko.Pictures/Shutterstock.com

A ORGANIZAÇÃO DA OBRA

I. O Manual do Professor

É formado por esta parte geral e uma parte específica, de acordo com cada livro.

1. Parte geral	2. Parte específica
Esta primeira parte consta do Manual do Professor em todos os livros da coleção.	A parte específica de cada livro está distribuída nos tópicos a seguir. • Sobre o livro • Objetivos do livro • Justificativa • Conexões com outras áreas de conhecimento • Temas Transversais abordados no livro • Cronograma

Em cada unidade	Em Conexões & projetos
• Objetivos da unidade • Justificativa • Competências gerais comentadas • Competências específicas • Habilidades comentadas • Resoluções e comentários	• Objetivos • Justificativa • Competências gerais trabalhadas em cada projeto comentadas • Objetivos de cada projeto • Competências específicas trabalhadas em cada projeto • Lista de habilidades de cada projeto • Orientações ao professor
Atividades complementares	
Referências comentadas	

Audiovisual
A coleção é acompanhada de seis videotutoriais, um por livro, em que são apresentados os objetivos, a justificativa, a relação com a BNCC e a estrutura de cada material, fornecendo a você, professor, subsídios para seu planejamento, a preparação e condução dos conteúdos. Por se tratar de outra linguagem, o vídeo pode ser uma ferramenta mais clara e acessível para a compreensão da obra.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

II. O Livro do Estudante

Veja a seguir a descrição detalhada de cada parte que integra o Livro do Estudante.

1. A organização dos livros

A forma de organização dos assuntos levou em conta o conhecimento matemático mobilizado e articulado, diferentemente da organização tradicionalmente apresentada. Para favorecer sua autonomia, professor, esta obra foi concebida tendo a flexibilidade como norte. Os seis livros foram elaborados de forma independente, sem uma ordem preestabelecida. Dessa forma, você pode utilizá-los de acordo com sua realidade e do modo que pretende implementar seu planejamento, escolhendo a ordem em que cada livro será trabalhado. Além disso, na medida do possível, as unidades do mesmo livro podem ser trabalhadas na sequência que você julgar conveniente.

Para viabilizar essa proposta, foram reunidos em um mesmo livro assuntos que se relacionam; porém, os livros da coleção não têm caráter sequencial. Apresentamos a seguir o quadro de conteúdos com o resumo de cada unidade dos seis livros.

1.1 Quadro de conteúdos

Unidade 1 – Função afim	**Objetivos** • Estudar e aplicar o raciocínio proporcional. • Conhecer a função afim, identificar as situações que podem ser modeladas por ela e usar procedimentos algébricos e gráficos para resolvê-la. • Resolver e elaborar problemas que envolvam a função afim.	Competências gerais: 2, 4, 5 e 9 Competências específicas: 1, 3, 4 e 5	Habilidades: EM13MAT101 EM13MAT302 EM13MAT401 EM13MAT404 EM13MAT501 EM13MAT510
Unidade 2 – Progressão aritmética, funções e sistemas lineares	**Objetivos** • Investigar as propriedades de uma progressão aritmética, relacioná-la com a função afim e resolver problemas que a envolvam. • Resolver problemas que envolvem sistemas de equações lineares. • Analisar o crescimento linear em situações de juros simples.	Competências gerais: 2, 4, 5 e 9 Competências específicas: 2, 3, 4 e 5	Habilidades: EM13MAT203 EM13MAT301 EM13MAT302 EM13MAT405 EM13MAT507
Unidade 3 – Raciocínio lógico e tratamento da informação	**Objetivos** • Desenvolver noções básicas de linguagem computacional. • Utilizar algoritmos e fluxogramas para descrever procedimentos de execução de uma atividade. • Localizar e analisar informações em textos, tabelas e gráficos estatísticos, assim como construí-los. • Interpretar taxas e índices socioeconômicos de forma crítica.	Competências gerais: 1, 4, 5, 6, 7 e 9 Competências específicas: 1, 3 e 4	Habilidades: EM13MAT102 EM13MAT104 EM13MAT315 EM13MAT405

Unidade 1 – Unidades de medida	**Objetivos** • Entender o que é medir e como as medidas podem ser obtidas. • Conhecer e utilizar as unidades de medida adotadas ou não no Sistema Internacional de Unidades. • Relacionar grandezas fundamentais e derivadas com as respectivas unidades de medida. • Resolver problemas envolvendo precisão de medidas e notação científica.	Competências gerais: 1, 4, 5, 7, 9 e 10 Competências específicas: 1, 2, 3 e 4	Habilidades: EM13MAT103 EM13MAT201 EM13MAT313 EM13MAT314 EM13MAT315 EM13MAT405
Unidade 2 – O estudo das equações do 2º grau	**Objetivos** • Retomar a resolução de equações do 2º grau e obter a fórmula resolutiva. • Utilizar a resolução de equações do segundo grau para resolver problemas. • Obter relações entre raízes e coeficientes de uma equação do segundo grau.	Competências gerais: 1, 2 e 4 Competências específicas: 3 e 4	Habilidades: EM13MAT302 EM13MAT315 EM13MAT405
Unidade 3 – Função quadrática e inequações do 2º grau	**Objetivos** • Utilizar funções do segundo grau para modelar e resolver problemas. • Construir gráficos de funções quadráticas, assim como identificar e calcular as coordenadas do ponto extremo. • Resolver inequações do segundo grau. • Resolver problemas envolvendo funções definidas por mais de uma sentença.	Competências gerais: 2, 4 e 5 Competências específicas: 3, 4 e 5	Habilidades: EM13MAT302 EM13MAT402 EM13MAT404 EM13MAT405 EM13MAT502 EM13MAT506

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Unidade 1 – Tópicos de Matemática Financeira	**Objetivos** • Compreender e usar os conceitos de juros simples e juros compostos. • Calcular capital aplicado após um período nas duas modalidades de juros, diferenciando-as.	Competências gerais: 2, 4, 5 e 9 Competências específicas: 1, 2, 3 e 4	Habilidades: EM13MAT101 EM13MAT104 EM13MAT203 EM13MAT302 EM13MAT303 EM13MAT315 EM13MAT405
Unidade 2 – Função exponencial e função logarítmica	**Objetivos** • Conhecer os logaritmos e entender como aplicá-los. • Modelar, resolver e elaborar situações de crescimento e decrescimento que envolvam funções exponenciais e funções logarítmicas.	Competências gerais: 1, 2, 4, 5 e 9 Competências específicas: 1, 3 e 4	Habilidades: EM13MAT101 EM13MAT304 EM13MAT305 EM13MAT403
Unidade 3 – Sequências numéricas e progressão geométrica	**Objetivos** • Identificar sequências numéricas e sua formação por meio do termo geral. • Relacionar o cálculo de montantes em juros compostos com crescimento em progressão geométrica. • Usar logaritmo para resolver problemas relacionados à progressão geométrica. • Corresponder os termos de uma progressão geométrica com imagens de função exponencial.	Competências gerais: 2, 4 e 9 Competências específicas: 3, 4 e 5	Habilidades: EM13MAT304 EM13MAT305 EM13MAT405 EM13MAT508

Unidade 1 – Estatística descritiva	**Objetivos** • Interpretar criticamente situações socioeconômicas utilizando medidas de tendência central e medidas de dispersão. • Calcular e analisar medidas de tendência central e de dispersão. • Construir e analisar gráficos e diagramas estatísticos.	Competências gerais: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9 e 10 Competências específicas: 2, 3 e 4	Habilidades: EM13MAT202 EM13MAT316 EM13MAT406 EM13MAT407
Unidade 2 – Análise combinatória	**Objetivos** • Empregar diagrama da árvore na resolução de problemas de contagem. • Calcular número de possibilidades de ocorrência de um evento utilizando estratégias de arranjo, combinação, permutação simples e com repetição. • Utilizar os princípios aditivo e multiplicativo de contagem para resolver problemas e criar situações que possam ser resolvidas por eles.	Competências gerais: 2, 4, 5 e 9 Competências específicas: 3 e 4	Habilidades: EM13MAT310 EM13MAT315 EM13MAT405
Unidade 3 – Probabilidades	**Objetivos** • Identificar situações do cotidiano quanto ao uso das probabilidades. • Calcular a probabilidade condicional de dois eventos simultâneos. • Resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de probabilidades.	Competências gerais: 1, 2, 4, 7 e 9 Competências específicas: 1, 3 e 5	Habilidades: EM13MAT106 EM13MAT311 EM13MAT312 EM13MAT511

Unidade 1 – Geometria plana	**Objetivos** • Compreender relações e empregar diferentes métodos para o cálculo de perímetros e áreas de figuras planas. • Resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de perímetros e áreas de polígonos. • Estabelecer relações entre ângulos de um polígono regular e utilizar o conceito de ângulo para elaborar e resolver problemas de ladrilhamento no plano.	Competências gerais: 1, 2, 4, 5, 7 e 9 Competências específicas: 2, 3 e 5	Habilidades: EM13MAT201 EM13MAT307 EM13MAT505
Unidade 2 – Triângulos e geometria das transformações	**Objetivos** • Identificar e compreender diferentes transformações isométricas e homotéticas e usá-las para resolver e elaborar problemas. • Desenvolver noções de Geometria dos Fractais. • Obter relações métricas a partir de semelhança de triângulos. • Estabelecer relações trigonométricas em triângulos e usá-las para resolver e elaborar problemas.	Competências gerais: 1, 2, 3, 4 e 5 Competências específicas: 1 e 3	Habilidades: EM13MAT105 EM13MAT308
Unidade 3 Funções trigonométricas	**Objetivos** • Identificar e relacionar unidades de medidas de ângulos: grau e radiano. • Conceituar circunferência trigonométrica e definir o seno e o cosseno • Definir, construir gráficos e identificar periodicidade das funções seno e cosseno. • Relacionar as funções trigonométricas com fenômenos periódicos e usá-las para resolver e elaborar problemas.	Competências gerais: 1, 2, 4, 5 e 7 Competência específica: 3	Habilidade: EM13MAT306

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Unidade 1 – Os sólidos geométricos	**Objetivos** • Desenvolver noções sobre o método axiomático. • Resolver e elaborar problemas relacionados aos cálculos de medidas de comprimento associados aos elementos de alguns sólidos geométricos. • Retomar planificações de sólidos geométricos. • Resolver e elaborar problemas envolvendo elementos de poliedros. • Investigar e compreender diferentes projeções cartográficas.	Competências gerais: 1, 2, 3, 4, 5 e 9 Competência específica: 5	Habilidade: EM13MAT509
Unidade 2 – Prismas e cilindros	**Objetivos** • Resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de áreas de superfícies e volumes de cilindros e prismas. • Compreender o princípio de Cavalieri para o cálculo de volume de sólidos geométricos e usá-lo para calcular o volume de prismas e cilindros.	Competências gerais: 1, 2, 4, 5 e 9 Competências específicas: 2, 3 e 5	Habilidades: EM13MAT201 EM13MAT309 EM13MAT504
Unidade 3 – Pirâmides, cones e esferas	**Objetivos** • Resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de áreas de superfícies e volumes de pirâmides, cones e esferas. • Compreender o princípio de Cavalieri para a determinação dos volumes de pirâmides, cones e esferas.	Competências gerais: 1, 2, 4 e 7 Competências específicas: 2, 3 e 5.	Habilidades: EM13MAT201 EM13MAT309 EM13MAT504

Além das três unidades, cada livro contém uma parte importante chamada **Conexões & Projetos**, constituída por dois projetos por meio dos quais os estudantes colocam em ação, de forma articulada, as habilidades trabalhadas nas unidades daquele livro. Esta parte será tratada detalhadamente no item IV deste texto.

Ao final de cada livro encontra-se a **Caixa de ferramentas**, cuja proposta descrevemos a seguir.

- A **Caixa de ferramentas**

Para garantir a independência dos livros, selecionamos alguns tópicos que darão suporte para o desenvolvimento de determinadas unidades e que aparecem em mais de um livro. Dessa forma, não é necessário seguir uma ordem estabelecida para o estudo dos seis livros que compõem a coleção. A **Caixa de ferramentas** de cada livro é constituída dos tópicos relacionados àquele livro e será acessada pelos estudantes quando necessário, favorecendo tanto a autonomia deles quanto a sua, uma vez que possibilita diferentes modos de apresentação e ordenação do conteúdo. O ícone da **Caixa de ferramentas** aparece em um boxe com o respectivo texto na primeira vez que algum tópico é utilizado na unidade.

Os tópicos que integram a **Caixa de ferramentas** são textos relacionados a alguns conhecimentos desenvolvidos nos anos finais do Ensino Fundamental e servem de fonte de consulta e retomadas que se façam necessárias.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 471),

> No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração.

Seguem os tópicos da **Caixa de ferramentas** e as respectivas habilidades dos anos finais do Ensino Fundamental que foram retomadas e/ou aprofundadas.

Tópicos	Habilidades da BNCC
Algoritmos e fluxogramas	EF06MA04, EF06MA34, EF07MA07, EF07MA26, EF07MA28, EF08MA10, EF08MA11, EF08MA16, EF09MA23
Recursos digitais	EF06MA23, EF07MA23
Unidades de medida	EF06MA24, EF06MA27, EF07MA29, EF07MA30, EF08MA19, EF08MA20, EF08MA21, EF09MA04, EF09MA18
Conjuntos numéricos	EF07MA03, EF07MA10, EF08MA05, EF09MA01, EF09MA02
A linguagem das funções	EF09MA06
Cálculo de áreas	EF07MA31, EF07MA32, EF07MA33, EF08MA19
Pesquisa estatística	EF06MA33, EF07MA36, EF08MA27, EF09MA23
Fundamentos de geometria plana	EF07MA23, EF07MA24, EF08MA15, EF08MA17, EF09MA14, EF09MA12, EF09MA13, EF09MA16, EF09MA17

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Os textos são acompanhados de exemplos que auxiliarão os estudantes na compreensão dos tópicos retomados. A **Caixa de ferramentas** favorece aos estudantes o desenvolvimento dos processos de leitura e pode ser explorada da forma que você julgar conveniente. Veja as duas sugestões a seguir.

- Situação 1: ao fazer o planejamento, selecione previamente, na **Caixa de ferramentas**, o tópico ou os tópicos necessários ao desenvolvimento de determinado assunto.

Oriente, então, os estudantes para que façam um estudo prévio individualmente como tarefa de casa ou, na sala de aula, discutindo com o colega.

- Situação 2: o próprio estudante, quando sentir necessidade, recorre à **Caixa de ferramentas** para estudar o tópico que lhe convier. Espera-se, assim, contribuir para a formação de um jovem autônomo, capaz de identificar suas necessidades de aprendizagem e, com base na própria iniciativa, buscar caminhos para aprender.

2. A organização das unidades

Tendo a resolução de problemas como eixo condutor de todo o trabalho, as unidades que compõem cada livro são constituídas por um percurso de investigação com sucessivas problematizações que possibilitam aos estudantes a elaboração de conclusões e o estabelecimento de novos conceitos. Da forma como estão propostas, as atividades propiciam o desenvolvimento de processos como investigação, construção de modelos e resolução de problemas.

Ao longo de cada unidade, trabalhando ora individualmente, ora em duplas ou em pequenos grupos, os estudantes têm diversas oportunidades de mobilizar sua forma própria de raciocinar, fazer representações, se comunicar e argumentar. São apresentadas situações que os levam a discutir, propor e validar hipóteses, desenvolvendo assim conceitos, representações e procedimentos cada vez mais complexos.

Para propiciar esse trabalho, as unidades são constituídas por **eixos, seções** e **outros recursos**, descritos a seguir.

2.1 Os eixos

Em todos os livros da coleção, sempre que possível, três elementos estão presentes: **Produção de textos**, **Algoritmos e fluxogramas** e **Recursos digitais**.

Por perpassarem as unidades, fazendo a articulação entre os assuntos trabalhados, esses elementos foram denominados **eixos** e garantem a diversidade de atividades, o desenvolvimento de habilidades e a participação dos estudantes como sujeitos ativos no processo de ensino e aprendizagem. Em uma mesma unidade podem aparecer diversos eixos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- **Produção de textos**

A **competência geral 7** da BNCC (BRASIL, 2018, p. 9) propõe que o estudante deve ser capaz de:

> Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

Visando desenvolver essa competência, em todas as unidades de todos os livros da coleção são propostas atividades em que os estudantes produzirão textos tanto oralmente como por escrito. Por meio desses textos eles descrevem formas de pensar, elaboram hipóteses, apresentam argumentações, elaboram problemas, entre outros. Esse eixo favorece, particularmente nos jovens, o desenvolvimento da capacidade de argumentação.

Quanto à elaboração de problemas, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 536) propõe que:

> Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada.

Um dos pontos de destaque que evidenciam a autonomia no desenvolvimento do pensamento matemático é a elaboração de problemas sobre determinado conceito. Saber elaborar uma situação-problema requer um esforço cognitivo muito maior do que uma simples solução, além de necessitar de conhecimento mais profundo sobre o assunto tratado.

- **Algoritmos e fluxogramas**

Esse eixo favorece o desenvolvimento do pensamento computacional, que está presente na BNCC desde o 6º ano do Ensino Fundamental. Esse tipo de pensamento permite que, diante de um problema, o sujeito possa dividi-lo em partes, identificar padrões, imaginar uma solução que seja válida para diversos problemas e definir uma sequência de passos que os resolvam. Esses passos podem ser expressos por meio de um algoritmo, que por sua vez pode ser representado por um fluxograma.

Os algoritmos e fluxogramas são trabalhados nesta coleção como um eixo que perpassa todos os livros, sempre que possível, envolvendo os mais diversos assuntos, visando desenvolver as seguintes habilidades:

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Considerando que nem todos os estudantes tiveram a oportunidade de desenvolver as habilidades relativas à elaboração de algoritmos e fluxogramas propostas na BNCC para o Ensino Fundamental, esse assunto é tratado em um tópico da **Caixa de ferramentas**, onde constam conceitos, uma descrição do que é um algoritmo, para que serve, tipos de algoritmos, fluxograma e os símbolos utilizados na sua elaboração.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- **Recursos digitais**

Em diversas atividades, em todos os livros, os estudantes fazem uso de planilhas eletrônicas, *softwares* de geometria dinâmica ou de calculadoras.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 536),

> [...] o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações.

A importância deste eixo fica evidente devido ao fato de que dezessete habilidades, distribuídas nas cinco competências específicas de Matemática, se referem ao uso das tecnologias digitais para a etapa do Ensino Médio na BNCC.

Neste caso também, a **Caixa de ferramentas** inclui um tópico em que são apresentadas noções básicas de como utilizar planilhas eletrônicas, *softwares* de geometria dinâmica e calculadoras científicas.

2.2 As seções

UNIDADE

Nas **aberturas de unidades** são propostas algumas questões para serem debatidas com a turma, cujo objetivo é mobilizar os conhecimentos anteriores e provocar a necessidade de aquisição de novas habilidades e/ou conteúdos conceituais.

Essas questões podem ser trabalhadas na perspectiva da "sala de aula invertida" (BACICH; MORAN, 2018), em que o estudante, de alguma forma, tem acesso prévio ao assunto que será tratado. Essa é uma das metodologias ativas propostas como forma de colocar o estudante no centro do processo de aprendizagem. Com essa perspectiva, o problema ou as questões na abertura de cada unidade podem ser propostos com antecedência, envolvendo inclusive algum tipo de pesquisa, de modo que ao iniciar a unidade o estudante já tenha tido a oportunidade de pensar sobre o assunto que será abordado. A primeira aula daquela unidade passa a ser, então, um momento de ricas discussões sobre o assunto, com a contribuição de cada estudante.

Para pensar e discutir

Esta seção aparece ao longo de toda a unidade, permeando o texto. O objetivo é colocar o estudante como participante ativo do próprio processo de aprendizagem, potencializando de forma sistemática sua capacidade de fazer inferências pelo aprimoramento de processos de leitura. É constituída por situações que levam o estudante a pensar individualmente, seja durante a aula ou como tarefa de casa. As questões propostas podem envolver investigação de propriedades, elaboração de novos problemas, conclusões ou sínteses que podem ser apresentadas por meio de um texto argumentativo ou de resoluções matemáticas para justificar os argumentos apresentados na discussão, conforme o caso, o que propicia mais uma oportunidade para o desenvolvimento da capacidade de argumentar dos estudantes.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Em seguida, as questões são discutidas em duplas, em grupos ou com toda a turma, sob sua mediação, professor.

Incentivar os estudantes a pensar sobre as questões propostas e apresentar argumentos bem fundamentados é seu papel nesse tipo de atividade. No momento das discussões, cabe também a você garantir um ambiente de respeito e, por meio de novos questionamentos, promover o desenvolvimento de ideias matemáticas e corrigir os conceitos envolvidos.

Para explorar

Os estudantes resolvem as atividades propostas nesta seção sempre em duplas ou em pequenos grupos. Eles trocam ideias ao investigar regras, padrões e propriedades matemáticas e ao fazer análises críticas, criativas e propositivas envolvendo diversos tipos de situações. É hora de observar, testar, comparar, discutir, argumentar, ouvir o colega e explicar seu pensamento.

As atividades propostas nesta seção possibilitam também o desenvolvimento do processo de metacognição (LEITE; DARSIE, 2011), por meio do qual os estudantes têm a oportunidade de pensar sobre como aprendem, promovendo o autoconhecimento, a autonomia intelectual e o controle das próprias atividades cognitivas.

Durante a realização das atividades, cabe a você incentivá-los a se expressarem com clareza, comunicarem suas formas de pensar e apresentarem argumentos que justifiquem suas afirmações.

Para retomar

Esta seção retoma problemas propostos na própria unidade, geralmente no início, aplicando conhecimentos recém-adquiridos. A ideia é trazer diversas formas de abordagem do assunto, relacioná-las e retomá-las, de modo a contribuir para o desenvolvimento de habilidades.

Aproveitando a oportunidade

Seção de aprofundamento de assuntos não especificados na BNCC por meio do processo de investigação, envolvendo problematizações decorrentes dos temas principais trabalhados na unidade. Você tem autonomia para desenvolver ou não esse tópico, de acordo com as necessidades dos estudantes e a disponibilidade de tempo.

Atividades

Blocos de atividades ao final de cada tópico. Podem ser abertas ou fechadas e, em alguns casos, envolver investigações matemáticas, produção de textos ou elaboração de algoritmos e fluxogramas. Nesses blocos podem haver atividades para ser resolvidas em grupos ou em duplas, usando ou não algum tipo de tecnologia digital.

Atividades finais

Relação de atividades envolvendo todo o assunto estudado na unidade. Podem ser abertas ou não. Inclui questões de concursos, de vestibulares e do Enem. Podem ser propostas como tarefa de casa ou para serem resolvidas durante a aula. Você pode selecionar algumas atividades para serem resolvidas em duplas e discutidas coletivamente.

Visando contribuir para a autonomia dos estudantes, as respostas dessas atividades constam no final do Livro do Estudante.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

2.3 Outros recursos

Os seguintes recursos podem aparecer ao longo das unidades, quando oportuno.

Vozes

Dados biográficos de autores, personalidades de destaque e outros, com descrição de suas trajetórias e importância.

Análise e contexto

Textos do cotidiano (notícias, ensaios, divulgação científica) para análise e estudo. São acompanhados de questões.

INFOGRÁFICO

Os infográficos apresentam uma síntese de assuntos relacionados à unidade e podem ou não ser acompanhados de questões para discussão.

3. Conexões & projetos

A quarta parte do livro do estudante, logo depois da terceira unidade, é constituída por uma seção denominada **Conexões & Projetos** formada por dois projetos que visam levar os estudantes a colocar em ação, de forma articulada, as habilidades trabalhadas nas unidades de cada livro. Por meio desses projetos, eles terão a oportunidade de desenvolver competências relacionadas a saberes e vivências da vida cotidiana usando diversos tipos de tecnologia e os conhecimentos matemáticos adquiridos. São abordados temas de interesse dos jovens, como a propagação de *fake news*, e ligados aos Temas Contemporâneos Transversais, como educação financeira e cultura indígena, entre outros.

Esse tipo de trabalho colabora para os estudantes se reconhecerem como sujeitos, considerando suas potencialidades e as possibilidades de participação e intervenção na sociedade em que vivem, o que contribui para a articulação de seu projeto de vida. A escolha dos temas também levou em conta a possibilidade de oferecer aos jovens a oportunidade de conhecer novas realidades, de se aprofundarem em temas relevantes para sua vida e, em alguns casos, fazer intervenções na comunidade. Esse é o caso, por exemplo do projeto sobre ações

sustentáveis, por meio do qual os estudantes desenvolvem ações de impacto social tendo como base o estudo de custos e rendimentos, visando ao melhor aproveitamento dos recursos disponíveis para a solução de um problema coletivo.

É um trabalho que mobiliza competências diversas, como: comunicar-se por meio de instrumentos produzidos pelas tecnologias e pela cultura moderna; ter domínio e responsabilidade diante das mais diversas situações; e respeitar os princípios éticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social.

A proposta de **Conexões & Projetos** visa, de acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 465):

- favorecer a atribuição de sentido às aprendizagens, por sua vinculação aos desafios da realidade e pela explicitação dos contextos de produção e circulação dos conhecimentos;
- garantir o protagonismo dos estudantes em sua aprendizagem e o desenvolvimento de suas capacidades de abstração, reflexão, interpretação, proposição e ação, [illegible] economia pes[illegible] intelectual e política;
- promover a aprendizagem colaborativa, desenvolvendo nos estudantes a capacidade de trabalharem em equipe e aprenderem com seus pares; e
- estimular atitudes cooperativas e propositivas para o enfrentamento dos desafios da comunidade, do mundo do trabalho e da sociedade em geral, alicerçadas no conhecimento e na inovação.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Essa parte da obra oferece, ainda, aos estudantes a oportunidade de (BNCC, 2018, p. 467):

- compreender e utilizar os conceitos e teorias que compõem a base do conhecimento científico-tecnológico, bem como os procedimentos metodológicos e suas lógicas;
- conscientizar-se quanto à necessidade de continuar aprendendo e aprimorando seus conhecimentos;
- apropriar-se das linguagens científicas e utilizá-las na comunicação e na disseminação desses conhecimentos; e
- apropriar-se das linguagens das tecnologias digitais e tornar-se fluentes em sua utilização.

Mais uma vez, pensando na autonomia docente, os projetos são independentes e ambos podem ser desenvolvidos por toda a turma, um de cada vez, de acordo com o cronograma proposto por você. Outra opção é que os estudantes escolham um dos projetos para desenvolver. Analise previamente as propostas, entre nos endereços e *sites* indicados e, se necessário, faça adaptações.

Cabe também a você escolher o melhor momento para dar início ao trabalho. Como o desenvolvimento de um projeto demanda tempo para que as várias etapas sejam cumpridas, sugerimos avaliar a possibilidade de, logo no início de um livro, apresentar a proposta de trabalho e orientar os estudantes para que desenvolvam seus projetos paralelamente ao desenvolvimento das unidades. Essa é mais uma oportunidade de investir na autonomia dos estudantes, uma vez que, caso necessário, podem acessar conteúdos de unidades ainda não trabalhadas mas importantes para o desenvolvimento de seus projetos, o que potencializa seus processos de leitura e compreensão de textos, incluindo o texto matemático. Seu papel é fundamental para incentivá-los a se engajar nesse tipo de trabalho e atender às necessidades específicas de cada grupo.

REFERÊNCIAS COMENTADAS

21 PERGUNTAS e respostas sobre *bullying*. *Nova Escola,* São Paulo, 1 ago. 2009. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/336/bullying-escola. Acesso em: 26 jun. 2020

Nesse artigo, especialistas esclarecem dúvidas e apontam soluções para esse problema que preocupa pais, professores e gestores.

ABRAMOVAY, Miriam; RUA, Maria das Graças. *Violências nas escolas*. Brasília, DF: Unesco Brasil, 2002. Disponível em: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000133967. Acesso em: 26 jun. 2020

Publicação da Unesco que apresenta conceitos e dados acerca de situações de violência escolar, incluindo *bullying*.

ALRO, H.; SKOVSMOSE, O. *Diálogo e aprendizagem em educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

Os autores abordam a relação entre a comunicação na sala de aula e a aprendizagem, enfatizando a importância do diálogo.

BACICH, Lilian; HOLANDA, Leandro. *STEAM em sala de aula*: a aprendizagem baseada em projetos integrando conhecimentos na educação básica. Porto Alegre: Penso Editora, 2020.

Esse livro apresenta a proposta STEAM, sigla em inglês para Ciência, Tecnologia, Engenharia, Artes e Matemática, por meio da qual os estudantes se envolvem em propostas reais para o desenvolvimento de projetos em diversas áreas.

BACICH, Lilian; TANIZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando de Mello. *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso Editora, 2015.

O ensino híbrido é uma abordagem pedagógica que visa colocar o estudante no centro do processo de aprendizagem combinando atividades presenciais e atividades feitas em diferentes ambientes com o uso de tecnologias digitais.

BACICH, Lilian; MORAN, José. *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso Editora, 2018.

Os autores apresentam contribuições teóricas e práticas sobre o ensino e a aprendizagem desenvolvidas por meio das metodologias ativas apoiadas em tecnologias, que visam favorecer a participação ativa do estudante nos processos de aprendizagem.

BENDER, Willian N. *Aprendizagem baseada em projetos:* educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso Editora, 2015.

Explora as formas como os professores podem aplicar a Aprendizagem Baseada em Projetos (ABP) em uma sala de aula real e apresenta diretrizes práticas sobre como usar a ABP em todo o currículo.

BIBIANO, Bianca; SANTOMAURO, Beatriz; MARTINS, Ana Rita. Como agrupo meus alunos? *Nova Escola*, São Paulo, 1 mar. 2009. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/1475/como-agrupo-meus-alunos. Acesso em: 22 maio 2020.

Nesse artigo são apresentadas alternativas para o trabalho em grupos.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto, 2003.

Os autores apresentam os conceitos de modelo e modelagem matemática e propõem a modelagem como método de ensino de matemática.

BNCC COMENTADA para o Ensino Médio. *In:* INSTITUTO REÚNA. São Paulo, c2020. Disponível em: https://institutoreuna.org.br/projeto/base-comentada-para-o-ensino-medio/. Acesso em: 22 maio 2020.

A BNCC Comentada para o Ensino Médio é uma ferramenta que traduz, comenta e explica as competências específicas e as habilidades de cada área de conhecimento desta etapa da educação.

BOALER, Jo. Benefícios do esforço – Parte 3. São Paulo, 23 maio 2018. 1 vídeo (4min33s). Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1_MvTAoH-QJZuhYF9U6Gf_GM65NyHgegh/view. Acesso em: 20 jul. 2020.

Nesse vídeo, gravado durante o I Seminário Mentalidades Matemáticas, a neurocientista Jo Boaler, cofundadora do Youcubed e professora da Universidade de Stanford, apresenta os benefícios do esforço produtivo nas aulas de Matemática.

BOALER, Jo. *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso Editora, 2018.

A autora propõe a ruptura com alguns mitos relativos à aprendizagem da Matemática e apresenta a possibilidade de ensiná-la como uma disciplina criativa e visual.

BORBA, Marcelo C.; SILVA, Ricardo S. R.; GADANIDIS, George. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

Nesse livro, os autores apresentam quatro fases da implementação das tecnologias digitais em Educação Matemática.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática*. São Paulo: Editora Blucher, 2012.

Esse é um clássico de História da Matemática que

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

tem sido texto de referência há mais de 20 anos para aqueles que estudam o assunto.

BRANDT, Celia Finck; BURAK, Dionísio; KLÜBER, Tiago Emanuel. *Modelagem matemática*: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações. Ponta Grossa: Editora da UEPG, 2016. Disponível em: https://static.scielo.org/scielobooks/b4zpq/pdf/brandt-9788577982325.pdf. Acesso em: 21 maio 2020.
Voltado para professores da Educação Básica, o livro apresenta resultados de pesquisas que visam contribuir para tornar o ensino de Matemática mais contextualizado e vinculado à realidade.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 20 maio 2020.
A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que estabelece conhecimentos, competências e habilidades que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da escolaridade básica.

BRASIL. Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes [...]. *Diário Oficial da União*: seção 1, p. 21, 22 nov. 2018. Disponível em: http://www.in.gov.br/materia/-/asset_publisher/Kujrw0TZC2Mb/content/id/51281622. Acesso em: 27 jul. 2020.
A resolução nº 3 atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Regulamenta a implantação do Novo Ensino Médio.

BROUSSEAU, G. *Introdução ao estudo das situações didáticas*: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.
O livro aborda a teoria das situações didáticas, um conceito criado pelo autor há quatro décadas e constante[illegible]

CARAÇA, Bento [illegible] *damentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva, 2000.
Esse livro é referência para o estudo da Matemática e está organizado em três partes: Números, Funções e Continuidade.

CARTILHAS sobre como enfrentar a violência e promover a cultura de paz nas escolas. *In*: PRATTEIN. São Paulo, [2018]. Disponível em: http://prattein.com.br/home/index.php?option=com_content&view=article&id=767:cartilhas-sobre-como-enfrentar-a-violencia-epromover-a-cultura-de-paz-nas-escolas&catid=124:violencia-na-escola&Itemid=216. Acesso em: 13 jun. 2020.
Seleção de cartilhas para entender e enfrentar a violência e promover a cultura de paz nas escolas.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. *Estudar matemáticas*: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.
O livro aborda o estudo da Matemática considerando a educação como um projeto em que os principais protagonistas são os estudantes.

CHICA, Cristiane. Explorando problemas no painel de soluções. *In*: MATHEMA. São Paulo, 20 set. 2019. Disponível em: https://mathema.com.br/jogos-e-atividades/explorando-problemas-no-painel-de-solucoes/. Acesso em: 23 jun. 2020.
Nesse artigo, por meio de exemplos, a autora apresenta como trabalhar com painel de soluções nas aulas de Matemática.

COHEN, Elizabeth G.; LOTAN, Rachel A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. Porto Alegre: Penso Editora, 2017.
Apresenta os referenciais teóricos e a pesquisa que dão suporte ao trabalho em grupo e descreve passos importantes para sua concretização na sala de aula.

COMPETÊNCIAS gerais da BNCC. *In*: MOVIMENTO PELA BASE. [*S. l.*], 1 mar. 2018. Disponível em: http://movimentopelabase.org.br/acontece/competencias-gerais-de-bncc/. Acesso em: 22 maio 2020.
A página esclarece o que são as competências gerais. Inclui um vídeo de Anna Penido que explica como cada uma das competências gerais se articula ao trabalho desenvolvido no cotidiano da escola, passando por todas as disciplinas.

CORREA, Licinia Maria; ALVES, Maria Zenaide; MAIA, Carla Linhares (org.). *Cadernos temáticos*: juventude brasileira e Ensino Médio. Belo Horizonte: Editora da UFMG, 2014. Disponível em: http://observatoriodajuventude.ufmg.br/publication/colecao-cadernos-tematicos-culturas-juvenis-e-tecnologias/. Acesso em: 13 jul. 2020
Esse caderno visa oferecer aos professores referenciais teórico, metodológico, didático e pedagógico que lhes possibilite dialogar com a diversidade juvenil, principalmente com as juventudes imersas no cotidiano das escolas.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *O que é matemática?*: uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2000.
Esse livro trabalha a Matemática de forma construtiva e orgânica, como base para o pensar e agir científicos.

DAVID, Maria Manuela S.; LOPES, Maria da Penha. Falar sobre matemática é tão importante quanto fazer matemática. *Presença pedagógica*, Belo Horizonte, v. 6, n. 32, p. 17-24, 2000.
Nesse artigo, as autoras defendem a importância do falar sobre Matemática para promover o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes e analisam os papéis que o professor pode desempenhar em sala de aula visando socializar o "fazer Matemática".

DAVID, Maria Manuela M. S.; TOMAZ, Vanessa Sena. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.
O livro apresenta e discute situações de sala de aula que evidenciam abordagens interdisciplinares.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

EDUMATEC. *Softwares* de geometria. Porto Alegre: UFRGS, c2008. Disponível em: http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/softwares/soft_geometria.php. Acesso em: 22 maio 2020.
No *site* são encontradas várias indicações de aplicativos e *softwares* para desenvolver atividades nas aulas de Matemática.

ESTUDOS da EPM/Unifesp detalham perfil de casos de suicídio na adolescência no Brasil. *In*: UNIFESP. São Paulo, 5 set. 2019. Disponível em: https://www.unifesp.br/campus/sao/noticias/1144-estudos-da-epm-unifesp-detalham-perfil-de-casos-de-suicidio-na-adolescencia-no-brasil. Acesso em: 26 jun. 2020
Artigo que relata duas pesquisas realizadas pela Universidade Federal de São Paulo (Unifesp), entre os anos de 2006 e 2015, sobre o suicídio entre jovens.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.
O livro traz a história da Matemática desde a Antiguidade até os tempos modernos e apresenta exercícios ao final de cada capítulo como recurso pedagógico.

FANTE, Cleo. *Fenômeno* bullying: como prevenir a violência nas escolas e educar para a paz. Rio de Janeiro: Verus Editora, 2005.
O livro apresenta o *bullying* como um fenômeno que vem sendo tema de preocupação e de interesse nos meios educacionais e sociais em todo o mundo.

FRADE, Isabel Cristina Alves da Silva; VAL, Maria da Graça Costa; BREGUNCI, Maria das Graças de Castro (org). *Glossário Ceale*: termos de alfabetização, leitura e escrita para educadores. Belo Horizonte: UFMG; Faculdade de Educação, 2014.
Voltado para educadores em geral, inclui aproximadamente 200 verbetes escritos por colaboradores de diferentes instituições do país e do exterior, na área de especialização de cada um.

HERNÁNDEZ, Fernando. *Transgressão e mudança na educação*: os projetos de trabalho. Porto Alegre: Artmed, 2007.
A obra apresenta os pressupostos teóricos sobre o trabalho com projetos, com base em uma visão histórica.

HOFFMANN, Jussara. *Avaliação mediadora*: uma prática em construção da Pré-Escola à universidade. Porto Alegre: Mediação, 2006.
A autora propõe uma avaliação mediadora, da reflexão para a ação.

INSTITUTO AYRTON SENNA. Estante do educador. São Paulo, [20--?]. Disponível em: https://www.institutoayrtonsenna.org.br/pt-br/conteudos/estante-do-educador.html. Acesso em: 23 maio 2020.
Disponibiliza diversos *e-books* para auxiliar o professor a desenvolver uma prática que promova a educação integral dos estudantes.

INSTITUTO INSPIRARE. São Paulo, 2012. Disponível em: http://inspirare.org.br/. Acesso em: 26 maio 2020.
Nesse *site* são encontrados materiais relativos à promoção do desenvolvimento integral dos estudantes e sua preparação para a vida no mundo atual.

INSTITUTO REÚNA. São Paulo, c2020. Disponível em: https://institutoreuna.org.br/. Acesso em: 26 jun. 2020.
O *site* disponibiliza ferramentas e conteúdos práticos alinhados à BNCC e apresenta soluções para inovações na sala de aula.

LEITE, Eliana Alves Pereira; DARSIE, Marta Maria Pontin. Implicações da metacognição no processo de aprendizagem da Matemática. *Reveduc*, São Carlos, v. 5, n. 2, p. 179-191, nov. 2011. Disponível em: http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/250. Acesso em: 22 jun. 2020.
Artigo que apresenta implicações identificadas por diferentes autores entre metacognição e aprendizagem, e mais especificamente entre metacognição e aprendizagem da Matemática.

LOPES, Celi Espasandin; NACARATO, Adair Mendes (org.). *Educação matemática, leitura e escrita*: armadilhas, utopias e realidade. Campinas: Mercado de Letras, 2009.
O livro aborda a comunicação em sala de aula valorizando o estudante como protagonista do processo de aprendizagem, que interage com os colegas, o professor e a Matemática num ambiente de exploração.

LOPES, Celi Aparecida Espasandin; NACARATO, Adair Mendes (org.). *Escritas e leituras na educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.
Esses artigos abordam como a comunicação de ideias, interações, práticas discursivas, representações matemáticas, argumentações e negociações de significados podem contribuir para o ensino da Matemática.

LOPES, Marina. A escola também é lugar para falar sobre saúde mental. *In*: PORVIR. São Paulo, 30 set. 2019. Disponível em: https://porvir.org/escola-tambem-e-lugar-para-falar-sobre-saude-mental/. Acesso em: 13 jul.2020.
Esse artigo apresenta resultados de pesquisas relativas ao assunto, além de estratégias para a promoção da saúde mental nas escolas.

LUCKESI, Cipriano Carlos. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. São Paulo: Cortez, 2014.
O autor é referência em estudos sobre a avaliação da aprendizagem escolar e reuniu nesse livro um conjunto de artigos publicados por ele ao longo de anos de trabalho sobre o tema.

MÃO na massa. *In*: PORVIR. São Paulo, [201-]. Disponível em: https://porvir.org/mao-na-massa/. Acesso em: 22 maio 2020.
Nesse *site* são apresentadas diversas ferramentas e sugestões para colocar em prática as inovações e transformar a sala de aula, levando o estudante

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

a ser protagonista do processo de aprendizagem.

MORAN, José. A importância de construir projetos de vida na educação. *In*: EDUCAÇÃO TRANSFORMADORA. São Paulo, 2017. Disponível em: http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2017/10/vida.pdf. Acesso em: 26 jun. 2020.
O autor discute o que significa a construção de um projeto de vida para indivíduos e sugere alguns passos para desenvolver o projeto de vida dos estudantes na escola.

MOVIMENTO PELA BASE. [*S. l.*], [2015]. Disponível em: http://movimentopelabase.org.br/. Acesso em: 22 maio 2020.
Guias, vídeos e outros materiais que ajudam a entender a BNCC na prática.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na educação matemática*. Campinas: Mercado de Letras, 2013.
Nesse livro estão reunidos ensaios e narrativas, relatos e argumentos que discutem possibilidades de apropriação de práticas de letramento, incluindo o numeramento.

OLIVEIRA, Lérida. *Bullying*: conhecendo para combater. *In*: BRASIL. Ministério da Educação. *Portal do Professor*. [Brasília, DF], 3 jul. 2012. Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=41387. Acesso em: 13 jul. 2020.
A autora apresenta sugestão de atividades para conhecer e combater o *bullying*.

PAIS, Luiz Carlos. *Didática da Matemática*: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.
A obra apresenta os conceitos fundamentais de uma tendência que ficou conhecida como "didática francesa", desenvolvida por educadores franceses como um modo próprio de ver a educação centrada no ensino da Matemática.

PARENTE, Ra[illegible] jovens para o mercado de trabalho do futuro? *In*: PORVIR. São Paulo, 8 ago. 2018. Disponível em: https://porvir.org/como-preparar-nossos-jovens-para-o-mercado-de-trabalho-do-futuro/. Acesso em: 14 jul. 2020.
Apresenta a visão de alguns especialistas sobre as transformações que a escola precisa fazer para formar jovens com as habilidades necessárias a um mercado de trabalho cada vez mais novo.

PENSAMENTO computacional em sala de aula: muito além da programação. *In*: FUNDAÇÃO TELEFÔNICA VIVO. São Paulo, 28 nov. 2019. Disponível em: http://fundacaotelefonica.org.br/noticias/pensamento-computacional-em-sala-de-aula-muito-alem-da-programacao/. Acesso em: 22 jun. 2020.
Artigo que define o pensamento computacional e apresenta os pilares que o orientam.

PENSAMENTO computacional e programação como ferramentas de aprendizagem. *In*: INSTITUTO AYRTON SENNA. São Paulo, 13 set. 2019. Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/pt-br/meu-educador-meu-idolo/materialdeeducacao/pensamento-computacional-e-programacao-como-ferramentas-de-aprendizagem.html. Acesso em: 22 jun. 2020.
Esse artigo apresenta os elementos que caracterizam o pensamento computacional de acordo com Wing e descreve as etapas por meio das quais esse tipo de pensamento se organiza.

PERRENOUD, Philippe. *Avaliação*: da excelência à regulação das aprendizagens: entre duas lógicas. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.
O livro trata da avaliação como um problema complexo, que pode estar a serviço da aprendizagem.

PERRENOUD, Philippe. *Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.
Com base na participação na elaboração de um referencial de competências adotado em Genebra, em 1996, para formação continuada de professores, o autor elencou 10 competências necessárias à atividade docente.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1978. v. 2.
O livro apresenta a ideia de que por mais simples que seja um problema, ele desafia a curiosidade e quem o resolve pelos próprios meios coloca em jogo a criatividade e experimenta o prazer da descoberta.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
Os autores analisam, tomando como base pesquisas feitas com estudantes, de que modo as práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser levadas para a sala de aula e contribuir para a educação matemática.

PORVIR. São Paulo, 2012. Disponível em: https://porvir.org/. Acesso em: 26 jun. 2020.
Plataforma de conteúdos e mobilização sobre inovações educacionais do Brasil. Desde 2012, mapeia, produz e difunde referências para inspirar e apoiar transformações que garantam equidade e qualidade na educação a todos os estudantes brasileiros.

POZO, Juan Ignácio. *A solução de problemas*: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.
O eixo principal deste livro é a ideia de que nas diversas etapas da vida os estudantes devem adquirir não somente conhecimentos já elaborados e estruturados nas diversas disciplinas, mas habilidades e estratégias que permitam a eles aprender por si mesmos novos conhecimentos.

PREVENÇÃO ao suicídio e autolesão provocada sem intenção suicida entre adolescentes e jovens *In*: BRASIL. Ministério da Mulher, da Família e dos Direitos Humanos. [Brasília, DF], [2019]. Disponível em: https://www.gov.br/mdh/pt-br/navegue-por-temas/observatorio-nacional-da-familia/politicas-de-prevencao-ao-suicidio-e-autolesao-provocada-sem-intencao-suicida-entre-adolescentes-e-jovens. Acesso em: 26 jun. 2020.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Artigo que apresenta alguns sinais de alerta em relação à possibilidade de suicídio e, também, em linhas gerais, as políticas governamentais de prevenção.

PROJETO FUNDÃO – UFRJ. Rio de Janeiro, [201-?]. Disponível em: http://www.matematica.projetofundao.ufrj.br/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=12&Itemid=109. Acesso em: 22 maio 2020.

Nesse *site* são apresentadas as publicações do Projeto Fundão para o ensino de Matemática.

RICO, Luis. Errores y dificuldades en el aprendizaje de las matemáticas. *In*: CORE. [*S. l.*], 1995. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/12341117.pdf. Acesso em: 20 jul. 2020.

O autor analisa o papel do erro na aprendizagem da Matemática.

SEMIS, Laís. 5 ações para promover a saúde mental na escola. *Nova Escola*, São Paulo, 23 out. 2018. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/12912/5-acoes-para-promover-a-saude-mental-na-escola. Acesso em: 13 jul. 2020.

Nesse artigo são apresentadas ações que visam melhorar o clima na escola, estimular os professores e criar estratégias para lidar com casos de *bullying* e automutilação entre os estudantes.

SEMIS, Laís. O que são as competências gerais da BNCC e o que eu preciso saber sobre elas? *Nova Escola*, São Paulo, 27 fev. 2020. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/18902/o-que-sao-as-competencias-gerais-da-bncc-e-o-que-eu-preciso-saber-sobre-elas?utm_source=facebook&utm_medium=post-. Acesso em: 22 maio 2020.

Nesse artigo são apresentadas as 10 competências gerais propostas na BNCC e sua articulação com as práticas pedagógicas.

SILVA, Ana Beatriz Barbosa. *Bullying*: Cartilha 2010 – Projeto Justiça [...]. Brasília: Conselho Nacional de Justiça, 2010. Disponível em: http://www.truzzi.com.br/blog/wp-content/uploads/2010/10/Cartilha_Bullying_CNJ.pdf. Acesso em: 26 jun. 2020.

Cartilha produzida pelo Conselho Nacional de Justiça que explica como identificar e combater o *bullying* nas escolas.

SILVA NETO, Cláudio Marques da. Como combater o *bullying* na escola. *Nova Escola Gestão*, São Paulo, 6 abr. 2018. Disponível em: https://gestaoescolar.org.br/conteudo/1974/como-combater-o-bullying-na-escola. Acesso em: 7 jun. 2020.

A matéria aborda a importância e as maneiras de combater o *bullying* nas escolas, pois é um problema de saúde pública em todo o Brasil.

SMOLE, Kátia; DINIZ, Maria Ignez. *Ler e resolver problemas*: habilidades básicas para aprender Matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

A obra é referência no ensino de Matemática e tem como eixo condutor a resolução de problemas, além de contribuir para a reflexão sobre o desenvolvimento de habilidades e competências nas aulas de Matemática.

STERNBERG, R. J. *Psicologia cognitiva*. Tradução: Maria Regina Borges Osório. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2001.

Estudo sobre a psicologia cognitiva, equilibra a citação e a descrição de estudos clássicos com igual atenção às contribuições recentes ao campo.

TAVARES, Marcus. O que as escolas podem fazer para prevenir o suicídio entre os adolescentes e os jovens? *In*: TVESCOLA. Rio de Janeiro, 24 out. 2019. Disponível em: http://hotsite.tvescola.org.br/conexaoescolas/suicidio_escolas/. Acesso em: 26 jun. 2020.

Artigo da TV Escola relativo a duas pesquisas realizadas na Unifesp sobre o suicídio entre jovens.

UFF. *EMDiálogo*. Rio de Janeiro, [20--?]. Disponível em: http://www.emdialogo.uff.br/. Acesso em: 13 jul. 2020.

Portal feito por uma rede de universidades cujo objetivo é estimular debates e compartilhar conhecimentos e experiências que contribuam para a melhoria do Ensino Médio público.

VASCONCELLOS, Celso dos S. *Avaliação da aprendizagem*: práticas de mudança – por uma práxis transformadora. São Paulo: Libertad, 2003.

Nessa obra, o autor analisa as práticas concretas de avaliação da aprendizagem, por meio das representações e, sobretudo, pelas observações do cotidiano escolar.

VIOLÊNCIA escolar e *bullying*: relatório sobre a situação mundial. *In*: UNESDOC. [Paris], 2019. Disponível em: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000368092. Acesso em: 11 jun. 2020.

Publicação da Unesco que apresenta conceitos e dados acerca de situações de violência escolar, incluindo *bullying*. Rico material para discussão e para subsidiar o enfrentamento desse grave problema.

WIGGINS, Grant; MCTIGHE, Jay. *Planejamento para a compreensão*: alinhando currículo, avaliação e ensino por meio da prática do planejamento reverso. Porto Alegre: Penso Editora, 2019.

Esse livro se propõe a conduzir os professores à reflexão sobre planejamento, avaliação e ensino com o objetivo de contribuir para a promoção de uma aprendizagem mais engajadora e eficaz em qualquer etapa de ensino, seja na Educação Básica ou no Ensino Superior.

ZABALA, Antoni. *A prática educativa*: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

O livro propõe critérios que possibilitam a articulação de uma prática reflexiva e coerente. Apresenta o conceito de sequência didática e propõe o ensino segundo quatro tipos de conteúdo: factuais, conceituais, procedimentais e atitudinais. No último capítulo, aborda a avaliação em uma perspectiva formativa.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS PARA ESTE LIVRO

Neste livro, os estudantes farão um estudo da estatística descritiva por meio da interpretação e análise crítica de situações socioeconômicas. Trabalharão também a construção e análise de gráficos e diagramas estatísticos. O estudo da análise combinatória estará a serviço da resolução de problemas, levando em conta as formas de pensar de cada estudante, com a participação em discussões mediadas pela ação do professor. A resolução de problemas que envolvem experimentos e situações reais será o eixo condutor de todo o trabalho com probabilidade.

A articulação dos diversos conteúdos trabalhados ocorre por meio de atividades de investigação, exploração de situações-problema, elaboração de problemas para os colegas resolverem, discussões entre os estudantes, além da realização de pesquisa estatística. Dessa forma, trabalhando individualmente, em duplas ou em pequenos grupos, os estudantes desenvolvem as habilidades propostas na BNCC, e os objetivos definidos para cada unidade vão sendo atingidos. As [illegible] constam na seção **Conexão com o mundo** são mais uma oportunidade para que os estudantes possam colocar em ação as competências e habilidades mobilizadas ao longo de todo o livro.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Objetivos

- Utilizar a distribuição normal e as medidas de posição, de tendência central e de dispersão para analisar criticamente situações socioeconômicas.
- Elaborar e analisar gráficos e diagramas estatísticos.
- Resolver e elaborar problemas utilizando estratégias de contagem, tais como arranjo, combinação, permutação simples e permutação com repetição.
- Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo de probabilidade.

Justificativas

Voltado para a formação de jovens que vivem em um mundo cercado de informações, o tratamento adequado dos dados se faz extremamente necessário. A interpretação equivocada de dados pode resultar em tomadas de decisão equivocadas, além de conclusões, muitas vezes, incorretas sobre determinados fatos. Aliado ao tratamento de dados estatísticos, o estudo da probabilidade, bem como dos processos de contagem para a resolução de problemas, contribui para a formação de um sujeito cada vez mais autônomo, apto a fazer uma leitura adequada da realidade e a tomar decisões fundamentadas em dados confiáveis.

Conexões com outras áreas de conhecimento

Unidade 1 – Na atividade 3 da página 20, os estudantes analisam uma notícia sobre os gases responsáveis pelo efeito estufa na natureza e, com base nos dados do gráfico, redigem um pequeno texto sobre o aumento do CO_2 na atmosfera, de 2004 a 2018. Essa atividade pode ser desenvolvida com um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Na página 23, encontra-se a proposta de uma pesquisa estatística em todas as suas etapas, cujo tema será escolhido pelos estudantes e deverá estar relacionado a um assunto que esteja sendo trabalhado em outra área de conhecimento.

Unidade 3 – Há possibilidade de integração com Biologia nas páginas 118 e 119, em que são tratadas questões de genética usando probabilidade e os estudantes pesquisam esse assunto. Além disso, na seção **Para explorar** da página 119 e na atividade 6 da página 120 também são abordadas situações ligadas à Biologia. Na página 127 consta um infográfico sobre métodos contraceptivos.

Conexões & projetos – Há a possibilidade de integração com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas no Projeto 2, em que os estudantes analisam o Atlas Brasil para selecionar variáveis como expectativa de vida por município, IDH por estado em determinada região, entre outras. Além disso, acessam uma reportagem sobre o Dia da Consciência Negra e selecionam uma afirmação que reflita uma probabilidade condicional.

Temas contemporâneos transversais abordados neste livro

Educação ambiental

Na atividade 3 da página 20, os estudantes analisam uma notícia sobre os gases responsáveis pelo efeito estufa na natureza e, com base [illegible] gráfico, redigem um pequeno texto sobre o aumento do CO_2 na atmosfera, de 2004 a 2018. Na página 26, fazem um levantamento do consumo de água em suas casas e propõem atitudes para diminuir o consumo, de modo a não haver qualquer tipo de desperdício.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Educação em direitos humanos

O tema é tratado no Projeto 2 de **Conexões & projetos**, em que os estudantes analisam uma reportagem sobre o Dia da Consciência Negra e selecionam uma afirmação que reflita uma probabilidade condicional.

Educação das relações étnico-raciais e ensino de história e cultura afro-brasileira, africana e indígena

Este tema também é tratado no Projeto 2 de **Conexões & projetos**.

Saúde, vida familiar e social

Na página 127 consta um infográfico que aborda os métodos contraceptivos.

Educação para o consumo

Na seção **Para explorar** da página 38, os estudantes pesquisam o preço de um produto em pelo menos cinco lugares, calculam a variação desses preços e apontam a porcentagem da variação do menor para o maior valor.

Cronograma

Unidades	Sugestão de número de aulas
Unidade 1	22
Unidade 2	20
Unidade 3	18
Conexões & projetos	6

Essa é apenas uma referência para a distribuição das aulas. Fica a critério do professor adequar o cronograma a sua realidade e à necessidade dos estudantes.

Sugere-se ao professor reservar, em seu planejamento, um momento para a avaliação diagnóstica formativa no final de cada unidade. Com base nos resultados dos estudantes, aconselha-se a fazer adaptações no planejamento incorporando algumas aulas para a retomada das habilidades não desenvolvidas.

UNIDADE 1 Estatística descritiva

Objetivos

- Interpretar criticamente situações socioeconômicas utilizando medidas de tendência central e medidas de dispersão.
- Analisar criticamente a distribuição normal e as medidas de posição.
- Calcular e analisar medidas de tendência central (média, moda e mediana).
- Calcular e analisar medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio-padrão).
- Construir e analisar gráficos e diagramas estatísticos (histogramas, diagrama de caixa, ramos e folhas).

Justificativa

O desenvolvimento de habilidades que envolvem a estatística descritiva por meio da exploração de situações reais permite aos estudantes interpretar e compreender tanto os textos científicos quanto os que são divulgados pela mídia. Essa compreensão contribui para a tomada de decisões em situações cotidianas nos mais diversos aspectos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Competências e habilidades da BNCC trabalhadas nesta unidade

Competências gerais

Competência geral 1: A valorização dos conhecimentos historicamente construídos encontra-se logo no início da unidade, na página 13, quando os estudantes leem um texto que provoca uma reflexão sobre o modo pelo qual surge um conceito e sobre aspectos importantes relativos à história da área de conhecimento chamada da Estatística.

Competência geral 2: Nesta unidade, os estudantes desenvolvem a competência 2 ao analisarem e discutirem os processos envolvidos na representação de dados obtidos em uma pesquisa. Na seção **Para explorar** da página 19, por exemplo, eles representam alguns dados por meio de um diagrama de ramo e folhas. Em seguida, comparam essa representação com um histograma envolvendo os mesmos dados para discutir o grau de dificuldade de construção de cada gráfico e a semelhança em relação às informações que eles trazem. Dessa forma, exploram ideias, fazem conexões e interpretam dados, recorrendo assim a uma abordagem própria das Ciências.

Competência geral 4: Em várias situações propostas na unidade, os estudantes trabalham em duplas ou em grupos utilizando diferentes linguagens para se comunicar, como na seção **Para explorar** da página 17. Em grupos, eles pesquisam na mídia exemplos de diferentes tipos de gráficos e resumem as informações obtidas em uma frase, desenvolvendo assim a competência 4, já que empregam diferentes linguagens, como a oral, a escrita e a gráfica, expressa por meio de vários tipos de gráfico. Utilizam também recursos audiovisuais na apresentação aos colegas.

Competência geral 5: Em várias atividades desta unidade, os estudantes utilizam planilhas eletrônicas para tabular dados e elaborar gráficos estatísticos. Na seção **Para explorar** da página 43, por exemplo, eles trabalham em grupo para fazer um levantamento da altura dos estudantes da turma, dividir essas alturas em classes e,

usando uma planilha eletrônica, elaborar uma tabela contendo as classes de altura, a frequência e o valor médio de cada classe. Constroem então um histograma com as alturas e calculam a variância e o desvio-padrão. Em seguida, analisam a distribuição das alturas e escrevem um texto para ser apresentado à turma. Desenvolvem, dessa forma, a competência 5, uma vez que aplicam a tecnologia de forma significativa, reflexiva e ética para produzir conhecimentos, resolver problemas e disseminar informações.

Competência geral 6: Essa competência é mobilizada nas diferentes atividades desenvolvidas em duplas ou em grupos, por meio das quais os estudantes têm a oportunidade de valorizar a diversidade de saberes e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhes possibilitem entender as relações do mundo do trabalho. Esse tipo de experiência é mais intensamente vivenciado ao realizarem a pesquisa da página 23, em que escolhem um tema de outra área de conhecimento e seguem todas as etapas de uma pesquisa estatística. Eles têm, assim, a oportunidade de fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Competência geral 7: Essa competência é incentivada ao longo de toda a unidade pelo próprio assunto trabalhado. Utilizando dados estatísticos e as diversas formas de representá-los, os estudantes têm a oportunidade de argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis.

Competências gerais 9 e 10: Essas duas competências são especialmente mobilizadas no desenvolvimento da pesquisa proposta na página 23, por meio da qual os estudantes têm a oportunidade de exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, agindo pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, e tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos e solidários.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competência específica 2

EM13MAT202: Essa habilidade está contemplada na página 23. Os estudantes fazem uma pesquisa estatística envolvendo todas as etapas: problematização, planejamento, execução e análise de dados. Elaboram um relatório usando representações gráficas e textos para apresentar as conclusões.

Competência específica 3

EM13MAT316: Essa habilidade é trabalhada ao longo de toda a unidade. Os estudantes resolvem problemas em diversos contextos em que precisam calcular e interpretar medidas de tendência central: média, moda e mediana, a partir da página 24. Trabalham também as medidas de dispersão: amplitude, variância e desvio-padrão, a partir da página 35. Em diversas situações, eles elaboram problemas e desafios para os colegas resolverem, por exemplo, na página 45.

Competência específica 4

EM13MAT406: Os estudantes constroem e interpretam tabelas e gráficos de frequências com dados obtidos em pesquisa por amostras estatísticas, por exemplo, na atividade 2 da página 20.

EM13MAT407: Essa habilidade está contemplada, uma vez que os estudantes interpretam e comparam dados por meio de histogramas e do gráfico de ramo e folhas, por exemplo, nas atividades da página 20. Além disso, eles têm a oportunidade de conhecer, interpretar e utilizar os gráficos de caixa, também chamados *boxplot,* a partir da página 44.

Resoluções e comentários

Página 11

Abertura

1. Resposta pessoal, depende da pesquisa feita pelos estudantes. Espera-se que eles reflitam que esse índice mede o desenvolvimento humano de um país. Sua utilidade está na tomada de decisões dos dirigentes no sentido de melhorar a distribuição de renda, melhorar a saúde pública para aumentar a expectativa de vida e investir mais na educação (escolarização).
2. Resposta pessoal. Entretanto, espera-se que os estudantes reflitam e concluam que esse dado aponta para uma desigualdade social muito evidente em nosso país. Eles poderão encontrar dados atualizados a respeito do IDH brasileiro e confrontá-los com o dado aqui apresentado, analisando se houve melhora. Para isso, deve-se solicitar uma pesquisa, que pode ser feita na internet. Também é interessante comparar o IDH brasileiro com o IDH do estado em que os estudantes residem ou com o IDH de outros estados que compõem a região em que moram.

Página 14

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal. Espera-se que o estudante observe que, conforme o texto, os levantamentos estatísticos eram feitos no sentido da obtenção de dados numéricos.
2. Resposta pessoal. Os estudantes podem abordar, por exemplo, o uso de dados nas eleições; as maneiras tendenciosas pelas quais, muitas vezes, os dados são apresentados para favorecer um grupo de acordo com interesses de uma pessoa ou de outro grupo; as *fake news*, entre outros.
3. Sim. Graunt elaborou uma "tábua de vida rudimentar", com base na sobrevivência das pessoas de 6 a 76 anos. Nesse sentido, havia uma preocupação com a expectativa de vida.
4. Curiosidade.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 16

Para explorar

Respostas pessoais. Os estudantes devem ser incentivados a elaborar, para essa seção, perguntas cujas respostas permitam ampliar o conhecimento sobre as variáveis qualitativas e as variáveis quantitativas para que possam internalizar o significado delas. Outro ponto importante é a reflexão sobre questões bem formuladas, as quais possibilitam conhecer mais nossa realidade.

Página 17

Para explorar

Resposta pessoal. Os estudantes já trazem do Ensino Fundamental uma bagagem a respeito dos gráficos estatísticos aqui mencionados. O que precisa ser feito cada vez mais é conduzi-los, por meio de atividades exploratórias, à análise das informações desses gráficos. Mencione que essa é uma habilidade que as grandes empresas procuram em profissionais: capacidade de ler e interpretar gráficos e, com base neles, fazer pequenos comentários orais ou escritos sobre o que está sendo analisado.

Página 18

Para pensar e discutir

1. Espera-se que os estudantes compreendam que nesse diagrama o "tamanho" das folhas indica que, na faixa de 40 anos, há mais pessoas reunidas (44 anos, 46 anos, 48 anos e 48 anos).
2. Repete-se o algarismo 2 no ramo 8.
3. Abaixo do 9 indicaríamos, na coluna da esquerda, o número 10 e, à direita, nas folhas, colocaríamos o número 2.

Para pensar e discutir

1. São os seguintes quartos: 40, 43, 45, 47 e 48.
2. O 6º andar. A taxa de ocupação é de 100% dos quartos do andar.
3. São três possibilidades: 3º andar (há 8 quartos vagos), 7º andar (há 7 quartos vagos) ou 8º andar (há 9 quartos vagos).

Página 19

Para explorar

1.

2	0 0 1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 7 8 9
3	0 0 0 0 1 1 2 2 3 3 4 5 6 7 7 8 9 9 9
4	0 0 1 2 2 3 4 5 8 8 8 9
5	2 3 7

2. Resposta pessoal. Espera-se que o estudante seja capaz de fazer o gráfico utilizando uma planilha eletrônica.

As respostas das questões 3 e 4 são pessoais, entretanto, espera-se que os estudantes observem que a vantagem da construção do diagrama de ramo e folhas é a simplicidade de apresentação. Ambos os tipos de representação possibilitam uma análise satisfatória e direta da distribuição de frequências dos dados.

Página 20

Atividades

Recomendamos que essas atividades sejam todas feitas em sala de aula, pois elas exigem o trabalho em dupla ou com a turma toda para um desenvolvimento satisfatório.

1.

Altura (cm)	Frequência absoluta	Frequência relativa
[150;155[	2	4%
[155;160[	6	12%
[160;165[	10	20%
[165;170[	5	10%
[170;175[	4	8%
[175;180[	6	12%
[180;185[	12	24%
[185;190[	5	10%
Total	**50**	**100%**

2. Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal. É esperado que os estudantes observem que, de 2004 a 2018, houve um crescimento de cerca de 8%. Já se compararmos com a era pré-industrial, o crescimento é de aproximadamente 32%. A ideia dessa atividade é apresentar uma notícia de jornal para que o estudante possa iniciar um trabalho de análise dos dados. Aqui temos um gráfico de linha.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

4. **a)** 65 anos

b) 33 anos, pois aparece 4 vezes

c) Frequência absoluta: 14.

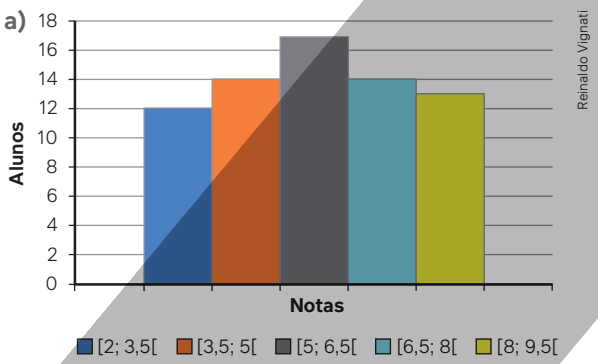
Frequência relativa: $\frac{14}{40} = 0{,}35 = 35\%$.

5. Resposta pessoal. Os estudantes, em duplas (ou a turma toda), deverão elaborar um levantamento de informações que envolva alguma variável a ser pesquisada e representada por meio do diagrama de ramo e folhas. Para esse tipo de atividade, deve-se destinar um tempo maior ou, ainda melhor, reservar uma aula inteira.

6. O estudante deverá descobrir que a frequência acumulada é a soma da frequência da 2ª classe de notas com a frequência da classe anterior (1ª classe). Então: $F_{Ab2} = 26 - 12 = 14$.

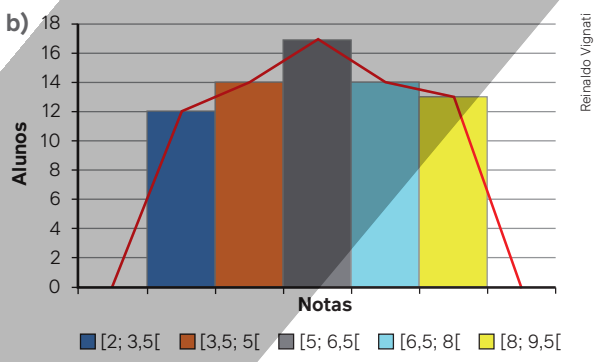
Alternativa **a**.

7. **a)**



Reinaldo Vignati

b)



Reinaldo Vignati

Página 22

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal. Entretanto, esse não é um dado relevante, pois é de se esperar que todas as casas tenham 1 fogão.

2. Resposta pessoal. O número de banheiros pode representar um dado importante. Casas com 1 banheiro indicam certo grau de situação econômica completamente diferente de casas com 2 ou mais banheiros.

3. Resposta pessoal. Uma pergunta que serve como indicador de situação socioeconômica diz respeito à quantidade de aparelhos de TV ou à quantidade de computadores que há em uma casa.

Página 23

Pesquisa estatística

Aqui temos a oportunidade de conduzir os estudantes a valorizar a Estatística para a produção de informações a respeito da comunidade. Sugerimos que esse tópico seja inicialmente lido coletivamente, discutindo-se a importância de cada etapa de uma pesquisa. Em seguida, em grupos, eles devem refletir sobre a "variável" ou "o problema" a ser pesquisado.

É essencial que a apresentação dos resultados da pesquisa seja um evento com a presença de todos os estudantes. Deseja-se, de fato, levantar questões interessantes para que, com base nelas, seja possível, entre outras ações, tomar ou sugerir medidas para finalmente atuar na comunidade, por exemplo.

Página 24

Para pensar e discutir

1. Sejam M_A e M_B a média aritmética de pontos do jogador A e do jogador B, respectivamente.

   $M_A = \frac{22 + 23 + 20 + 19 + 21}{5} = \frac{105}{5} = 21$

   Logo, o jogador A fez em média 21 pontos por jogo.

   $M_B = \frac{34 + 12 + 10 + 35 + 22 + 13}{6} = \frac{126}{6} = 21$

   Logo, o jogador B fez em média 21 pontos por jogo.

   Portanto, os dois jogadores têm a mesma média de pontos por jogo.

2. Resposta pessoal. Um técnico, por exemplo, pode escolher um jogador tanto pela regularidade (jogador A) como pelo desempenho, mesmo que ele não seja regular.

Página 25

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal. Observe como o IBGE calcula (resposta a seguir).
2. Resposta pessoal. O IBGE define o rendimento domiciliar *per capita* como a soma de renda de cada morador dividida pelo total de residentes. Considera pensionistas, domésticos e familiares inclusos no cálculo.
3. Resposta pessoal. A análise do estudante provavelmente será relacionada à comparação entre as rendas dos estados e territórios com a média nacional. Ele também pode observar a renda *per capita* dos extremos dessa distribuição: Brasília e Maranhão. Brasília tem uma renda *per capita* muito alta em relação aos demais estados. Note que acima da média brasileira estão apenas sete estados e o Distrito Federal.

Página 26

Para pensar e discutir

1. A média não corresponde a qualquer um dos consumos. Entretanto, poderia ser também um desses valores.
2. Total de consumo nos 10 meses considerados:

   $44 + 40 + 44 + 42 + 39 + 34 + 30 + 22 + 21 + 38 = 354$

   Multiplicando a média de consumo por 10, obtemos:

   $10 \cdot M_a = 10 \cdot 35,4 = 354$

   Portanto, multiplicando a média de consumo por 10, obtemos o total de consumo em metros cúbicos nos 10 meses considerados.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

3. Diminuindo 5 metros cúbicos em cada mês, obtemos os seguintes valores:

6/19	7/19	8/19	9/19	10/19	11/19	12/19	1/20	2/20	3/20
39	35	39	37	34	29	25	17	16	33

   $M_a = \frac{39 + 35 + 39 + 37 + 34 + 29 + 25 + 17 + 16 + 33}{10} = \frac{304}{10} = 30,4$

   Portanto, diminuindo 5 metros cúbicos em cada mês, a média diminuirá também 5 metros cúbicos, ou seja, a nova média será de 30,4 m^3 por mês.

Para pensar e discutir

1. O cálculo feito para a média aritmética está correto.
2. Resposta pessoal. Entretanto, espera-se que os estudantes percebam que essa média aritmética em reais está muito distante da quantia que a maioria do grupo tem (2 reais).

Página 27

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal. Entretanto, espera-se: a nota 6 se repetiu 180 vezes.
2. Sim. Embora a resposta seja pessoal, poucas pessoas deram nota 10 entre 1000. Assim, essas 4 notas acabam não interferindo significativamente em 1000 notas, alterando pouco a média. "Peso", nesse caso, pode ser atribuído ao significado de importância no resultado.
3. Sim. A justificativa é pessoal, mas pode ser dada com base no próprio exemplo.

Páginas 27-28

Para explorar

1.

Altura	Frequência absoluta	Média da classe
[1,39; 1,48[	4	1,435
[1,48; 1,57[	9	1,525
[1,57; 1,66[	11	1,615
[1,66; 1,75[	8	1,705
[1,75; 1,84[	5	1,792
[1,84; 1,93[	3	1,885
Total	**40**	

2. Como a variável está apresentada em faixas de valores, não temos os valores efetivamente observados. Portanto, não podemos aplicar as fórmulas da média. Para contornar essa situação e obter resultados aproximados para a medida desejada, tomemos como representante de cada faixa seu ponto médio.

$$M_p = \frac{4 \cdot 1{,}435 + 9 \cdot 1{,}525 + 11 \cdot 1{,}615 + 8 \cdot 1{,}705 + 5 \cdot 1{,}792 + 3 \cdot 1{,}885}{4 + 9 + 11 + 8 + 5 + 3} =$$

$$= \frac{5{,}74 + 13{,}725 + 17{,}765 + 13{,}64 + 8{,}96 + 5{,}655}{40} = \frac{65{,}485}{40} \Rightarrow M_p \cong 1{,}64$$

3. Espera-se que os alunos, utilizando os conceitos da unidade, cheguem à fórmula: $M_p = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot m_i$

Outro exemplo de [illegible]:

- Calcular a média de cada classe.
- Multiplicar a média de cada classe pela respectiva frequência absoluta.
- Somar todos os produtos.
- Dividir a soma pela frequência absoluta total.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 28

Atividades

Na **atividade 1**, os estudantes utilizarão a média aritmética como forma de verificar a temperatura média em determinado dia na Região Norte do Brasil. Já na **atividade 2**, terão de analisar as informações a respeito do índice de Gini quanto à distribuição do rendimento domiciliar *per capita*. Incentive-os a pesquisar um pouco mais esse importante índice social.

1. **a)** Sim. A temperatura de 32 °C aparece 6 vezes na distribuição.

b) $M_p = \frac{2 \cdot 30 + 5 \cdot 31 + 6 \cdot 32 + 4 \cdot 33 + 34 + 36}{19} = \frac{609}{19} \cong 32{,}1$

Portanto, a média das temperaturas é, aproximadamente, 32 °C.

c) Sim. Isso pode ser justificado (aqui, ainda de forma intuitiva) devido ao fato de que a temperatura de 32 °C é a mais frequente. É a ideia de **moda** como medida de tendência central, que ainda será estudada nesta unidade.

2. **a)** Resposta pessoal. Entretanto, espera-se que os estudantes percebam que esse índice pode ser utilizado como forma de verificar as desigualdades sociais. Ele varia de zero a 1. O valor zero representa a situação de igualdade, em que todos têm a mesma renda. O valor 1 representa o oposto, isto é, em determinada população, uma pessoa concentraria toda a riqueza.

b) $M_a = \frac{0{,}540 + 0{,}533 + 0{,}526 + 0{,}524 + 0{,}537 + 0{,}538 + 0{,}545}{7} = \frac{3{,}743}{7} \cong 0{,}535$

A média é, aproximadamente, 0,535. Nos anos 2012, 2016, 2017 e 2018 os índices ficaram acima da média.

Página 29

Para pensar e discutir

1. Espera-se que os estudantes indiquem que o valor 2 reais é o que representa mais adequadamente o conjunto de valores do grupo, pois, dos 6 valores, ele aparece 4 vezes.
2. Resposta pessoal. Provavelmente esse grupo de estudantes está na mesma faixa de idade. Sendo assim, a média aritmética das idades deve ser muito próxima da idade mais frequente. Se isso de fato ocorrer, tanto a média aritmética das idades quanto a idade mais frequente representam a idade, em média, do grupo.

Para explorar

Por se tratar de uma atividade coletiva, a turma precisa ser organizada para isso. Sugerimos que todos os estudantes permaneçam sentados enquanto alguém anota na lousa as informações necessárias para a primeira etapa da atividade. Com base nessas informações, eles poderão responder adequadamente ao que se pede na segunda etapa. A terceira etapa exigirá uma discussão coletiva em que se buscarão exemplos nos quais a moda seja mais representativa do que a média aritmética.

Página 30

Para pensar e discutir

1. A moda é igual a 15 anos, pois aparece 20 vezes na distribuição.
2. Resposta pessoal. Note que, observando as idades, a diferença é muito pequena. Não há distorções, por exemplo, uma idade muito maior ou menor em relação à maioria das idades dos estudantes. Assim, a moda tende a ficar próxima da média das idades.

Página 31

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir

1. A moda é a quantidade 24, que aparece 6 vezes ao todo.
2. Embora não exista uma posição central (número de termos é par), podemos dizer que são dois valores iguais a 23 que ocupam as posições centrais da distribuição. A média aritmética dos valores centrais é 23.
3. $M_p = \frac{11 + 16 + 3 \cdot 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 2 \cdot 22 + 4 \cdot 23 + 6 \cdot 24 + 3 \cdot 25}{24} = \frac{511}{24} \cong 21{,}29$

   Portanto, a média aritmética é 21,29. Não é o mesmo valor.
4. Não. Mesmo que se queira colocar a média aritmética entre os valores, isso não é correto, uma vez que a média aritmética não representa efetivamente um valor que corresponda à quantidade de livros, pois não é um número natural.

Para pensar e discutir

1. $M_a = \frac{5 + 6 + 7 + 10 + 12 + 14 + 16 + 22 + 26 + 32 + 34 + 36 + 70}{13} = \frac{290}{13} \cong 22$

   Portanto, a média das idades é aproximadamente 22 anos.
2. Não. O estudante deve notar que essa idade média estaria à direita da posição central, evidenciando que a idade 70 anos tem um "peso maior" nessa distribuição.

Página 33

Para explorar

Resposta pessoal. Essa é uma atividade de pesquisa que envolve as três medidas de tendência central: média, moda e mediana. Não é algo simples de ser pesquisado, pois exige a observação e a escolha de exemplos envolvendo tais medidas. Recomendamos que os estudantes sejam conduzidos a pesquisar em livros de Estatística ou em fontes seguras. Eles terão aqui a oportunidade de conhecer um pouco a "curva normal de distribuição". Além disso, poderão observar, por meio de exemplos a serem coletados, quando essa curva assume uma ou outra das três formas apresentadas.

Sugerimos que essa atividade faça parte da avaliação da unidade.

Página 34

Atividades

Como essas atividades relacionam as três medidas de tendência central até agora abordadas, sugerimos que sejam conduzidas para resolução individual como forma de verificação de aprendizagem. Algumas delas podem ser encaminhadas como tarefa.

1. **a)** $M_p = \dfrac{2 \cdot 21 + 2 \cdot 22 + 6 \cdot 23 + 7 \cdot 24 + 2 \cdot 25}{19} = \dfrac{442}{19} \cong 23{,}3$

Portanto a média das temperaturas é, aproximadamente, 23 °C.

b) A moda é 24 °C, pois aparece 7 vezes na distribuição.

c)

21	21	22	22	23	23	23	23	23	**23**	24	24	24	24	24	24	24	25	25

Portanto, a mediana é 23 °C, pois é o termo que o ocupa a posição central.

d) Resposta pessoal. Entretanto, observe que essas três medidas estão muito próximas. Assim, qualquer uma delas poderia ser utilizada adequadamente, sem maiores problemas, para representar o grupo de temperaturas.

2. Média: $M_a = \dfrac{15 + 17 + 21 + 25 + 25 + 29 + 33 + 35}{8} = \dfrac{200}{8} = 25$

Mediana: $M_e = \dfrac{25 + 25}{2} = 25$

Moda: $M_o = 25$

Portanto, a média, a mediana e a moda são respectivamente 25, 25 e 25.

Alternativa **d**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

3. **a)** Na tabela, o número de policiais é:

$12 + 15 + 25 + 15 + 10 + 8 = 85$

b) Média: $M_p = \dfrac{12 \cdot 25 + 15 \cdot 28 + 25 \cdot 30 + 15 \cdot 33 + 10 \cdot 35 + 8 \cdot 40}{85} = \dfrac{2\,635}{85} = 31$

Mediana: (42 termos), (termo central), (42 termos) $\Rightarrow M_e = 30$

Moda: 30 aparece 25 vezes $\Rightarrow M_o = 30$

Como a moda é 30 anos e a mediana também, 30 anos é a idade que representa esse grupo de pessoas.

4. Segundo o enunciado, no grupo de basquete há uma pessoa a mais do que no grupo de futebol. Seja x o número de estudantes que jogam futebol e $x + 1$ o número de estudantes que jogam basquete. Assim, o total de estudantes é: $x + x + 1 = 2x + 1$.

Notemos que $2x + 1$ é um número ímpar. Então, a mediana é um único elemento, ou seja, 1,67 m é a mediana, que é também a altura de *F*. Assim, os estudantes com altura inferior a 1,67 m jogarão futebol e os com altura superior ou igual a 1,67 m jogarão basquete.

Logo, *P* e *J* jogam futebol, e *F* e *M* jogam basquete.

Alternativa **c**.

5. Mediana: $M_e = \frac{(20º \text{ termo}) + (21º \text{ termo})}{2} = \frac{34 + 34}{2} = 34$

Moda: 33 aparece 4 vezes $\Rightarrow M_o = 33$

Assim, $M_e + M_o = 34 + 33 = 67$.

Alternativa **a**.

6. Sendo x e y o número de pessoas atendidas na sexta-feira e no sábado, respectivamente, temos:

$$\frac{20 + 17 + 16 + 19 + x + y}{6} = 21$$

$x + y = 54$

Como a moda é maior que 20, temos que $x = y$.

Logo, $x = y = 27$

Página 35

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal. Nessa questão, o estudante pode dizer que, das três cidades, aquela com maior temperatura média é Uruguaiana. Também pode dizer que as cidades de Pelotas e Dom Pedrito, nesse dia, apresentaram, na previsão, a mesma temperatura média.
2. Resposta pessoal. É esperado, entretanto, que alguns dos estudantes observem que, apesar de as duas cidades terem apresentado a mesma temperatura média, a cidade de Pelotas tem maior amplitude térmica, isto é, maior diferença entre os valores mínimo e máximo.

Página 36

Para pensar e discutir

1. Resposta depende da capital e do dia pesquisado.
2. Resposta depende da pesquisa. Entretanto, constata-se que, nos desertos, a amplitude térmica diária é muito elevada, pois durante o dia a temperatura máxima pode ficar em torno de 45 °C, e à noite pode cair drasticamente, com a mínima próxima de 0 °C. Essa alta amplitude térmica se deve ao tipo de relevo e vegetação da região, além do clima e de massas de ar que normalmente atuam nela.

Página 37

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Atividades

As três atividades aqui são de resolução imediata com base no conhecimento do conceito de amplitude. Na **atividade 1**, os estudantes deverão, inicialmente, pesquisar a previsão das temperaturas mínima e máxima da cidade onde moram ao longo de sete dias. Essa pesquisa pode ser feita diretamente com o auxílio de *smartphone*.

Já a **atividade 2** aborda a análise das temperaturas na capital da região em que os estudantes moram. Também aqui será necessário uma pesquisa. Sugerimos que essa atividade seja encaminhada para resolução individual como forma de verificação de aprendizagem.

1. Respostas pessoais, dependem das temperaturas previstas e indicadas pelo estudante.
2. Respostas pessoais, dependem das temperaturas pesquisadas.
3. **a)** $M_p = \frac{2 \cdot 14 + 4 \cdot 16 + 4 \cdot 17 + 18 + 2 \cdot 19 + 25 + 30 + 31 + 32 + 33 + 35 + 36 + 37 + 2 \cdot 39 + 40 + 41}{25}$

$M_p = \frac{634}{25} \cong 25$

Portanto, a média é de, aproximadamente, 25 anos.

b) (14, 14, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 18, 19, **19**, 25, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 39, 39, 40, 41)

$M_e = 19$ anos

16 e 17 aparecem 4 vezes cada $\Rightarrow M_o = 16$ e $M_o = 17$

O evento é bimodal.

$AT = 41 - 14 = 27$

Portanto, a amplitude é 27 anos.

c) Espera-se que o estudante conclua que não é homogênea. A amplitude é muito alta. Observe, por exemplo, que a amplitude é bem maior do que a moda e a mediana.

Página 38

Para explorar

Resposta pessoal. Essa pesquisa possibilita aos estudantes valorizar o hábito de pesquisar valores de determinados produtos antes da compra. A diferença entre os valores de um mesmo produto, com as mesmas características, algumas vezes pode ser acentuada. É sob esse ponto de vista que os estudantes devem ser incentivados a desenvolver a atividade.

Página 39

Para pensar e discutir

1. É a média aritmética da soma dos quadrados das diferenças entre cada nota e a média aritmética.
2. $AT_A = 8 - 4 = 4$

   $AT_B = 9 - 4 = 5$

   $AT_C = 9 - 5 = 4$

   $AT_D = 8 - 4 = 4$

   Portanto, entre as notas obtidas nas quatro etapas, a amplitude das notas dos candidatos *A*, *C* e *D* é menor.
3. Resposta pessoal. Espera-se que o estudante perceba que o candidato *A* obteve a menor variância ($V_A = 2$) e que a variância indica o quão distante está cada valor da média. Quanto menor a variância, mais próximos os valores estão da média e, quanto maior a variância, mais distantes os valores estão da média.

Página 41

Para pensar e discutir

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1. Em alguns casos, é possível. Um exemplo é o dos dois jogadores *A* e *B* de basquete em relação ao número de pontos por partida. Dos dois, pode-se dizer que o número de pontos por partida do jogador *A* está próximo ao valor da média de pontos por partida. Isso não ocorre com o jogador *B*. Entretanto, nem sempre é possível: basta considerar os casos em que os valores não deixam evidente a proximidade ou o afastamento deles em relação à média.
2. Resposta pessoal. Espera-se que o estudante conclua que isso significa que a distribuição de valores é mais homogênea.
3. Resposta pessoal. Espera-se que o estudante perceba que, embora ambas sejam medidas de dispersão, o desvio-padrão é expresso na mesma unidade das variáveis.

Página 42

Para pensar e discutir

1. Os extremos de cada classe. O valor médio é a soma dos valores extremos dividida por 2.
2. Resposta pessoal. Espera-se que o estudante perceba que foi utilizada a média aritmética ponderada com os valores médios das classes.
3. Resposta pessoal. Observando que o desvio-padrão é de, aproximadamente, 40 cm em relação à diferença entre a altura das pessoas. Esse valor indica que a distribuição das alturas desses estudantes não é homogênea.

Página 43

Para explorar

Reposta pessoal. Embora a instrução seja para conduzir essa atividade em pequenos grupos, ela requer a informação da altura de todos os estudantes da turma. Sugerimos que, inicialmente, cada um informe sua altura enquanto alguém organiza os dados na lousa. Somente então, nos respectivos grupos, eles deverão proceder com as etapas solicitadas envolvendo cálculos e planilhas eletrônicas para a resolução completa.

Atividades

Para facilitar o desenvolvimento das duas atividades, sugerimos que ambas sejam encaminhadas para resolução em duplas (como indicado na atividade 2) e com discussão de respostas e encaminhamentos coletivos no final.

1. a) $AT_{\text{Adriana}} = 15 - 8 = 7$

$AT_{\text{Carlos}} = 12 - 8 = 4$

$AT_{\text{Joana}} = 16 - 10 = 6$

$AT_{\text{Antônio}} = 12 - 8 = 4$

É possível observar, nos valores, maior regularidade quanto ao número de reclamações diárias recebidas pelos atendentes Carlos e Antônio. Observa-se isso, por exemplo, pela amplitude desses valores. Ambos têm amplitude 4, ao passo que os outros dois atendentes têm amplitude maior.

b) Com base na amplitude, isso não é possível. Para responder a essa questão, deve-se obter a variância ou o desvio-padrão.

c) Média de Adriana: $M_a = \frac{8 + 12 + 15 + 9 + 11}{5} = \frac{55}{5} = 11$

Média de Carlos: $M_a = \frac{11 + 10 + 8 + 11 + 12}{5} = \frac{52}{5} = 10{,}4$

Média de Joana: $M_a = \frac{15 + 12 + 16 + 10 + 11}{5} = \frac{64}{5} = 12{,}8$

Média de Antônio: $M_a = \frac{10 + 9 + 11 + 12 + 8}{5} = \frac{50}{5} = 10$

Médias – Adriana: 11 chamadas por dia; Carlos: 10,4 chamadas por dia; Joana: 12,8 chamadas por dia; Antônio: 10 chamadas por dia.

d) Desvio-padrão de Adriana:

$V = \frac{(8 - 11)^2 + (12 - 11)^2 + (15 - 11)^2 + (9 - 11)^2 + (11 - 11)^2}{5} = \frac{30}{5} = 6$

$Dp = \sqrt{V} \Rightarrow Dp = \sqrt{6} \cong 2{,}45$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Desvio-padrão de Carlos:

$V = \frac{(11 - 10{,}4)^2 + (10 - 10{,}4)^2 + (8 - 10{,}4)^2 + (11 - 10{,}4)^2 + (12 - 10{,}4)^2}{5} = \frac{9{,}2}{5} = 1{,}84$

$Dp = \sqrt{V} \Rightarrow Dp = \sqrt{1{,}84} \cong 1{,}36$

Desvio-padrão de Joana:

$V = \frac{(15 - 12{,}8)^2 + (12 - 12{,}8)^2 + (16 - 12{,}8)^2 + (10 - 12{,}8)^2 + (11 - 12{,}8)^2}{5} = \frac{26{,}8}{5} = 5{,}36$

$Dp = \sqrt{V} \Rightarrow Dp = \sqrt{5{,}36} \cong 2{,}32$

Desvio-padrão de Antônio:

$V = \frac{(10 - 10)^2 + (9 - 10)^2 + (11 - 10)^2 + (12 - 10)^2 + (8 - 10)^2}{5} = \frac{10}{5} = 2$

$Dp = \sqrt{V} \Rightarrow Dp = \sqrt{2} \cong 1{,}41$

Desvios-padrão – Adriana: 2,45 chamadas por dia; Carlos: 1,36 chamada por dia; Joana: 2,32 chamadas por dia; Antônio: 1,41 chamada por dia.

e) Resposta pessoal. Espera-se que o estudante conclua que Adriana atende em média 11 chamadas diariamente, com 2,45 chamadas para mais ou para menos; Carlos atende em média 10,4 chamadas diariamente, com 1,36 chamada para mais ou para menos; Joana atende em média 12,8 chamadas diariamente, com 2,32 chamadas para mais ou para menos; Antônio atende em média 10 chamadas diariamente, com 1,41 chamada para mais ou para menos.

2. Resposta pessoal.

Página 45

Para pensar e discutir

1. Espera-se que os estudantes percebam que os menores valores se encontram bem concentrados, pois 25% dos dados estão entre 5 e 7. Isso fica evidenciado pelo comprimento da haste inferior, que é bem curta. Já os maiores valores, 25% deles são bem espalhados, o que fica claro pelo comprimento da haste superior, bastante longa. Dentro da caixa, no quarto que contém os menores valores, que vão do primeiro quartil até a mediana, estes estão bem mais concentrados do que no quarto que contém os maiores valores, que vai da mediana até o terceiro quartil. Incentive-os a discutir seus textos em duplas ou em pequenos grupos. Depois, encaminhe uma discussão com toda a turma.

2. Os estudantes podem esboçar os mais diversos tipos de diagrama variando o comprimento das hastes, colocando *outliers*, variando a posição da mediana. Valorize essa atividade. Ela promove a consolidação da habilidade de leitura desse tipo de gráfico, que, provavelmente, é uma novidade para os estudantes, ao mesmo tempo que desenvolve a argumentação, a autoestima, o confronto de pontos de vista e o respeito pela opinião do outro, habilidades fundamentais para a educação integral.

Página 46

Para explorar

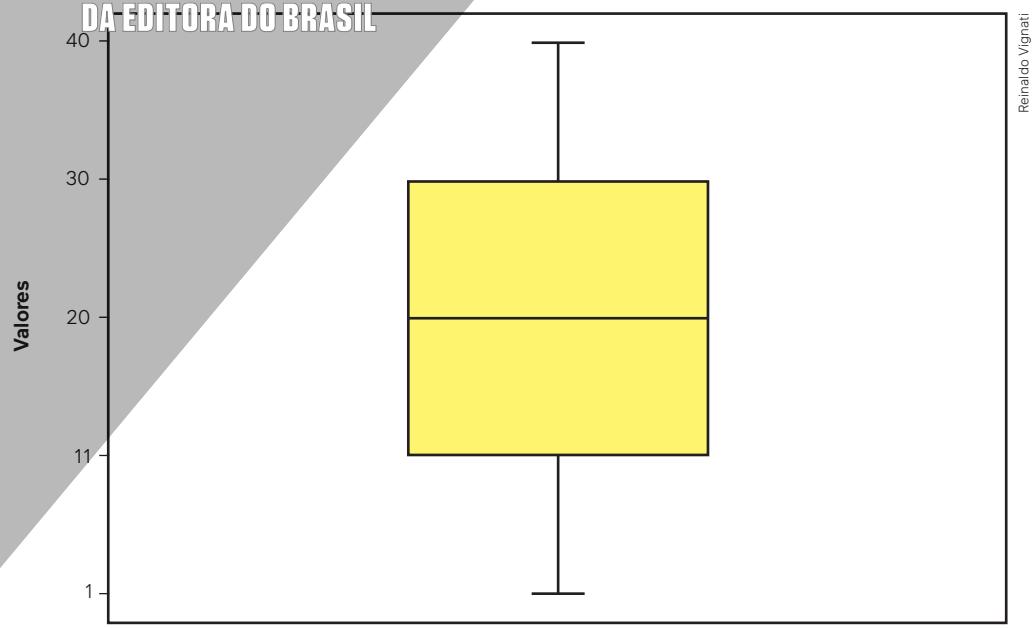
Exemplo de resposta:

Conjunto *A*:

1	4	6	8	10	12	14	16	18	20	20	24	26	28	30	30	34	36	38	40

$Q_2 = M_e = \frac{20 + 20}{2} = 20$; $Q_1 = \frac{10 + 12}{2} = 11$; $Q_3 = \frac{30 + 30}{2} = 30$; limite superior = 40; limite inferior = 1

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

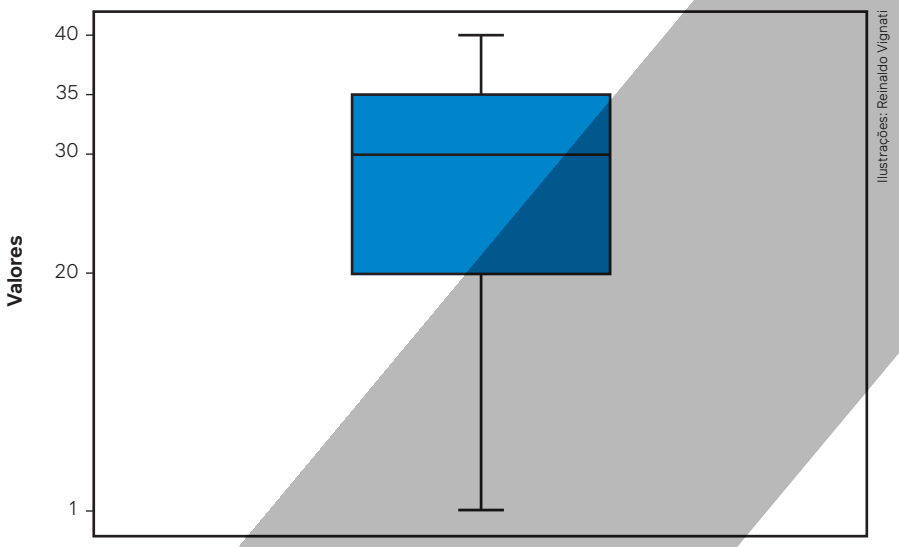


Reinaldo Vignati

Conjunto *B*:

1	1	3	3	20	20	22	23	25	30	30	30	31	31	35	35	35	36	36	40

$Q_2 = M_e = \frac{30 + 30}{2} = 30$; $Q_1 = \frac{20 + 20}{2} = 20$; $Q_3 = \frac{35 + 35}{2} = 35$; limite superior = 40; limite inferior = 1

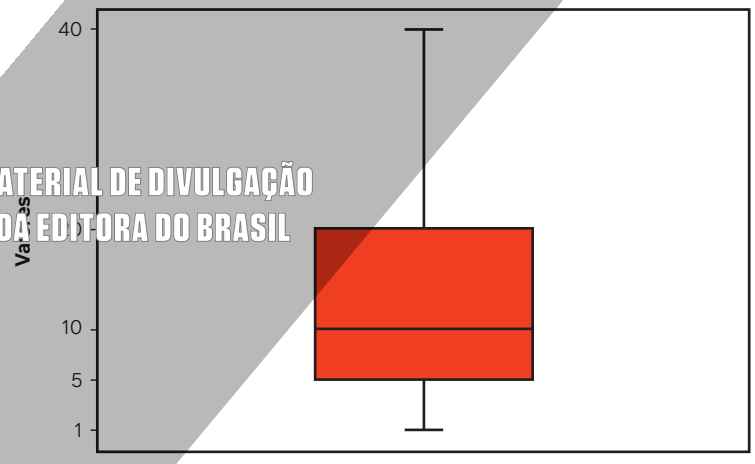


Ilustrações: Reinaldo Vignati

Conjunto *C*:

1	2	4	4	5	5	6	6	8	10	10	12	12	13	20	20	25	30	35	40

$Q_2 = M_e = \frac{10 + 10}{2} = 10$; $Q_1 = \frac{5 + 5}{2} = 5$; $Q_3 = \frac{20 + 20}{2} = 20$; limite superior = 40; limite inferior = 1



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

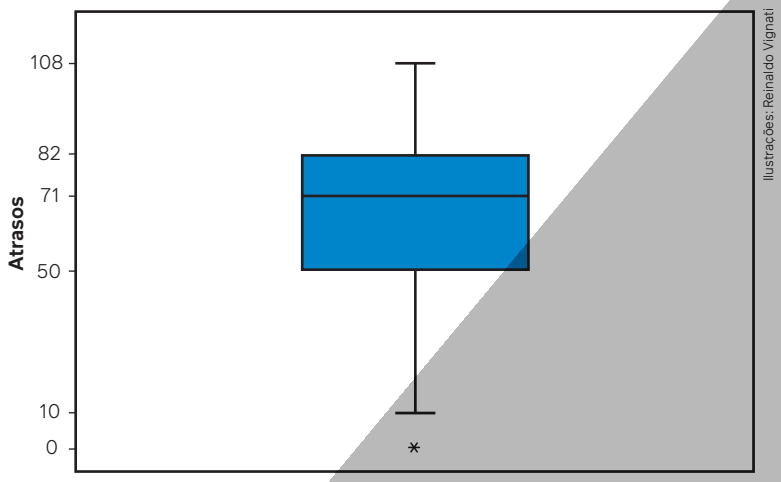
Para pensar e discutir

1. Falsa, pois cada caixa representa a proficiência de 50% dos estudantes de cada escola, sendo 25% abaixo da mediana e 25% acima da mediana.
2. Verdadeira, pois a barra inferior se encontra representada entre esses dois valores.
3. Verdadeira, pois a proficiência de 25% dos estudantes da escola A está entre 1320 e 1380, valores que são atingidos apenas por 5 estudantes da Escola B, representados por *outliers,* o que significa que não representam todo o grupo da escola.
4. Verdadeira, pois os dados da Escola B estão mais concentrados do que os dados da Escola A.
5. Verdadeira, pois não há *outliers* abaixo dos níveis inferiores em nenhuma das duas escolas.

Página 47

Para explorar

Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes construam um *boxplot*.



Ilustrações: Reinaldo Vignati

Respostas para os valores principais:
Limite inferior: 10; $Q_1 = 50$; $Q_2 = M_e = 71$; $Q_3 = 82$; limite superior = 108.
Há um *outlier,* o valor é zero.

Atividades

Sugerimos que as duas primeiras atividades sejam resolvidas individualmente, como forma de verificação de aprendizagem. Será necessário destinar um pouco mais de tempo a elas, pois a construção do gráfico *boxplot* exige, no início, certa concentração para determinar os elementos que vão compô-lo.

Já a terceira atividade, proposta para resolução em duplas, está dividida em três etapas. A resolução em duplas facilita a troca de informações e impressões sobre procedimentos.

1. O *boxplot* é um gráfico feito com base no resumo de cinco números, constituído por:
valor mínimo, 1º quartil (Q_1), mediana (Q_2), 3º quartil (Q_3) e valor máximo.
Alternativa **a**.

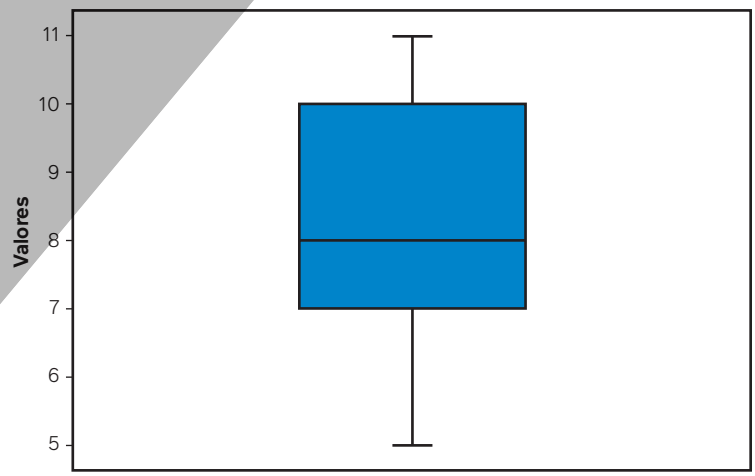
2.

5	6	7	8	8	8	9	10	10	10	11	11

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

a) $Q_2 = M_e = \frac{(7^{\text{a}}\text{ termo}) + (8^{\text{a}}\text{ termo})}{2} = \frac{8 + 8}{2} = 8$; $Q_1 = 7$; $Q_3 = 10$;
limite superior = 11; limite inferior = 5.

b)



3. **1ª parte**

Fornecedor *A*:

73,34	73,6	74,04	74,85	75,00	75,33	75,47	75,93	76,16	76,95

$Q_2 = Me = \frac{(5º \text{ termo}) + (6º \text{ termo})}{2} = \frac{75 + 75,33}{2} = 75,165$; $Q_1 = 74,04$; $Q_3 = 75,93$;

limite superior = 76,95; limite inferior = 73,34.

2ª parte

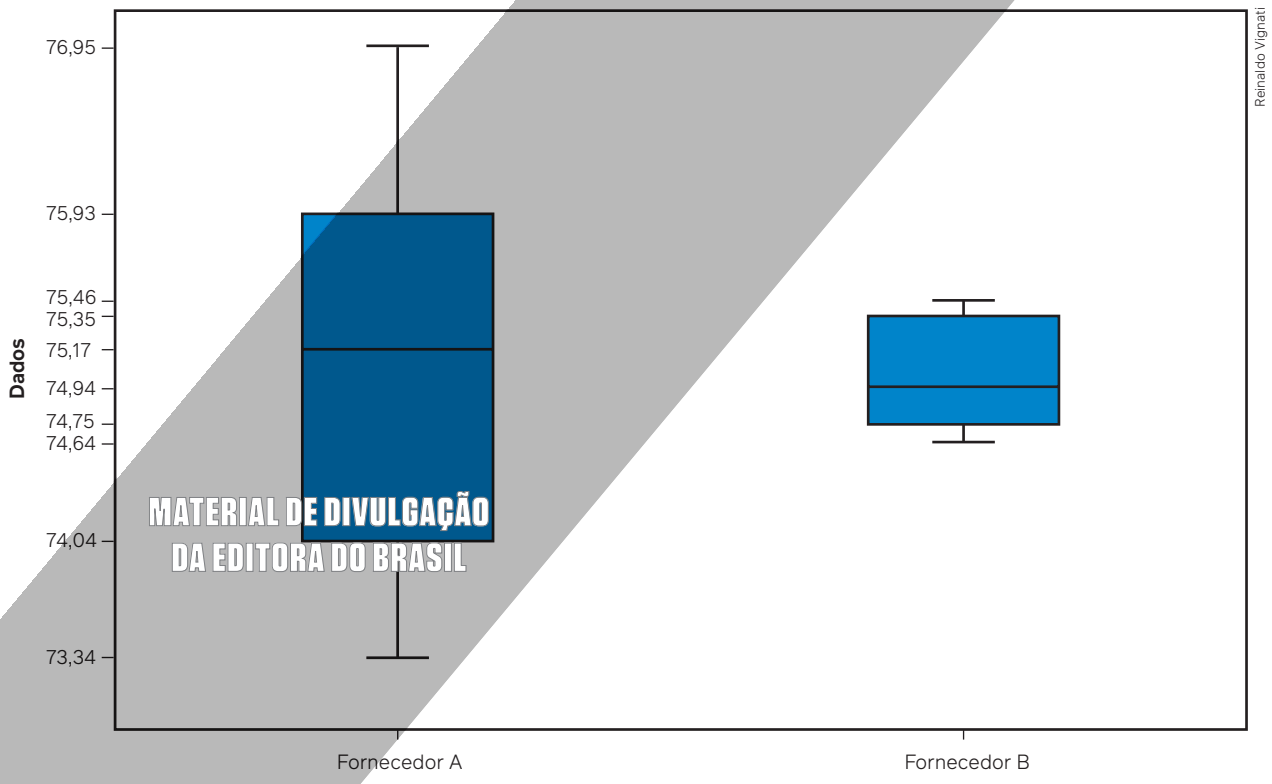
Fornecedor *B*:

74,62	74,65	74,75	74,92	74,94	74,94	75,25	75,35	75,44	75,46

$Q_2 = Me = \frac{(5º \text{ termo}) + (6º \text{ termo})}{2} = \frac{74,94 + 74,94}{2} = 74,94$; $Q_1 = 74,75$; $Q_3 = 75,35$;

limite superior = 75,46; limite inferior = 74,62

3ª parte



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Podemos concluir que o Fornecedor B tem uma distribuição mais homogênea das medidas das peças.

Páginas 48-49

Atividades finais

Nesta unidade, os estudantes trabalharam conceitos diversos de Estatística: medidas de tendência central, medidas de dispersão, análise de gráficos estatísticos e informações coletadas em pesquisas. Sugerimos que todas as atividades a seguir sejam encaminhadas para resolução individual como forma de verificação de aprendizagem e para incentivar a autonomia dos estudantes.

A primeira dessas atividades contém questões de ordem teórica que possibilitam retomar aspectos principais aqui abordados.

1. **a)** Frequência absoluta.

b) Frequência relativa.

c) Amplitude, variância e desvio-padrão.

d) Média, moda e mediana.

e) Coloca esses valores em ordem crescente e observa aquele que ocupa a posição central.

f) Calcula a média aritmética desses valores; calcula o quadrado da diferença entre cada valor e a média; calcula a média aritmética dos quadrados dessas diferenças obtidas; extrai-se a raiz quadrada desse resultado.

g) Não. Quanto maior o desvio-padrão de uma amostra, maior a distribuição desses valores.

h) A moda indica o elemento mais frequente.

i) Mínimo, máximo, mediana, 1º quartil, 3º quartil.

j) Nem sempre. Quando há valores muito grandes ou muito pequenos em relação à maioria dos valores do conjunto de valores, a média aritmética não representa adequadamente esses valores.

2. Número médio de chamadas *spam* no Brasil: 37,5.

Média aritmética do número médio de chamadas *spam* na América Latina:

$$M_a = \frac{\text{Chile} + \text{México} + \text{Peru} + \text{Costa Rica}}{4} = \frac{21{,}9 + 20{,}9 + 19{,}8 + 18{,}6}{4} = \frac{81{,}2}{4} = 20{,}3$$

Assim: $37{,}5 - 20{,}3 = 17{,}2$.

Portanto, 17,2 é a diferença entre o número de chamadas *spam* no Brasil e a média aritmética do número médio de chamadas *spam* na América Latina.

Alternativa **a**.

3. Seja h_i a altura do jogador, em que i é um número natural. Notemos que:

$$M_a = 1{,}80 \text{ m} \Rightarrow \frac{h_1 + \ldots + h_{20}}{20} = 1{,}80 \Rightarrow h_1 + \ldots + h_{20} = 20 \cdot 1{,}80 \Rightarrow h_1 + \ldots + h_{20} = 36$$

Então, a soma das alturas de todos os jogadores é 36 m.

Como saiu um jogador contundido e entrou um novo jogador, a soma das alturas de todos os jogadores passou a ser $36 \text{ m} - 0{,}20 \text{ m} = 35{,}8 \text{ m}$.

Assim: $h_1 + \ldots + h_{20} = 35{,}8 \Rightarrow M_a = \frac{h_1 + \ldots + h_{20}}{20} = \frac{35{,}8}{20} \Rightarrow M_a = 1{,}79$

Portanto, 1,79 m é a média de altura do novo grupo.

Alternativa **c**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

4. Segundo o enunciado, a variação do IV para III é igual à variação do III para o II, adicionada à média aritmética entre a variação do III para o II e a variação do II para o I. Então:

$\Delta_{III - II} = 7{,}4 - 4{,}2 = 3{,}2$

$\Delta_{II - I} = 4{,}2 - 2{,}2 = 2$

$$M_a = \frac{\Delta_{III - II} + \Delta_{II - I}}{2} = \frac{3{,}2 + 2}{2} = \frac{5{,}2}{2} = 2{,}6$$

$\Delta_{IV - III} = \Delta_{III - II} + M_a = 3{,}2 + 2{,}6 = 5{,}8$

Logo, a receita mínima esperada para o IV, em bilhão de reais, será de: $7{,}4 + 5{,}8 = 13{,}2$.

Alternativa **c**.

5. Média de pães vendidos na semana:

$$M_a = \frac{250 + 208 + 215 + 251 + 187 + 187 + 186}{7} = \frac{1484}{7} = 212$$

A média é 212 e o número mais próximo da média é 215.

Logo, terça-feira é o dia utilizado como referência para a quantidade de pães diariamente.

Alternativa **c**.

6. Organizando os dados em ordem crescente de altura:

Número de mudas	Altura da muda (em cm)
16	4,5
9	8
18	10
7	13

$M_p = \frac{18 \cdot 10 + 7 \cdot 13 + 9 \cdot 8 + 16 \cdot 4{,}5}{50} = \frac{180 + 91 + 72 + 72}{50} = 8{,}3$

A altura 10 aparece 18 vezes $\Rightarrow M_o = 10$

$M_e = \frac{(2º \text{ termo}) + (3º \text{ termo})}{2} = \frac{8 + 10}{2} = \frac{18}{2} = 9$

Logo, 8,3 cm, 10 cm e 9 cm são, respectivamente, a média, a moda e a mediana.

Alternativa **c**.

7. De acordo com o enunciado, 60% do total de analfabetos são mulheres, então 40% do total de analfabetos são homens. Média de idade das mulheres analfabetas: 30 anos; média de idade dos homens analfabetos: 35 anos. Assim, a média ponderada é:

$M_p = \frac{60}{100} \cdot 30 + \frac{40}{100} \cdot 35 = 0{,}6 \cdot 30 + 0{,}4 \cdot 35 = 18 + 14 = 32$

Logo, a média de idade de analfabetos dessa cidade é 32 anos, que se encaixa no **Recurso III**, de acordo com a tabela, $27 < M_p \leqslant 32$.

Alternativa **c**.

8. Determinando o lucro em cada ano:

Ano	Custo total (milhar de real)	Receita (milhar de real)	Lucro (milhar de real)
primeiro	250	325	75
segundo	270	355	85
terceiro	290	350	60
quarto	280	365	85
quinto	260	305	45

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Média dos cinco anos de lucro: $M_a = \frac{75 + 85 + 60 + 85 + 45}{5} = \frac{350}{5} = 70$

Portanto, a média anual do lucro, em milhar de real, ao longo dos cinco anos é 70.

Alternativa **b**.

9. Organizando os percentuais de aprovação em ordem crescente:

8%, 11%, 12%, 13%, 13%, 13%, 15%, 15%, 83%, 86%

$M_e = \frac{(5º \text{ termo}) + (6º \text{ termo})}{2} = \frac{13\% + 13\%}{2} = 13\%$

13% aparece 3 vezes $\Rightarrow M_o = 13\%$

Logo, é correto afirmar que os valores percentuais da mediana e da moda são equivalentes.

Alternativa **c**.

UNIDADE 2 Análise combinatória

Objetivos

- Empregar o diagrama da árvore na resolução de problemas de contagem.
- Diferenciar problemas de contagem cuja ordem dos elementos influencia no total de possibilidades daqueles problemas cuja ordem dos elementos não influencia.
- Calcular o número de possibilidades de ocorrência de um evento utilizando estratégias de combinação, permutação simples e permutação com repetição.
- Utilizar o princípio aditivo de contagem para resolver problemas.
- Usar o princípio multiplicativo de contagem para resolver problemas.
- Elaborar situações de contagem que possam ser resolvidas pelo princípio aditivo ou pelo princípio multiplicativo.

Justificativa

A construção de modelos empregando estratégias de cálculo em que a ordem dos elementos pode ou não influenciar o resultado possibilita resolver problemas de vários contextos que envolvem contagem dos elementos de determinado conjunto.

Competências e habilidades da BNCC trabalhadas nesta unidade

Competências gerais

Competência geral 2: Ao longo desta unidade, os estudantes exercitam a curiosidade intelectual por meio da investigação, reflexão, imaginação e criatividade ao experimentarem possibilidades para resolver problemas que envolvem os diversos tipos de contagem. Eles elaboram e testam hipóteses a fim de encontrar formas de resolução para uma mesma classe de problemas. Isso fica evidente nas atividades, por exemplo, da seção **Para pensar e discutir** da página 64, quando investigam possibilidades para o cálculo de permutações simples.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Competência geral 4: Os estudantes utilizam diferentes linguagens – como a verbal (oral e escrita), visual e matemática – para se expressar e partilhar informações, experiências e ideias. Isso ocorre por meio das atividades em dupla e em grupo propostas ao longo da unidade, por exemplo, a atividade 5 da página 75. Eles elaboram, em dupla, uma situação envolvendo arranjo simples para outra dupla resolver. Depois, as soluções são discutidas entre as duplas. Eles utilizam também um algoritmo e um fluxograma para representar como calcular o número de permutações de n elementos na seção **Para pensar e discutir** da página 66.

Competência geral 5: Na seção **Para pensar e discutir** da página 60, os estudantes usam a calculadora para explorar o conceito de fatorial de um número natural. Assim, desenvolvem essa competência utilizando uma tecnologia digital de forma significativa e reflexiva para produzir conhecimentos e resolver problemas.

Competência geral 9: Ao resolverem diversas atividades em dupla ou em grupo, os estudantes têm a oportunidade de desenvolver a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação. Aprendem também a se fazer respeitar, ao mesmo tempo que acolhem e respeitam os colegas por meio da escuta atenta, da convivência e da contribuição mútua. Isso fica evidente, por exemplo, na realização das atividades da seção **Para explorar** das páginas 75 e 77.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competência específica 3

EM13MAT310: Ao longo de toda a unidade, os estudantes desenvolvem essa habilidade ao resolverem e elaborarem problemas de contagem que envolvem agrupamentos ordenáveis ou não de elementos usando os princípios multiplicativo e aditivo e recorrendo a estratégias diversas.

Competências específicas 3 e 4

EM13MAT315 e EM13MAT405: Essas habilidades são mobilizadas por meio da atividade da seção **Para pensar e discutir** da página 66. Os estudantes expressam, por meio de um algoritmo e de um fluxograma, o cálculo do número de permutações de n elementos.

Resoluções e comentários

Página 51

Abertura

1. Sabemos que o ponteiro dos minutos dará uma volta completa no relógio após 60 minutos, ou seja, 1 hora. Como 1 dia tem 24 horas, podemos concluir que o ponteiro dos minutos dará 24 voltas em um dia ($1 \cdot 24$).
2. Resposta pessoal. A questão visa investigar o conhecimento prévio do estudante em relação ao cálculo combinatório. É interessante retomá-la no final da unidade.
   A resposta é $\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$, sendo n o número de estudantes da turma.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 52

Para pensar e discutir

1. Notemos que nas unidades dos minutos as trocas dos algarismos ocorrem do 0 até 9 seis vezes, ou seja, são feitas 10 trocas seis vezes; portanto, 60 trocas no intervalo de uma hora.

$$\text{6 vezes}\begin{cases} \underbrace{_\,0;_\,1;_\,2;_\,3;_\,4;_\,5;_\,6;_\,7;_\,8;_\,9}_{\text{10 trocas}} \\ \vdots \\ \underbrace{_\,0;_\,1;_\,2;_\,3;_\,4;_\,5;_\,6;_\,7;_\,8;_\,9}_{\text{10 trocas}} \end{cases}$$

2. Notemos que nas dezenas dos minutos as trocas dos algarismos ocorrem de 0 até 5, ou seja, são feitas 6 trocas no intervalo de uma hora.

$$\underbrace{(0_\,;1_\,;2_\,;3_\,;4_\,;5_\,)}_{\text{6 trocas}}$$

3. Notemos que nas unidades das horas as trocas dos algarismos ocorrem do 0 até 9 duas vezes, e de 0 até 3 uma vez, ou seja, são feitas 10 trocas duas vezes e 4 trocas uma vez; portanto, 24 trocas no intervalo de um dia.

$$2 \text{ vezes} \begin{cases} \underbrace{_\,0;\ _\,1;\ _\,2;\ _\,3;\ _\,4;\ _\,5;\ _\,6;\ _\,7;\ _\,8;\ _\,9}_{10 \text{ trocas}} \\ \underbrace{_\,0;\ _\,1;\ _\,2;\ _\,3;\ _\,4;\ _\,5;\ _\,6;\ _\,7;\ _\,8;\ _\,9}_{10 \text{ trocas}} \end{cases} \qquad 1 \text{ vez} \begin{cases} \underbrace{_\,0;\ _\,1;\ _\,2;\ _\,3}_{4 \text{ trocas}} \end{cases}$$

4. Notemos que nas dezenas das horas as trocas dos algarismos ocorrem de 0 até 2, ou seja, são feitas 3 trocas no intervalo de um dia.

$$\underbrace{(\underline{0}\ _;\ \underline{1}\ _;\ \underline{2}\ _)}_{3 \text{ trocas}}$$

5. Vimos que no intervalo de uma hora os algarismos das unidades dos minutos trocam 60 vezes e os algarismos das dezenas dos minutos trocam 6 vezes, ou seja, juntas, são 66 trocas no total de uma hora. Assim em um dia inteiro, eles trocam 1584 (24 · 66) vezes. E vimos que os algarismos das unidades das horas e das dezenas das horas trocam respectivamente 24 vezes e 3 vezes, ou seja, juntas, elas totalizam 27 trocas em um dia.

   Assim, temos:

   1584 + 27 = 1611

   Portanto, 1611 trocas foram feitas em um dia completo.

Página 53

Para pensar e discutir

1. O ano de 2020 não entrou na contagem porque não se trabalhou ao longo dele.
2. Quando fazemos a diferença, tiramos o valor 1998, por isso precisamos acrescentar 1 à quantidade de números que foram diminuídos.

Página 54

Para explorar

A ideia dessa atividade de exploração é valorizar os procedimentos desenvolvidos pelos próprios estudantes. Peça a alguns que comentem coletivamente o modo que fizeram.

1. Exemplo de resposta:

   1ª resolução:

   Os estudantes que falam inglês e espanhol são 6. Portanto, os que fazem só inglês são 14 (20 − 6) e os que fazem só espanhol são 6 (12 − 6). Os que não fazem nenhum idioma são 10. Assim, a adição que fornece o total de estudantes é:

   (20 − 6) + 6 + (12 − 6) + 10 = 36.

2. Resposta pessoal.

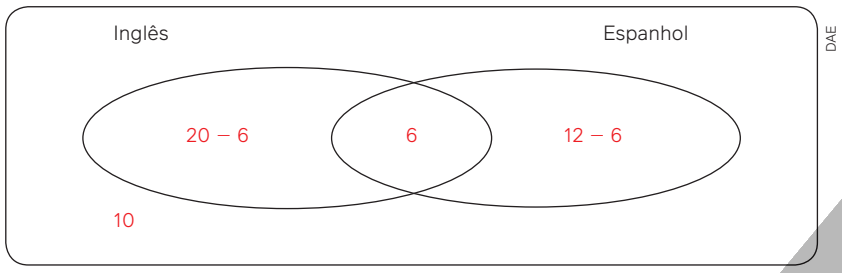
MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir

1. Adicionam-se as possibilidades, pois os dois “eventos” são excludentes, isto é, assiste-se a um filme **ou** assiste-se a uma peça de teatro.
2. O resultado seria 12, pois se pode assistir a um filme **e** a uma peça de teatro. Nesse caso, os estudantes podem listar todas essas possibilidades:
   - filme 1 e peça 1, filme 1 e peça 2, filme 1 e peça 3;
   - filme 2 e peça 1, filme 2 e peça 2, filme 2 e peça 3;
   - filme 3 e peça 1, filme 3 e peça 2, filme 3 e peça 3;
   - filme 4 e peça 1, filme 4 e peça 2, filme 4 e peça 3.

   É esperado que alguns estudantes respondam, simplesmente, que se pode multiplicar o número de filmes pelo número de peças, pelo conhecimento do princípio multiplicativo do Ensino Fundamental.

3.



Página 55

Atividades

Como estamos iniciando um trabalho com contagem, é fundamental que os próprios estudantes desenvolvam essas atividades individualmente. É interessante e importante verificar como cada um apresenta seus procedimentos e interpretações.

A propósito, a atividade 8 exigirá um pouco mais deles na interpretação da situação proposta. Proponha essa atividade como desafio para instigá-los a fazê-la.

1. a) Seja n a quantidade de números naturais de 100 a 500. Sendo assim, temos:

$n = 500 - 100 + 1$

$n = 401$

Portanto, são 401 números naturais.

b) Queremos descobrir quantos números naturais tem o algarismo 1 na centena. Assim:

- o primeiro algarismo pode ser escolhido de 1 modo (só pode ser o número 1);
- o segundo algarismo pode ser escolhido de 10 modos;
- o último algarismo pode ser escolhido de 10 modos.

Então:

$1 \cdot 10 \cdot 10 = 100$

Portanto, 100 números naturais têm o algarismo 1 na centena.

c) Queremos descobrir em quantos números o algarismo da dezena é 9. Assim:

- o primeiro algarismo pode ser escolhido de 4 modos;
- o segundo algarismo pode ser escolhido de 1 modo (só pode ser o número 9);
- o último algarismo pode ser escolhido de 10 modos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Então:

$4 \cdot 1 \cdot 10 = 40$

Portanto, em 40 números naturais o algarismo das dezenas é igual a 9.

d) Queremos descobrir quantos números pares há nessa sequência. Vamos contar separadamente: Se o número não começar pelo algarismo 5:

- há 4 modos de selecionar o primeiro algarismo (1, 2, 3 ou 4);
- há 10 modos de selecionar o segundo algarismo (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ,7 ,8 ou 9);
- há 5 modos de selecionar o terceiro algarismo (0, 2, 4, 6 ou 8).

Então:

$4 \cdot 10 \cdot 5 = 200$

Logo, há 200 números pares não começados por 5.

Se o número começar por 5, há 1 modo de escolher o primeiro algarismo, 1 de escolher o segundo (deve ser o 0) e 1 de escolher o terceiro (que também deve ser o 0).

Então:

$1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Logo, há 1 número par começado por 5.

Assim: $200 + 1 = 201$

Portanto, na sequência há 201 números pares.

e) Queremos descobrir quantos números ímpares há nessa sequência. Vamos contar separadamente:

- há 4 modos de selecionar o primeiro algarismo (1, 2, 3 ou 4);
- há 10 modos de selecionar o segundo algarismo (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9);
- há 5 modos de selecionar o terceiro algarismo (1, 3, 5, 7 ou 9).

Então:

$4 \cdot 10 \cdot 5 = 200$

Obs.: desconsideramos o algarismo 5 no primeiro algarismo, pois só é possível formar o número 500, que é par. Embora tenhamos apresentado procedimentos utilizando o princípio multiplicativo, é provável que os estudantes usem outros procedimentos de contagem para resolver os itens da atividade. Por isso, é fundamental observar quais são esses procedimentos; peça a alguns deles que externem para os colegas a forma que resolveram.

2. Resposta pessoal. A ideia é que os estudantes elaborem situações relacionadas à contagem de números observando certas condições. Esse tipo de atividade exige cuidados na elaboração e coloca os estudantes diante de situações nas quais eles precisam desenvolver estratégias de resolução.

3. a) $n(A) = 102 + 36 = 138$

Portanto, 138 é quantidade de elementos do conjunto A.

b) $n(A) - n(A \cap B) = 138 - 36$

Portanto, 102 é a quantidade de elementos apenas do conjunto A.

c) $n(B) = 88 + 36 = 124$

Portanto, 124 é a quantidade de elementos do conjunto B.

d) $n(B) - n(A \cap B) = 124 - 36 = 88$

Portanto, 88 é a quantidade de elementos apenas do conjunto B.

e) $n(A \cup B = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A \cup B) = 138 + 124 - 36$

$n(A \cup B) = 226$

Portanto, 226 é o número de elementos da união desses dois conjuntos.

4. 1ª Resolução:

Contando separadamente:

1ª coluna – a primeira pessoa tem 2 escolhas; a segunda tem 1, ou seja, $2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow$ 2 maneiras;

2ª coluna – a primeira pessoa tem 3 escolhas; a segunda tem 2, ou seja, $3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow$ 6 maneiras;

3ª coluna – a primeira pessoa tem 2 escolhas; a segunda tem 1, ou seja, $2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow$ 2 maneiras.

Assim: $2 + 6 + 2 = 10$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

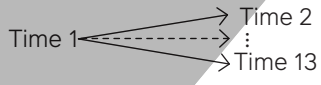
Portanto, elas poderão se posicionar de 10 maneiras diferentes.

2ª Resolução:

$$\underbrace{\boxed{2} \cdot \boxed{1}}_{\text{2 maneiras}} + \underbrace{\boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{1}}_{\text{6 maneiras}} + \underbrace{\boxed{2} \cdot \boxed{1}}_{\text{2 maneiras}} = 2 + 6 + 2 = 10$$

Portanto, elas poderão se posicionar de 10 maneiras diferentes.

5. a) São 13 times que vão disputar o campeonato em uma partida única, ou seja, cada time vai jogar 12 partidas.



$$\underbrace{\boxed{1} \cdot \boxed{12}}_{\text{13 times}} = 12 \text{ partidas}$$

b) Sabemos que cada time vai disputar 12 jogos e são 13 times, ou seja, 156 ($12 \cdot 13$) partidas, mas estamos contando duas vezes os mesmos jogos; então, precisamos dividir por 2. Assim:

$$\frac{12 \cdot 13}{2} = \frac{156}{2} = 78$$

Portanto, serão disputadas 78 partidas no total.

c) Pontuação será máxima se um dos times ganhar as 12 partidas. Como cada vitória vale 3 pontos:
$12 \cdot 3 = 36 \Rightarrow 36$ pontos
Portanto, 36 pontos é a pontuação máxima que cada time poderá obter.

6. a) Seja n a quantidade de números naturais de 1 a 900. Sendo assim, temos:
$n = 900 - 1 + 1$
$n = 900$
Portanto, são 900 números naturais.

b) Devemos considerar dois casos.
1º caso: O último algarismo é 0.
Primeiro, vamos considerar os números de 2 algarismos:
- o primeiro algarismo pode ser escolhido de 3 modos (3, 6 ou 9);
- o último algarismo pode ser escolhido de 1 modo (deve ser 0).

Então:
$3 \cdot 1 = 3 \Rightarrow 3$ números.
A seguir, vamos considerar os números de 3 algarismos, em que o último algarismo é 0:
- o primeiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8);
- o segundo algarismo pode ser escolhido de 3 modos (3, 6 ou 9);
- o último algarismo pode ser escolhido de 1 modo (deve ser 0).

Então:
$8 \cdot 3 \cdot 1 = 24 \Rightarrow 24$ números.
Agora, vamos considerar os números de 3 algarismos, cujos último e antepenúltimo algarismos são zero:
- o primeiro algarismo pode ser escolhido de 3 modos (3, 6 ou 9);
- o segundo algarismo pode ser escolhido de 1 modo (deve ser 0);
- o último algarismo pode ser escolhido de 1 modo (deve ser 0).

Então:
$3 \cdot 1 \cdot 1 = 3 \Rightarrow 3$ números.
2º caso: o último algarismo não é 0.
Primeiro, vamos considerar os números de 1 algarismo:
- há 3 modos de escolher (3, 6 ou 9) $\Rightarrow 3$ números.

Agora, vamos considerar os números de 2 algarismos:
- o primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9);
- o segundo algarismo pode ser escolhido de 3 modos (3, 6 ou 9).

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Então:
$9 \cdot 3 = 27 \Rightarrow 27$ números.
Por fim, vamos considerar os números de 3 algarismos:
- o primeiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8);
- o segundo algarismo pode ser escolhido de 10 modos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9);
- o último algarismo pode ser escolhido de 3 modos (3, 6 ou 9).

Então:
$8 \cdot 10 \cdot 3 = 240 \Rightarrow 240$ números.
Desse modo, temos:
$3 + 24 + 3 + 3 + 27 + 240 = 300$
Portanto, 300 é a quantidade de números que são múltiplos de 3.

c) Contando separadamente:
Primeiro, vamos considerar os números de 1 algarismo (1 a 9):
- há 1 modo de escolher (apenas o 5) $\Rightarrow 1$ número.

Agora vamos considerar os números de 2 algarismos (10 a 99):
- o primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9);
- o segundo algarismo pode ser escolhido de 2 modos (0 ou 5).

Então:

$1 \cdot 9 \cdot 2 = 18 \Rightarrow$ 18 números.

Por fim, os números de 3 algarismos (100 a 899):

- o primeiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8);
- o segundo algarismo pode ser escolhido de 10 modos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9);
- o último algarismo pode ser escolhido de 2 modos (0 ou 5).

Então:

$8 \cdot 10 \cdot 2 = 160 \Rightarrow$ 160 números.

Precisamos acrescentar mais um número, pois deixamos de fora o número 900.

Desse modo, temos: $1 + 18 + 160 + 1 = 180$.

Portanto, 180 é a quantidade de números que são múltiplos de 5.

d) Vamos usar PA (Progressão Aritmética) para resolver esse item.

$a_1 = 7$, $r = 7$ e $a_n = 896$ (pois 896 é o último número múltiplo de 7). Segue que:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$896 = 7 + (n - 1) \cdot 7$

$896 = 7 + 7n - 7$

$896 = 7n$

$n = 128$

Portanto, 128 é a quantidade de números múltiplos de 7.

7. Resposta pessoal. É importante que os estudantes confrontem as respostas e, em caso de dúvida, discutam-na com a turma.

8. **a)** $S(44) = (44; 22; 11; 12; 6; 3; 4; 2; 1)$. Portanto, o número de elementos de $S(44)$ é igual a 9.

b) $S(100) = (100; 50; 25; 26; 13; 14; 7; 8; 4; 2; 1)$. Portanto, o número de elementos de $S(100)$ é igual a 11.

Página 56

Para pensar e discutir

1. São 3 etapas: 1º lançamento, 2º lançamento e 3º lançamento.

2. Cada lançamento tem 2 possibilidades de ocorrência: cara ou coroa.

3. São 8 resultados possíveis: (cara; cara; cara), (cara; cara; coroa), (cara; coroa; cara), (cara; coroa; coroa), (coroa; cara; cara), (coroa; cora; coroa), (coroa; coroa; cara) ou (coroa; coroa; coroa).

Ou podemos usar o princípio multiplicativo, mesmo que intuitivamente:

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

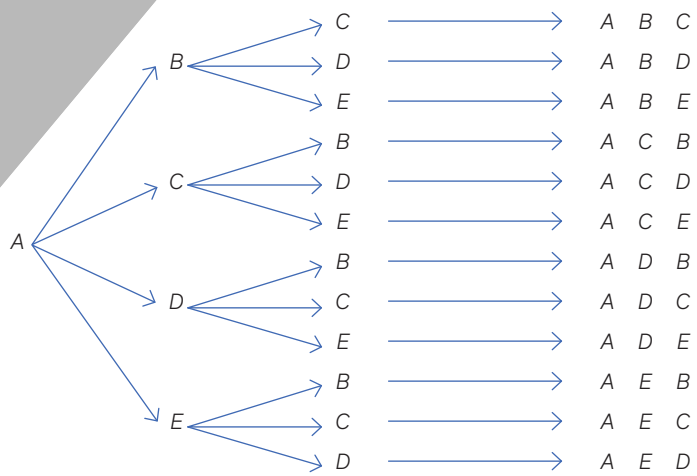
MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

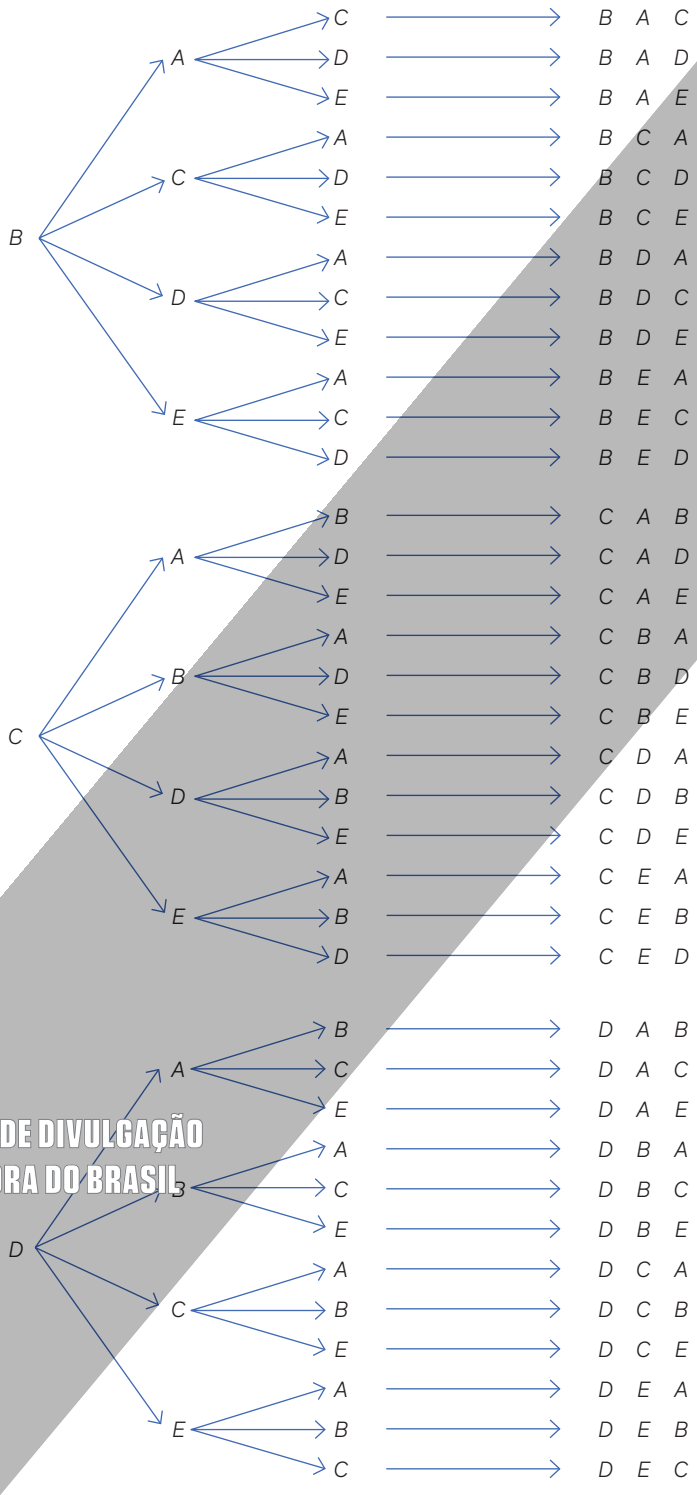
Página 57

Para explorar

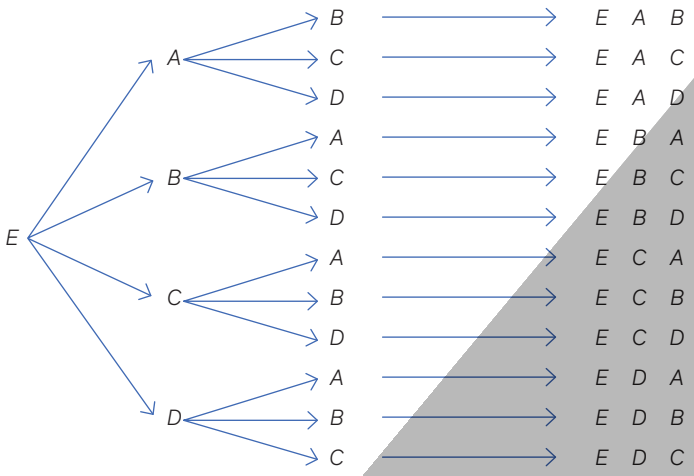
Exemplo de resposta. Letras escolhidas: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*.

Árvore de probabilidades:





MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL



Com base na árvore das possibilidades, há 12 siglas começadas com a letra *A*, 12 siglas começadas com a letra *B*, 12 siglas começadas com a letra *C*, 12 siglas começadas com a letra *D*, 12 siglas começadas com a letra *E*, ou seja, 60 é a quantidade total de possibilidades para a formação dessa sigla ($12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 5 \cdot 12 = 60$).

Outra resolução:

Letras escolhidas: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*.

A primeira letra da sigla pode ser escolhida de 5 modos; a segunda, de 4 modos; a terceira, de 3 modos.

A resposta é:

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \Rightarrow$ 60 possibilidades para a formação dessa sigla.

Páginas 57-58

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal. A ideia é que os estudantes percebam as facilidades do princípio multiplicativo. Uma resposta seria: Dos 900 números naturais de 100 a 999, devemos excluir todos os que tiverem exatamente 2 algarismos iguais e todos os que tiverem 3 algarismos iguais.
2. Pelo princípio multiplicativo:

   $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$
3. Começando pela escolha do algarismo das unidades, depois pela escolha do das dezenas e, por último, pela escolha do algarismo das centenas:

   $n = 8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$

   Portanto, o resultado seria o mesmo.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Páginas 58-59

Atividades

O princípio fundamental da contagem deve ser muito bem compreendido para o estudo de análise combinatória. Para que isso de fato ocorra os estudantes devem resolver situações diversas e, de preferência, de forma autônoma. Daí a necessidade de a maior parte dessas atividades ser encaminhada para resolução individual e como forma de verificação. Com as discussões coletivas das atividades você pode verificar se compreenderam ou não. Sugerimos que você apresente outras resoluções similares antes de prosseguir, caso alguns estudantes ainda tenham dificuldades.

1. A previsão do tempo é dada por uma indicação de temperatura e uma figura. Como há 3 possibilidades de indicação de temperatura e 5 figuras.

   Pelo princípio multiplicativo:

   $3 \cdot 5 = 15$

   Portanto, há 15 maneiras diferentes de fazer a apresentação da previsão do tempo.
2. Pelo princípio multiplicativo:

   $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

   Portanto, o valor de *n* é igual a 16.

3. a) O primeiro algarismo do número pode ser escolhido de 9 modos (não pode ser 0); o segundo, de 10 modos; o terceiro, de 10 modos.

Pelo princípio multiplicativo:

$9 \cdot 10 \cdot 10 = 900 \Rightarrow$ 900 números.

b) O primeiro algarismo do número pode ser escolhido de 9 modos (não pode ser 0); o segundo, de 9 modos; o terceiro, de 8 modos.

Pelo princípio multiplicativo:

$9 \cdot 9 \cdot 8 = 648 \Rightarrow$ 648 números.

c) O primeiro algarismo do número pode ser escolhido de 9 modos (não pode ser 0); o segundo, de 10 modos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9); o terceiro, de 5 modos (0, 2, 4, 6 ou 8).

Pelo princípio multiplicativo:

$9 \cdot 10 \cdot 5 = 450 \Rightarrow$ 450 números pares.

d) Vamos contar separadamente.

Se número não terminar com o algarismo 0:

- há 8 modos de escolher o primeiro algarismo;
- há 8 modos de escolher o algarismo do meio;
- há 4 modos de escolher o último algarismo (2, 4, 6 ou 8).

Pelo princípio multiplicativo:

$8 \cdot 8 \cdot 4 = 256$ números.

Se o número terminar com o algarismo 0:

- há 9 modos para escolher o primeiro algarismo;
- há 8 modos de escolher o segundo algarismo;
- há 1 modo de escolher o último algarismo (deve ser 0).

Pelo princípio multiplicativo:

$9 \cdot 8 \cdot 1 = 72 \Rightarrow$ 72 números.

Então: $256 + 72 = 328$

Portanto, são 328 números pares com algarismos distintos.

Outra resolução:

Considerando o caso de 0 poder ser o primeiro algarismo:

- há 9 modos de escolher o primeiro algarismo;
- há 8 modos de escolher o algarismo do meio;
- há 5 modos de escolher o último algarismo (0, 2, 4, 6 ou 8).

Pelo princípio multiplicativo:

$9 \cdot 8 \cdot 5 = 360 \Rightarrow$ 360 números pares com algarismos distintos.

Nesses 360 números estão incluídos os números começados por 0, que devem ser excluídos. Para isso, vamos determinar quantos números distintos pares podem ser formados começando com o algarismo 0:

- há 1 modo de escolher o primeiro algarismo (deve ser 0);
- há 8 modos de escolher o algarismo do meio;
- há 4 modos de escolher o último algarismo (2, 4, 6 ou 8).

Pelo princípio multiplicativo:

$1 \cdot 8 \cdot 4 = 32 \Rightarrow$ 32 números pares com algarismos distintos começando com 0.

Então: $360 - 32 = 328$

Portanto, são 328 números pares com algarismos distintos.

e) O primeiro algarismo do número pode ser escolhido de 9 modos (não pode ser 0); o segundo, de 10 modos; o terceiro, de 5 modos (1, 3, 5, 7 ou 9).

Pelo princípio multiplicativo:

$9 \cdot 10 \cdot 5 = 450 \Rightarrow$ 450 números ímpares.

f) O primeiro algarismo do número pode ser escolhido de 8 modos (não pode ser 0); o segundo, de 8 modos; o terceiro, de 5 modos.

Pelo princípio multiplicativo:

$8 \cdot 8 \cdot 5 = 320 \Rightarrow$ 320 números ímpares com algarismos distintos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

4. Seguindo o mesmo raciocínio da atividade 3, obtemos os resultados a seguir.

a) Pelo princípio multiplicativo:
$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000 \Rightarrow 9\,000$ números.

b) Pelo princípio multiplicativo:
$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536 \Rightarrow 4\,536$ números.

c) Pelo princípio multiplicativo: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4\,500 \Rightarrow 4\,500$ números pares.

d) No caso de 0 ser o primeiro algarismo:
Pelo princípio multiplicativo: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2\,520 \Rightarrow 2\,520$ números pares com algarismos distintos (incluindo os números começados por 0).
Vamos determinar quantos números distintos pares podem ser formados começando com o algarismo 0.
Pelo princípio multiplicativo:
$1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 = 224 \Rightarrow 224$ números pares com algarismo distintos começando com 0.
Então: $2\,520 - 224 = 2\,296$
Portanto, 2 296 números pares com algarismos distintos.

e) Pelo princípio multiplicativo:
$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4\,500 \Rightarrow 4\,500$ números ímpares.

f) Pelo princípio multiplicativo:
$8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2\,240 \Rightarrow 2\,240$ números ímpares com algarismos distintos.

5. a) Pelo princípio multiplicativo:
$1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^8$
Portanto, essa cidade pode ter no máximo 10^8 números de telefone.

b) Pelo princípio multiplicativo:
$1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 10^4$
Portanto, essa cidade pode ter no máximo 10^4 números de telefone nos quais os últimos algarismos sejam 1234.

6. Notemos que para questão temos duas respostas (**V** ou **F**). Então, pelo princípio multiplicativo:
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10} = 1\,024$
Portanto, há 1 024 maneiras diferentes de se responder a essa avaliação.

7. Pelo princípio multiplicativo:
$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^7$
Portanto, podem ser formados $9 \cdot 10^7$ CEPs para a codificação de logradouros no Brasil.
Alternativa

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

8. Vamos contar os casos [illegible]
Se a barra do meio é escura:
- há 2 modos de escolher a cor da primeira barra;
- há 2 modos de escolher a cor da segunda barra;
- há 1 modo de escolher a cor da barra do meio (escura);
- há 1 modo de escolher a cor da quarta barra (deve ser igual à segunda barra);
- há 1 modo de escolher a cor da última barra (deve ser igual à primeira barra).

Pelo princípio multiplicativo:
$2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4$
O enunciado diz para desconsiderar o caso de todas as barras serem escuras. Assim, temos: $4 - 1 = 3$, ou seja, 3 códigos na condição dada.
Se a barra do meio é clara:
- há 2 modos de escolher a cor da primeira barra;
- há 2 modos de escolher a cor da segunda barra;
- há 1 modo de escolher a cor da barra do meio (clara);
- há 1 modo de escolher a cor da quarta barra (deve ser igual à segunda barra);
- há 1 modo de escolher a última barra (deve ser igual à primeira barra).

Pelo princípio multiplicativo:

$2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4$

O enunciado diz para desconsiderar o caso de todas as barras serem claras. Assim, temos: $4 - 1 = 3$, ou seja, 3 códigos na condição dada.

Portanto, 6 é a quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita igual à leitura da direita para a esquerda.

Alternativa **d**.

Página 60

Para pensar e discutir

1. $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$

$9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362\,880$

$2! = 2 \cdot 1 = 2$

2. No visor da calculadora aparece a mensagem de ERRO.

Página 62

Atividades

Todas as atividades exigem dos alunos conhecimento de como manipular, em situações de cálculo, o fatorial de um número natural. A ideia é que adquiram confiança para prosseguir no cálculo envolvendo contagem e usar o símbolo fatorial como forma de simplificação.

Escolha algumas dessas atividades para eles resolverem individualmente como verificação da aprendizagem.

1. **a)** $1! = 1$ e $2! = 2 \cdot 1 = 2$

Portanto, existem dois números cujo fatorial é igual ao próprio número: 1 e 2.

b) $0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2 \cdot 1 = 2$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040 > 1\,000$

Portanto, são 7 números naturais cujo fatorial é menor que 1 000: 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

2. **a)** $4! + 5! = 9!$

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$24 + 120 = 362\,880$

$144 = 362\,880$ (falsa)

b) $(4!) \cdot (3!) = 12!$

$(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$(24) \cdot (6) = 479\,001\,600$

$144 = 479\,001\,600$ (falsa)

c) $5! + 5! = 2 \cdot 5!$

$(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) + (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 2 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$

$120 + 120 = 2 \cdot 120$

$240 = 240$ (verdadeira)

d) $\frac{8!}{4!} = 2$

$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 2$

$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 2$

$1680 = 2$ (falsa).

3. $E = (3!)^2 + 2 \cdot 4! + (4 - 2!) + (2!)^{3!}$

$E = (3 \cdot 2 \cdot 1)^2 + 2 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) + (4 - 2 \cdot 1) + (2 \cdot 1)^{3 \cdot 2 \cdot 1}$

$E = 6^2 + 2 \cdot 24 + (4 - 2) + 2^6$

$E = 36 + 48 + 2 + 64$

$E = 150$

4. **a)** $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!$

b) $14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10! = 14!$

c) $(k + 1) \cdot k \cdot (k - 1)! = (k + 1)!$

5) **a)** $\frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 336$

b) $\frac{10!}{4! \cdot (10 - 4)!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 210$

c) $\frac{15!}{(15 - 3)!} = \frac{15!}{12!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{12!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2\,730$

6. **a)** $\frac{n!}{(n - 2)!} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)!}{(n - 2)!} = n \cdot (n - 1) = n^2 - n$

b) $\frac{(n - 1)!}{(n - 3)!} = \frac{(n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3)!}{(n - 3)!} = (n - 1) \cdot (n - 2) = n^2 - 3n + 2$

c) $\frac{(n - 1)!}{(n + 1)!} = \frac{(n - 1)!}{(n + 1) \cdot n \cdot (n - 1)!} = \frac{1}{(n + 1) \cdot n} = \frac{1}{n^2 + n}$

7. $E = \frac{(n + 2)! + (n + 1)!}{(n + 1)!}$

$E = \frac{(n + 2)! \cdot (n + 1)! + (n + 1)!}{(n + 1)!}$

$E = \frac{(n + 1)! \cdot [(n + 2) + 1]}{(n + 1)!}$

$E = n + 2 + 1$

$E = n + 3$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

8. **a)** $\frac{x!}{(x - 1)!} = 5!$

$\frac{x \cdot (x - 1)!}{(x - 1)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$x = 120$

b) $\frac{(x + 1)! - x!}{(x - 1)!} = 81$

$\frac{(x + 1) \cdot x! - x!}{(x - 1)!} = 81$

$\frac{[(x + 1) - 1] \cdot x!}{(x - 1)!} = 81$

$\frac{x \cdot x \cdot (x - 1)!}{(x - 1)!} = 81$

$x^2 = 81$

$x = 9$ ou $x = -9$ (não convém, pois x é um número natural)

Logo, $x = 9$.

Página 63

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal. Aqui temos uma questão muito aberta, para a qual há diversas respostas. Entretanto, esperam-se essas informações: Em todas as fotografias, há um grupo de pessoas; em todos os grupos, há a mesma quantidade de pessoas.
2. Resposta esperada: Em duas dessas fotografias, há uma característica que não aparece nas outras duas: a ordem das pessoas formando uma sequência.

Permutação simples

Nesse momento seria importante deixar os estudantes refletir a respeito de como podem obter a quantidade de 720. Provavelmente pensarão no princípio multiplicativo da contagem.

Página 64

Para pensar e discutir

1. Há 2 posições diferentes. Explicação esperada: $2 \cdot 1 = 2$.
2. Há 6 posições diferentes. Explicação esperada: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.
3. Há 24 posições diferentes. Explicação esperada: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
4. Há 120 posições diferentes. Explicação esperada: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Página 66

Para pensar e discutir

1. Em ALUNO, o total de anagramas que podem ser formados iniciando por vogal é 72, isto é:

   $n = 3 \cdot 4!$

   $n = 3 \cdot 24 = 72$
2. Iniciando [illegible]

   $n = 2 \cdot P_4$

   $n = 2 \cdot 4!$

   $n = 2 \cdot 24$

   $n = 48$
3. Começando e terminando com uma vogal temos:

   $n = 3 \,.\, 2 \,.\, P_3$

   $n = 6 \,.\, 3!$

   $n = 6 \,.\, 6$

   $n = 36$

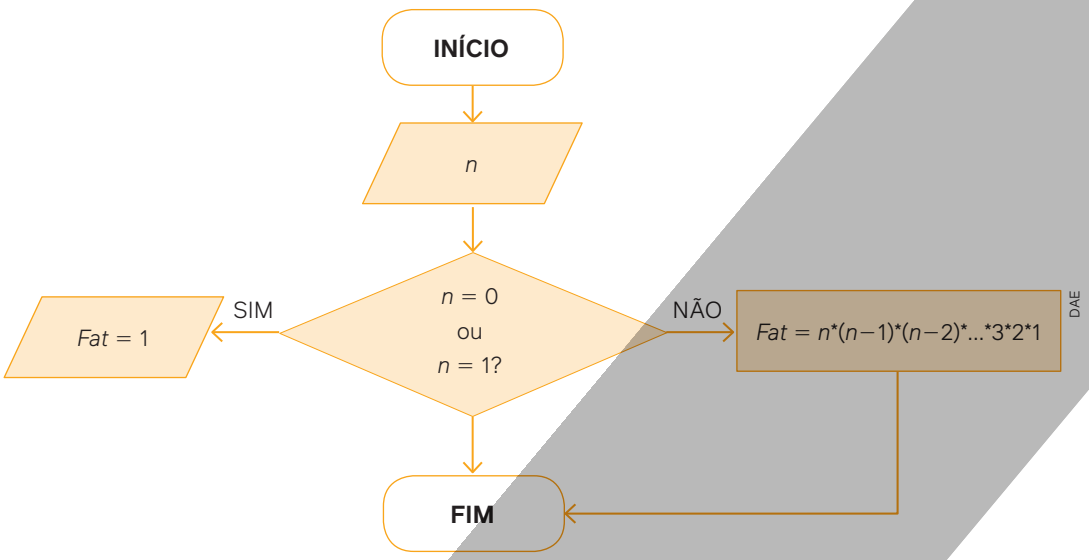
MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir

1. Basta, do total de permutações possíveis, excluirmos aquelas em que as três pessoas que usam bonés ficam juntas, ou seja: $P_6 - P_4 \cdot P_3 = 6! - 4! \cdot 3! = 720 - 144 = 576$.
2. Colocamos as pessoas com bonés nas posições ímpares (P_3) e as pessoas sem bonés nas posições pares (P_2). Como podemos inverter isso, temos:

   $P_2 \cdot P_3 \cdot P_3 = 2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$.

3. Resposta pessoal. Exemplo de resposta.



Página 67

Atividades

Após trabalharmos o conceito de fatorial de um número natural, retomamos aqui as situações de contagem. É importante os estudantes saberem que as situações relacionadas à permutação simples também podem ser resolvidas pelo princípio multiplicativo. Entretanto, a permutação representa uma simplificação dos procedimentos. A maioria dessas atividades deve ser proposta para resolução individual, como forma de verificação da aprendizagem.

1. $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

   Portanto, há 24 possibilidades.

2. **a)** $P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$

   Portanto, há 3 628 800 maneiras.

   b) $2! \cdot P_8 = 2 \cdot 8! = 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 40\,320 = 80\,640$

   Portanto, há 80 640 maneiras.

3. Exemplo de resposta.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

   1ª parte

   A palavra é PRÁTICO.

   2ª parte

   a) Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO?

   $P_7 = 7! = 5\,040$

   b) Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO que começam com consoantes?

   $4 \cdot P_6 = 4 \cdot 6! = 2\,880$

   c) Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO que começam com vogais?

   $3 \cdot P_6 = 3 \cdot 6! = 2\,160$

   d) Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO que começam e terminam com consoantes?

   Há 4 maneiras de escolher a consoante inicial, 3 maneiras de escolher a consoante final, e as 5 letras restantes podem ser arrumadas de P_5 modos. Então:

   $4 \cdot 3 \cdot P_5 = 4 \cdot 3 \cdot 5! = 1\,440$

4. Como são 3 grupos de 5 pessoas, sendo que em cada grupo as pessoas têm a mesma cor de camiseta, podemos ter:

   $n = (3!) \cdot (5!)^3$

   $n = 6 \cdot 120^3$

   $n = 10\,368\,000$

5. a) Para formar o maior número basta colocar os algarismos em ordem decrescente, ou seja, 654 321.

b) Para formar o menor número basta colocar os algarismos em ordem crescente, ou seja, 123 456.

c) $P_5 = 5! = 120$

d) $P_5 = 5! = 120$

e) Primeiro, vamos determinar quantos números se podem formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, ou seja, $P_6 = 6! = 720$.

Agora vamos determinar todos os números menores que 452 316. Vamos contar separadamente.

Vamos fixar o primeiro algarismo:

$\underline{1}\ _\ _\ _\ _\ _ \rightarrow P_5 = 5! = 120$

$\underline{2}\ _\ _\ _\ _\ _ \rightarrow P_5 = 5! = 120$

$\underline{3}\ _\ _\ _\ _\ _ \rightarrow P_5 = 5! = 120$

Vamos fixar o primeiro e o último algarismo:

$\underline{4}\ \underline{1}\ _\ _\ _\ _ \rightarrow P_4 = 4! = 24$

$\underline{4}\ \underline{2}\ _\ _\ _\ _ \rightarrow P_4 = 4! = 24$

$\underline{4}\ \underline{3}\ _\ _\ _\ _ \rightarrow P_4 = 4! = 24$

Fixando o primeiro, o segundo e o terceiro algarismo:

$\underline{4}\ \underline{5}\ \underline{1}\ _\ _\ _ \rightarrow P_3 = 3! = 6$

Número cujo terceiro algarismo é 2, incluindo o número dado:

$\underline{4}\ \underline{5}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{3}\ \underline{6} \rightarrow 1$

$\underline{4}\ \underline{5}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{6}\ \underline{3} \rightarrow 1$

$\underline{4}\ \underline{5}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{6}\ \underline{3} \rightarrow 1$

Agora só resta contar os números **menores** que 452 316, incluindo esse número:

$120 + 120 + 120 + 24 + 24 + 24 + 6 + 1 + 1 + 1 = 441$

Subtraindo essa quantidade do total: $720 - 441 = 279$

Portanto, 279 números maiores que 452 316.

f) Agora vamos determinar todos os números **menores** que 345 612, contando separadamente.

Fixando o primeiro algarismo:

$\underline{1}\ _\ _\ _\ _\ _ \rightarrow P_5 = 5! = 120$

$\underline{2}\ _\ _\ _\ _\ _ \rightarrow P_5 = 5! = 120$

Fixando o primeiro algarismo:

$\underline{3}\ \underline{1}\ _\ _\ _\ _ \rightarrow P_4 = 4! = 24$

$\underline{3}\ \underline{2}\ _\ _\ _\ _ \rightarrow P_4 = 4! = 24$

Fixando o primeiro, o segundo e o terceiro algarismo:

$\underline{3}\ \underline{4}\ \underline{1}\ _\ _\ _ \rightarrow P_3 = 3! = 6$

$\underline{3}\ \underline{4}\ \underline{2}\ _\ _\ _ \rightarrow P_3 = 3! = 6$

Agora é preciso contar os números:

$\underline{3}\ \underline{4}\ \underline{5}\ \underline{1}\ \underline{2}\ \underline{6} \rightarrow 1$

$\underline{3}\ \underline{4}\ \underline{5}\ \underline{1}\ \underline{6}\ \underline{2} \rightarrow 1$

$\underline{3}\ \underline{4}\ \underline{5}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{6} \rightarrow 1$

$\underline{3}\ \underline{4}\ \underline{5}\ \underline{2}\ \underline{6}\ \underline{1} \rightarrow 1$

Agora só resta contar os números **menores** que 345 612

$120 + 120 + 24 + 24 + 6 + 6 + 1 + 1 + 1 + 1 = 304$

Portanto, há 304 números menores que 345 612.

6. a) São 3 posições (salada, prato quente, sobremesa) que os 3 grupos de alimentos ocuparão com permutação dentro de cada grupo. Então:

$P_3 \cdot P_5 \cdot P_4 = 3! \cdot 5! \cdot 4! = 6 \cdot 120 \cdot 24 = 17\,280$

b) $P_3 \cdot P_3 \cdot P_5 \cdot P_4 = 3! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 4! = 6 \cdot 6 \cdot 120 \cdot 24 = 103\,680$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

7. **a)** Primeiro, devemos escolher a ordem em que as letras *A*, *R* aparecerão. Há 2! modos. Depois, devemos arrumar em fila 6 objetos: o bloco das letras AR e as 5 letras *E*, *L*, *O*, *G*, *I*. Há 6! modos. Então:

   2! . 6! =1440

   Portanto, *A* e *R* aparecem juntas em 1440 anagramas.

   b) Tudo se passa como se *AR* fosse uma única letra. Devemos, portanto, arrumar em fila 6 objetos: *AR*, *E*, *L*, *O*, *G*, I. Então:

   6! = 720

   Portanto, *A* e *R* aparecem juntas em 720 anagramas.

   c) Primeiro, devemos escolher a ordem em que as letras *A*, *R*, *G* aparecerão. Há 3! modos. Depois, devemos arrumar em fila 5 objetos: o bloco das letras *ARG* e as 4 letras *E*, *L*, *O*, *I*. Há 5! modos. Então:

   3! . 5! =720

   Portanto, *A* e *R* e *G* aparecem juntas em 720 anagramas.

   d) Tudo se passa como se *ARG* fosse uma única letra. Devemos, portanto, arrumar em fila 5 objetos: *ARG*, *E*, *L*, *O*, *I*. Então:

   5! = 120

   Portanto, *A* e *R* e *G* aparecem juntas em 120 anagramas.

8. Há 3! maneiras de se escolher as nacionalidades. As pessoas de mesma nacionalidade ficam juntas, ou seja, há 3! modos de organizar os brasileiros, 4! modos de organizar os americanos, 5! modos de organizar os mexicanos. Então:

   $3! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! = 103680$

   Portanto, há 103680 maneiras.

9. Distribuindo os rapazes nos sofás: 3!

   Distribuindo as moças nos sofás: 3!

   Assim, lembrando que podemos alternar em cada sofá a posição do rapaz com a moça, temos:

   $n = (3!) \cdot (3!) \cdot (2! \cdot (2!) \cdot (2!)$

   $n = 6 \cdot 3! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

   $n = 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3!$

Página 68

Para pensar e discutir

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1. Considerando **c** diferente de **C**, temos $P_4 = 4! = 24$ permutações possíveis.
2. Considerando **c** igual a **C**, devemos descartar todas aquelas em que são trocadas apenas as posições entre *c* e *C*.
3. Resposta esperada:

$$P_4^2 = \frac{P_4}{P_2} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 12$$

Para pensar e discutir

1. Considerando todas as letras distintas, temos:
   $P_5 = 5! = 120 \Rightarrow$ 120 anagramas possíveis.
2. Fixando a letra *O*, temos:
   $\underline{O}\ \underline{O}\ \underbrace{_\ _\ _}_{P_3} \rightarrow P_3 = 3! = 6$
3. Fixando a letra *S*, temos:
   $\underline{S}\ \underline{S}\ \underline{S}\ \underbrace{_\ _}_{P_2} \rightarrow P_2 = 2! = 2$
4. $P_5^{2,3} = \frac{P_5}{P_2 \cdot P_3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$, igual à quantidade do quadro.

Página 69

Para pensar e discutir

1. Percorremos 5 quadras para o oeste e 4 quadras para o sul, percorrendo um total de 9 quadras.
2. Resposta pessoal; porém, pelas condições estabelecidas, espera-se que os estudantes mencionem que andarão 9 quadras. É interessante que descrevam o trajeto escolhido indicando a sucessão de direções.
3. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes observem que a diferença está na ordem em que as direções oeste e sul são tomadas. O que existe em comum é que se deslocam por 9 quadras, sendo 5 para o oeste e 4 para o sul.
4. Resposta esperada: Permutação de 9 com 4 e 5 repetições: 126 caminhos diferentes.

$$P_9^{4,5} = \frac{P_9}{P_4 \cdot P_5} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = 126$$

Páginas 70-71

Atividades

Sugerimos que as três primeiras atividades sejam encaminhadas para resolução individual, para você verificar se os estudantes assimilaram adequadamente o procedimento do cálculo envolvendo permutações com repetição.

Em seguida, encaminhe as demais atividades da forma que julgar mais interessante.

1. $P_5^{3,1,1} = \frac{5!}{3! \cdot 1! \cdot 1!} = 20$
2. **a)** AASS, ASSA, SSAA, SASA, ASAS, SAAS.

   b) Permutação de 4 com 2 e 2 repetições.

   $$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

   Portanto, podem ser formados 6 anagramas com as letras de *ASAS*.
3. São 10 anagramas:

   AAARR, AARRA, ARRAA, RRAAA, RARAA, RAARA, RAAAR, ARARA, ARAAR, ARRAA.

   $$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$
4. $P_6^{4,1,1} = \frac{6!}{4! \cdot 1! \cdot 1!} = 30$

   Portanto, 30 possibilidades para ordená-las.
5. Resposta pessoal, dependerá da situação elaborada pela dupla.
6. **a)** Resposta pessoal. Uma sugestão: (*N*, *N*, *L*, *L*, *L*, *L*). Existem outros caminhos.

   b) Permutação de 6 com 4 e 2 repetições:

   $$P_6^{4,2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$$

   Portanto, serão 15 caminhos diferentes.
7. Resposta pessoal, dependerá da situação elaborada pelo estudante.
8. Permutação de 12 com 7 e 5 repetições:

   $$P_{12}^{7,5} = \frac{12!}{7! \cdot 5!} = 792$$

   Portanto, serão 792 caminhos diferentes.

   Alternativa **d**.
9. Do enunciado, temos as seguintes informações: Um sistema luminoso, constituído de 8 módulos, cada módulo com 3 lâmpadas de cores diferentes. Uma mensagem é composta por uma sequência configurada pelo acendimento simultâneo de 3 lâmpadas vermelhas, 2 verdes e 1 amarela, permanecendo 2 módulos com as 3 lâmpadas apagadas. Existem 8 permutações com 3, 2, 1 e 2 repetições, isto é:

   $$P_8^{3,2,1,2} = \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 2!} = 1\,680$$

   Portanto, esse sistema pode emitir 1680 mensagens distintas.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 72

Para pensar e discutir

1. Como são 11 pilotos disputando, qualquer um deles teoricamente tem possibilidade de ocupar o 1º lugar. Assim, há 11 possibilidades.
2. Sabendo qual piloto é o 1º colocado, temos 10 possibilidades para o 2º colocado.
3. Resposta pessoal. Podemos determinar o total de possibilidades da seguinte maneira:
   $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 55\,440$
   Portanto, 55 440 é o total de possibilidades.

Página 73

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal. Entretanto, é importante comentar com os estudantes que o significado da palavra **arranjo** está associado a "pôr em ordem", dispor em certa colocação.

2. $A_{11,5} = \frac{11!}{(11-5)!} = 55\,440$

Página 74

Para pensar e discutir

1. $n = k \Rightarrow A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$

2. Permutação simples de n elementos nada mais é do que arranjo simples desses n elementos tomados n a n.

Páginas 74–75

Atividades

Mesmo que os estudantes utilizem a relação de arranjo para o cálculo das situações apresentadas aqui, comente que podem usar também o princípio multiplicativo. Sugerimos que as quatro primeiras atividades sejam conduzidas como tarefa de casa. Após a correção coletiva dessas atividades, as demais podem ser encaminhadas para resolução em duplas e algumas delas, individualmente.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1. **a)** $A_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 90$

   b) $A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 336$

2. **a)** $A_n^3 = 120 \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 120$

   $\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!}{(n-3)!} = 120$

   $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \Leftrightarrow n = 6$

   b) $A_n^2 = 3 \cdot n + 5$

   $\frac{n!}{(n-2)!} = 3n + 5$

   $\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} = 3n + 5$

$n(n-1) = 3n + 5$

$n^2 - n = 3n + 5$

$n^2 - 4n - 5 = 0 \Rightarrow n = 5$ ou $n = -1$ (não convém)

Logo, $n = 5$.

3. a) Há 7 pessoas para ocupar a primeira cadeira; há 6 pessoas para ocupar a segunda cadeira; e há 5 pessoas para ocupar a terceira cadeira.

Pelo princípio multiplicativo:

$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

Portanto, há 210 maneiras de ocupar os três lugares.

b) $A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 210$

Logo, há 210 maneiras de ocupar os três lugares.

Portanto, esse problema poderia ser resolvido utilizando arranjos simples.

4. a) Sim, pois em problemas de arranjos simples qualquer mudança na ordem dos elementos altera o agrupamento.

b) $A_{5,5} = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = \frac{5!}{1} = 5! = P_5$

Portanto, o cálculo de P_5 pode ser feito por meio de arranjo simples, pois $A_{5,5} = P_5$.

5. Resposta pessoal, que depende do número de estudantes da turma e do enunciado elaborado pela dupla.

6. a) Há 10 modos de obter o primeiro colocado; 9 modos de obter o segundo colocado; e 8 modos de obter o terceiro colocado. Assim:

$A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 720$

Portanto, são 720 maneiras de obter o primeiro colocado.

b) Se Ricardo não está entre os 3 primeiros colocados, há 9 modos de obter o primeiro colocado; 8 modos de obter o segundo colocado; e 7 modos de obter o terceiro colocado. Assim:

$A_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 504$

Portanto, são 504 maneiras de Ricardo não estar entre os três primeiros colocados.

c) Se Ricardo está entre os 3 primeiros colocados, há 3 modos de obter o primeiro colocado; 9 modos de obter o segundo colocado; e 8 modos de obter o terceiro colocado. Assim:

$3 \cdot A_{9,2} = 3 \cdot \frac{9!}{(9-2)!} = 3 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 3 \cdot 72 = 216$

Portanto, são 216 maneiras de Ricardo estar entre os três primeiros colocados.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

7. Vamos determinar quantos números de 5 algarismos distintos formados por {1; 3; 5; 7; 9} são **menores** que 75 913, contando separadamente.

Vamos fixar o primeiro algarismo:

1 _ _ _ _ $\rightarrow P_4 = 4! = 24$

3 _ _ _ _ $\rightarrow P_4 = 4! = 24$

5 _ _ _ _ $\rightarrow P_4 = 4! = 24$

Vamos fixar o primeiro e o último algarismo:

7 1 _ _ _ $\rightarrow P_3 = 3! = 6$

7 3 _ _ _ $\rightarrow P_3 = 3! = 6$

Vamos fixar o primeiro, o segundo e o terceiro algarismo:

7 5 1 _ _ $\rightarrow P_2 = 2! = 2$

7 5 3 _ _ $\rightarrow P_2 = 2! = 2$

Agora só resta contar os números:

7 5 9 1 3 $\rightarrow 1$

Segue que

$24 + 24 + 24 + 6 + 6 + 2 + 2 + 1 = 89$

Portanto, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é 89.

Alternativa **e**.

8. Há 26 modos de escolher a primeira letra; 25 modos de escolher a segunda letra; 24 modos de escolher a terceira letra e 23 modos de escolher a quarta letra. Logo,

$$A_{26,\,4} = \frac{26!}{(26 - 4)!} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22!}{22!} = 358\,800$$

Portanto, são 358 800 maneiras.

Página 75

Para explorar

1ª etapa:

Cada letra pode ser escolhida de 26 modos e cada algarismo de 10 modos.

Pelo princípio multiplicativo:

$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175\,760\,000$

Portanto, podem ser formadas 175 760 000 placas nesse sistema. No cálculo estamos considerando que a placa com os quatro algarismos iguais a zero também podem ser confeccionadas.

2ª etapa:

a) As posições do algarismo e das letras nesse sistema de emplacamento são:

letra; letra; letra; número; letra; número; número.

b) Cada letra pode ser escolhida de 26 modos e cada algarismo pode escolhido de 10 modos.

Pelo princípio multiplicativo:

$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 456\,976\,000$

Portanto, podem ser formadas 456 976 000 placas nesse sistema. Também estamos incluindo a possibilidade de termos os três algarismos iguais a zero.

3ª etapa:

Resposta pessoal.

Página 76

Para pensar e discutir

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1. $A_{3,\,2} = \frac{3!}{(3 - 2)!} = \frac{3!}{1!} = 6$

Portanto, seriam obtidas 6 cores.

2. As seis cores obtidas são as 3 primárias e as 3 secundárias. Resultariam as mesmas 3 cores secundárias.

3. A ordem das cores primárias na mistura não altera a cor secundária resultante, já que, por exemplo, amarelo com vermelho resulta laranja, e vermelho com amarelo também resulta laranja.

Página 77

Para explorar

Resposta pessoal. Embora essa atividade de exploração seja um pouco trabalhosa, ela precisa ser conduzida para que os estudantes compreendam que ao formar um grupo, a ordem dos nomes não altera o grupo. São situações envolvendo combinações. É fundamental que ao final cada grupo apresente aos demais suas conclusões para que tenham oportunidade de trocar informações e procedimentos.

Antes de os estudantes observarem o cálculo do **exemplo 1** no Livro do Estudante, sugerimos que encenem a situação apresentada.

Para pensar e discutir

1. Cada um dos 10 estudantes apertará a mão de outros 9 estudantes.

2. $10 \cdot 9 = 90$. O resultado é 90.
3. Não, pois aqui está sendo computado em dobro, uma vez que, por exemplo, João cumprimentar Maria é o mesmo que Maria cumprimentar João. O número de apertos de mãos é obtido dividindo-se o resultado por 2.

Página 79

Para pensar e discutir

1. $C_{n,n-k} = \frac{n!}{[n-(n-k)]! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-n+k)! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = C_{n,k}$

   Portanto, os resultados são iguais, ou seja, a combinação de n elementos tomados k a k é igual à combinação dos n elementos tomados um número de vezes que é complementar de k em relação a n, isto é, $(n-k)$.
2. Para cada conjunto formado com 3 elementos (a partir de 10 elementos), é formado outro conjunto com 7 elementos (7 é complementar de 3 em relação a 10).

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos justifiquem que, para cada conjunto com 2 elementos que formamos (a partir dos cinco elementos disponíveis), corresponde outro conjunto com 3 elementos (os 3 que sobram).
2. Para determinar o total de subconjuntos que podemos formar com os elementos de um conjunto que contenha 6 elementos, calculamos todas as combinações possíveis, ou seja:

   $C_{6,0} + C_{6,1} + C_{6,2} + C_{6,3} + C_{6,4} + C_{6,5} + C_{6,6} = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$

   Portanto, são 64 subconjuntos.

Página 80

Para pensar e discutir

1. A diagonal AB (extremidades em dois vértices do polígono) é igual à diagonal BA. Assim, cada diagonal está sendo considerada duas vezes. Por isso dividimos o resultado por 2.
2. Quando combinamos os 12 vértices 2 a 2, incluímos os lados. Assim, é necessário excluí-los, pois eles não são diagonais.

Páginas 80-81

Atividades

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Proponha aos estudantes resolver a atividade 1 individualmente e na aula, pois a ideia de formação de conjunto é fundamental para a compreensão de situações relacionadas à combinação simples. Após a discussão das respostas, as demais atividades podem ser conduzidas alternando resolução individual e em duplas.

Um cuidado deve ser tomado na resolução da atividade 5, que exige a formação (o cálculo) de polígonos com vértices numa circunferência. Como há 5 pontos indicados na circunferência, podemos formar triângulos, quadriláteros e pentágono. Na atividade 7, explique aos estudantes que para formar triângulos ligando três pontos, esses pontos não podem estar todos alinhados.

Explore a atividade 9 a respeito da formação dos símbolos no sistema Braile. Talvez os próprios estudantes possam pesquisar a representação de cada letra do alfabeto nesse sistema.

1. **a)** {2}, {3}, {5}, {7}, {11}, {13}

   b) {2; 3}, {2; 5}, {2; 7}, {2; 11}, {2; 13}, {3; 5}, {3; 7}, {3; 11}, {3; 13}, {5; 7}, {5; 11}, {5; 13}, {7; 11}, {7; 13}, {11; 13}

   c) $C_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = 20$

   Portanto, podem ser formados 20 subconjuntos de A com exatamente 3 elementos.

   d) $C_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)! \cdot 4!} = 15$

   Portanto, podem ser formados 15 subconjuntos de A com exatamente 4 elementos.

2. Como o técnico vai começar com o líbero, podemos combinar os 11 jogadores restantes 5 a 5. Então:

$$C_{11,5} = \frac{11!}{(11-5)! \cdot 5!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!} = 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 462$$

Portanto, há 462 maneiras de formar o time inicial.

3. Resposta pessoal.

4. a) $C_{20,2} = \frac{20!}{(20-2)! \cdot 2!} = \frac{20!}{18! \cdot 2!} = 190$

Portanto, 190 é o número de possibilidades de duas pessoas serem sorteadas.

b) Como você não é uma das pessoas sorteadas, podemos combinar 19 pessoas 2 a 2.

$$C_{19,2} = \frac{19!}{(19-2)! \cdot 2!} = \frac{19!}{17! \cdot 2!} = 171$$

Portanto, 171 é o número de possibilidades de duas pessoas serem sorteadas, sendo que você não é uma delas.

c) Como você é uma das pessoas sorteadas, podemos combinar 19 pessoas 1 a 1.

$$C_{19,1} = \frac{19!}{(19-1)! \cdot 1!} = \frac{19!}{18! \cdot 1!} = 19$$

Portanto, 19 é o número de possibilidades de duas pessoas serem sorteadas, sendo que você é uma delas.

5. a) $C_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = \frac{20}{2} = 10$

Portanto, 10 é o número total de triângulos que podem ser formados.

b) $C_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 4!}{1! \cdot 4!} = \frac{5}{1} = 5$

Portanto, 5 é o número total de quadriláteros que podem ser formados.

c) $C_{5,5} = \frac{5!}{(5-5)! \cdot 5!} = \frac{5!}{0! \cdot 5!} = \frac{5!}{5!} = 1$

Portanto, pode ser formado apenas 1 pentágono.

6. a) $C_{60,6} = \frac{60!}{(60-6)! \cdot 6!} = \frac{60!}{54! \cdot 6!} = 50\,063\,860$

Portanto, 50 063 860 é o número de possibilidades para um sorteio.

b) $C_{7,6} = \frac{7!}{(7-6)! \cdot 6!} = \frac{7!}{1! \cdot 6!}$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Portanto, alguém que aposta com 7 dezenas está competindo com 7 possíveis senas.

c) $C_{8,6} = \frac{8!}{(8-6)! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2! \cdot 6!} = 28$

Portanto, alguém que aposta com 8 dezenas está competindo com 28 possíveis senas.

7. a) Resposta pessoal. Uma maneira de formar todos os triângulos possíveis: escolher 2 vértices da reta *r* e 1 vértice da reta *s* (e ligá-los por segmentos) ou escolher 1 vértice da reta *r* e 2 vértices da reta *s* (e ligá-los por segmentos).

b) $C_{7,2} \cdot C_{5,1} + C_{7,1} \cdot C_{5,2} = 21 \cdot 5 + 7 \cdot 10 = 105 + 70 = 175$

Outra resolução:

$C_{12,3} - C_{7,3} - C_{5,3} = 220 - 35 - 10 = 175$

Portanto, podem ser formados 175 triângulos unindo-se 3 pontos quaisquer dos 12 pontos indicados.

8. Precisamos escolher 3 bolas e há 7 sabores diferentes (coco, manga, graviola, cajá, acerola, maracujá e pitanga). Uma das bolas precisa ser necessariamente, de coco, ou seja, podemos combinar 6 sabores 2 a 2. Então:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} = 15$$

Portanto, são 15 possibilidades de escolha.

9. Para determinar o número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile, calculamos todas as combinações possíveis dos 6 pontos dispostos, dos quais pelo **menos um** se destaca, isto é:
$C_{6,1} + C_{6,2} + C_{6,3} + C_{6,4} + C_{6,5} + C_{6,6} = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$
Portanto, o número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é 63.
Alternativa **d**.

10. Do enunciado temos que dos 12 vagões:
4 são pintados de vermelho ⇒ podem ser escolhidos 12 combinados 4 a 4;
3 são pintados de azul ⇒ podem ser escolhidos 8 combinados 3 a 3;
3 são pintados de verde ⇒ podem ser escolhidos 5 combinados 3 a 3;
2 são pintados de amarelo ⇒ podem ser escolhidos 2 combinados 2 a 2.
Portanto, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por $C_{12,4} \cdot C_{8,3} \cdot C_{5,3} \cdot C_{2,2}$.
Alternativa **e**.

Página 82

Para pensar e discutir

1. Todas as linhas começam e terminam com 1. Adicionando-se dois números consecutivos de uma linha, obtém-se o número que fica entre esses dois na linha imediatamente abaixo.

2. **Linha 1**: $1 = 2^0$

Linha 2: $1 + 1 = 2^1$

Linha 3: $1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$

Linha 4: $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$

Linha 5: $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$

Linha 6: $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$

Linha 7: $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$

Linha 8: $1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128 = 2^7$

Linha 9: $1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 256 = 2^8$

Linha 10: $1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 = 512 = 2^9$

Portanto, a soma dos elementos de uma linha sempre resulta numa potência inteira de 2.

3. Termos equidistantes dos extremos são iguais (os extremos são sempre iguais a 1).

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 83

Atividades

1. **a)** $C_{10,0} = \dfrac{10!}{(10-0)! \cdot 0!} = 1$

$C_{10,1} = \dfrac{10!}{(10-1)! \cdot 1!} = 10$

$C_{10,2} = \dfrac{10!}{(10-2)! \cdot 2!} = 45$

$C_{10,3} = \dfrac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} = 120$

$C_{10,4} = \dfrac{10!}{(10-4)! \cdot 4!} = 210$

$C_{10,5} = \dfrac{10!}{(10-5)! \cdot 5!} = 252$

$$C_{10,\,6} = \frac{10!}{(10-6)!\cdot 6!} = 210$$

$$C_{10,\,7} = \frac{10!}{(10-7)!\cdot 7!} = 120$$

$$C_{10,\,8} = \frac{10!}{(10-8)!\cdot 8!} = 45$$

$$C_{10,\,9} = \frac{10!}{(10-9)!\cdot 9!} = 10$$

$$C_{10,\,10} = \frac{10!}{(10-10)!\cdot 10!} = 1$$

b) $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} =$

$= C_{10,\,0} + C_{10,\,1} + C_{10,\,2} + C_{10,\,3} + C_{10,\,4} + C_{10,\,5} + C_{10,\,6} + C_{10,\,7} + C_{10,\,8} + C_{10,\,9} + C_{10,\,10} =$

$= 1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 1024$

2. $(x + a)^6 = 1x^6a^0 + 6x^5a^1 + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6x^1a^5 + 1x^0a^6$

Páginas 84-85

Atividades finais

Por opção didática os assuntos permutação simples, permutação com repetição, arranjos simples e combinação simples foram abordados separadamente. Nesse momento, os estudantes se defrontam com situações que envolvem agrupamentos, mas devem interpretar cada atividade para decidir qual procedimento adotar. Sugerimos incentivá-los a resolver individualmente as situações para que desenvolvam autonomia. Você pode usar a correção coletiva como uma oportunidade para retomada.

1. a) Uma hora tem 60 minutos, então 24 horas têm 1140 (24 · 60) minutos.

Uma hora tem 3600 segundos, então 24 horas têm 86 400 (24 · 3600) segundos.

b) Existem 5 maneiras de ir de Curitiba a São Paulo e 5 maneiras de ir de São Paulo a Curitiba, ou seja, podemos fazer esses percursos de 10 maneiras.

c) Pelo principio multiplicativo temos: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10} = 1024$

Portanto, 1024 é o total de sequências possíveis ao lançar uma moeda 10 vezes consecutivamente.

d) $0! + 1! + 2! = 1 + 1 + 2 = 4$

e) O significado de permutar é "trocar".

f) O primeiro número pode ser escolhido de 5 modos; o segundo, de 4 modos; o terceiro, de 3 modos. Pelo princípio multiplicativo:

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \Rightarrow$ 60 possibilidades.

g) $C_{6,\,3} = \frac{6!}{(6-3)!\cdot 3!} = 20$

Portanto, podem ser formados 20 conjuntos de três elementos distintos.

h) No arranjo, a ordem dos elementos no agrupamento importa, enquanto na combinação a ordem não altera o agrupamento.

2. O número de senhas distintas deve ser maior que $1\,000\,000 = 10^6$ e menor que $2\,000\,000 = 2 \cdot 10^6$.

Vamos determinar quantas senhas é possível formar em cada opção.

Opção I: $26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26 \cdot 10^5 = 2{,}6 \cdot 10^6$

Não atende a uma das condições exigidas, pois $2{,}6 \cdot 10^6 > 2 \cdot 10^6$.

Opção II: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$

Não atende a um das condições exigidas, pois 10^6 é igual ao número de clientes.

Opção III: $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^2 \cdot 10^4 = 676 \cdot 10^4 = 6{,}76 \cdot 10^6$

Não atende a uma das condições exigidas, pois $6{,}76 \cdot 10^6 > 2 \cdot 10^6$.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Opção IV: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$

Não atende a uma das condições exigidas, pois $10^5 < 10^6$.

Opção V: $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 26^3 \cdot 10^2 = 17576 \cdot 10^2 = 1{,}7576 \cdot 10^4 \cdot 10^2 = 1{,}7576 \cdot 10^6$

Atende às condições exigidas, pois $10^6 < 1{,}7576 \cdot 10^6 < 2 \cdot 10^6$.

A única opção que atende as condições da empresa é a **opção V**.

Alternativa **e**.

3. Vamos separá-los em três casos.

1º caso: o primeiro algarismo é 5, então há 9 modos de escolher o segundo algarismo; e há 8 modos de escolher o último algarismo.

Pelo princípio multiplicativo:

$1 \cdot 9 \cdot 8 = 72$

2º caso: o segundo algarismo é 5, então há 8 modos de escolher o primeiro algarismo (desconsiderando 0); e há 8 modos de escolher o último algarismo.

Pelo princípio multiplicativo:

$1 \cdot 8 \cdot 8 = 64$

3º caso: o último algarismo é 5, então há 8 modos de escolher o primeiro algarismo (desconsiderando 0); e há 8 modos de escolher o segundo algarismo.

Pelo princípio multiplicativo:

$1 \cdot 8 \cdot 8 = 64$

Então: $72 + 64 + 64 = 200$.

Portanto, há 200 números inteiros positivos com três dígitos distintos nos quais o algarismo 5 aparece.

Alternativa **b**.

4. Segundo o enunciado, a esfera com o número 8 precisa ser pelo menos a terceira a ser retirada, ou seja, ela pode ser a primeira, a segunda ou a terceira a ser retirada. Assim, há 3 modos de retirar a esfera com o número 8. Devemos retirar 2 das 31 esferas restantes, o que pode ser feito de $A_{31, 2}$ maneiras. Assim, temos:

$$3 \cdot A_{31, 2} = 3 \cdot \frac{31!}{(31 - 2)!} = 3 \cdot \frac{31!}{29!} = 3 \cdot 930 = 2790.$$

Portanto, as esferas podem ser retiradas de 2790 maneiras diferentes.

Outra resolução:

Segundo o enunciado, temos de retirar a esfera com o número 8 pelo menos na terceira vez, ou seja, a esfera com o número 8 pode ser a primeira, a segunda ou a terceira a ser retirada. Vamos separar em três casos.

1º caso: a terceira esfera retirada é a número 8; então, há 31 modos de retirar a primeira esfera e 30 modos de retirar a segunda esfera.

Pelo princípio multiplicativo:

$31 \cdot 30 \cdot 1 = 930$

2º caso: a segunda esfera retirada é número 8; então há 31 modos de retirar a primeira esfera e 30 modos de retirar a terceira esfera.

Pelo princípio multiplicativo:

$31 \cdot 1 \cdot 30 = 930$

3º caso: a primeira esfera retirada é a número 8; então, há 31 modos de retirar a segunda esfera e 30 modos de retirar a terceira esfera.

Pelo princípio multiplicativo:

$1 \cdot 31 \cdot 30 = 930$

Então: $930 + 930 + 930 = 2\,790$

Portanto, há 2790 maneiras diferentes de retirar as esferas.

Alternativa **e**.

5. Segundo o enunciado, o tubo com rótulo *A* não pode ocupar as extremidades do suporte, restando 3 lugares dos 5 disponíveis. Assim, há 3 modos posicionar o tubo *A*; há 4 modos de posicionar o tubo *B*; e há 3 modos de posicionar o tubo *C*.

Pelo princípio multiplicativo, temos: $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$.

Portanto, os tubos podem ser colocados no suporte de 36 maneiras distintas.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Outra solução:

Segundo o enunciado, o tubo com rótulo *A* não pode ocupar as extremidades do suporte, restando 3 lugares dos 5 disponíveis. Assim, há 3 modos posicionar o tubo *A*, e devemos colocar os 2 tubos restantes (*B* e *C*) nos 4 lugares disponíveis, o que pode ser feito de $A_{4,2}$ maneiras. Assim, temos:

$$3 \cdot A_{4,2} = 3 \cdot \frac{4!}{(4-2)!} = 3 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 3 \cdot 12 = 36$$

Portanto, os tubos podem ser colocados no suporte de 36 maneiras distintas.

Alternativa **c**.

6. Segundo o enunciado, estão disponíveis 3 horários no período da manhã e 4 no período da tarde. Os pacientes *A* e *B* não podem ser agendados no período da manhã, e o paciente *C* não pode ser agendado no período da tarde. Por último, o paciente *D* pode ser agendado nos dois períodos (manhã ou tarde). Vamos separar em dois casos.

1º caso: a secretária agenda o paciente *D* para o período da manhã. Assim, há 3 horários disponíveis para o paciente *D* no período da manhã; 2 horários disponíveis para o paciente *C* no período da manhã; 4 horários disponíveis para o paciente *A* no período da tarde; e 3 horários disponíveis para o paciente *B* no período da tarde. Pelo princípio multiplicativo temos:

$3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 = 72$

2º caso: a secretária agenda o paciente *D* para o período da tarde. Assim, há 3 horários disponíveis para o paciente *C* no período da manhã; 4 horários disponíveis para o paciente *D* no período da tarde; 3 horários disponíveis para o paciente *A* no período da tarde; e 2 horários disponíveis para o paciente *B* no período da tarde. Pelo princípio multiplicativo temos:

$3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 72$

Então: $72 + 72 = 144$

Portanto, há 144 maneiras distintas de a secretária agendar esses pacientes.

Alternativa **d**.

7. Há 5 modos de escolher o presidente, 4 modos de escolher o tesoureiro e 3 modos de escolher o secretário. Pelo princípio multiplicativo temos:

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 120$

Portanto, a comissão poderá ser formada de 60 maneiras diferentes.

Alternativa **b**.

8. Primeiro vamos calcular o número total de jogos disputados pelos 20 times do campeonato. Há 20 modos de escolher o primeiro time e 19 modos de escolher o segundo time.

Pelo princípio multiplicativo:

$20 \cdot 19 = 380$

Logo, serão disputados 380 jogos no total.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Agora vamos calcular o número de jogos disputados nos quais os dois times são paulistas. Há 6 modos de escolher o primeiro time e 5 modos de escolher o segundo time.

Pelo princípio multiplicativo:

$6 \cdot 5 = 30$

Logo, serão disputados 30 jogos em que os dois times são paulistas.

A porcentagem é igual a $\frac{30}{380} \cong 0{,}079 = 7{,}9\%$.

Portanto, a porcentagem é maior que 7%, mas menor que 10%.

Alternativa **b**.

9. Do enunciado, temos:

$$x = C_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

$$x = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

$$y = A_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!}$$

$y = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

Assim, $y - x = 336 - 56 = 280$.

Alternativa **b**.

10. Vamos determinar quantos jogos podem ser feitos com os 6 times. Assim:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = 15$$

Logo, podem ser feitos 15 jogos com os seis times.

Notemos que, para cada jogo ganho, o time faz 3 pontos. Então, vamos supor que o time campeão venceu todas as partidas:

$15 \cdot 3 = 45 \Rightarrow 45$ pontos no total.

Na tabela, o total de pontos feitos pelos 6 times é:

$9 + 6 + 4 + 2 + 6 + 13 = 40 \Rightarrow 40$ pontos.

Então, o número de empates nesse torneio é igual a 5 (45 − 40).

Outra resolução:

Vamos determinar quantos jogos podem ser feitos com os 6 times. Assim,

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = 15$$

Logo, podem ser feitos 15 jogos com os 6 times.

Na tabela, o total de pontos feitos pelos 6 times é:

$9 + 6 + 4 + 2 + 6 + 13 = 40 \Rightarrow 40$ pontos.

Chamando V o número de vitórias e E o número de empates, temos que:

$V + E = 15$

$V = 15 - E$ (I)

$3V + 2E = 40$

$V = \frac{40 - 2E}{3}$ (II)

Igualando (I) e (II), temos V e E:

$$\frac{40 - 2E}{3} = 15 - E$$

$40 - 2E = 45 - 3E$

$3E - 2E = 45 - 40$

$E = 5$

Então, o número de empates nesse torneio é igual a 5.

Alternativa **b**.

11. Pelo enunciado, sabemos que a lanchonete tem 5 funcionários, e que em um dia trabalham de 1 até todos os funcionários. Precisamos determinar o número de grupos de trabalho diário que podem ser formados. Notemos que temos 5 combinações variando de 1 a 5 funcionários. Assim:

$C_{5,1} + C_{5,2} + C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5} = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$

Portanto, podem ser formados 31 grupos de trabalho diário.

Alternativa **d**.

Outra resolução:

Para determinar todos os grupos de trabalho diário podem ser formados grupos de 5 pessoas, para isso, fazemos o seguinte:

$2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$

Portanto, 31 grupos de trabalho diário podem ser formados.

Alternativa **d**.

12. Segundo o enunciado, o caminhão cegonha deve ter, pelo menos, um carrinho de cada cor, ou seja, deve ter pelo menos um carrinho amarelo, um branco, um laranja e um verde. Há 1 modo de pintar os 4 carrinhos. Agora precisamos determinar de quantos modos podem ser pintados os 6 carrinhos restantes, ou seja, há 4 modos de pintar cada um desses 6 carrinhos, em que $n = 4$ e $p = 6$. Então, temos:

$$C_{9,6} = \frac{9!}{(9-6)! \cdot 6!} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{9!}{3! \cdot (9-3)!} = C_{9,3}$$

Portanto, os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir são $C_{9,3}$.

Alternativa **b**.

13. Sabemos que para formar um triângulo basta escolher 3 pontos não colineares. Como há 12 pontos na figura, vamos determinar o número de maneiras de escolher 3 dos 12 pontos dela. Para isso, combinamos 12 pontos tomados 3 a 3.

$$C_{12,3} = \frac{12!}{(12-3)! \cdot 3!} = \frac{12!}{9! \cdot 3!} = 220$$

Notemos que, na figura, há 4 pontos colineares em dois dos quatro segmentos. Então, precisamos excluir esses casos. Vamos determinar de quantas maneiras podemos escolher 3 pontos alinhados. Para isso, combinamos 4 pontos tomados 3 a 3.

$$2 \cdot C_{4,3} = 2 \cdot \frac{4!}{(4-3)! \cdot 3!} = 2 \cdot \frac{4 \cdot 3!}{1! \cdot 3!} = 8$$

Portanto, o número de triângulos possíveis é 212 (220 − 8).

Alternativa **d**.

14. Note que, para cada quantidade de jogadores, a quantidade de jogos é determinado pela combinação simples, isto é, $C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$.

$$C_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)! \cdot 5!} = \frac{8!}{6! \cdot 3!} = 28$$

Alternativa **e**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

UNIDADE 3 Probabilidades

Objetivos

- Identificar no cotidiano situações de uso de probabilidades.
- Reconhecer diferentes tipos de espaço amostral (discretos ou não).
- Calcular a probabilidade condicional de dois eventos simultâneos.
- Identificar e descrever o espaço amostral em diferentes experimentos aleatórios.
- Elaborar e resolver situações relacionadas com o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios.
- Reconhecer eventos independentes em situações relacionadas a eventos equiprováveis consecutivos.
- Diferenciar eventos dependentes de eventos independentes em experimentos aleatórios.
- Calcular quantidade de elementos do evento e do espaço amostral utilizando contagem das possibilidades relacionadas à análise combinatória.

Justificativa

As noções de probabilidade constituem ferramentas básicas para os estudantes compreenderem informações que envolvem riscos e, assim, obterem informações para se posicionar, tomar decisões e fazer escolhas em diferentes aspectos da vida pessoal e da coletividade.

Competências e habilidades da BNCC trabalhadas nesta unidade

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Competências gerais

Competência geral 1: Os estudantes têm a oportunidade de desenvolver esta competência ao realizarem as atividades das páginas 88 e 89, em que conhecem e exploram um dispositivo criado por Francis Galton, estatístico inglês. Eles também leem um texto em que são apresentadas as primeiras ideias ligadas à Probabilidade. Conhecem diversos matemáticos, entre eles os franceses Pierre de Fermat e Blaise Pascal, cujas ideias são retomadas nas páginas seguintes. Assim, os estudantes aprendem a valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos a fim de entender e explicar a realidade.

Competências gerais 2 e 7: O estudo da Probabilidade nesta unidade possibilita aos estudantes, em diversas oportunidades, explorar ideias, fazer conexões, desenvolver processos, interpretar dados, testar hipóteses e apresentar soluções, mobilizando, assim, a **competência geral 2**. Isso fica evidente, por exemplo, na atividade da seção **Para explorar** da página 101, em que os estudantes, em grupos, pesquisam os valores de apostas, como as do Hiper Milhão, de acordo com o número de dezenas. Com o auxílio de uma calculadora, eles procuram, para cada número de dezenas, a probabilidade de ganhar na Mega-Sena e elaboram hipóteses sobre o valor cobrado nas apostas em cada caso. Apresentam

então suas conclusões para serem discutidas com os colegas. Ao trabalhar em grupos discutindo ideias, confrontando pontos de vista e argumentando com base em fatos, dados e informações confiáveis, usando os cálculos que fizeram para apresentar argumentos, desenvolvem, também, a **competência geral 7**.

Competências gerais 4 e 9: Nas diversas atividades propostas em grupos ou em duplas, os estudantes utilizam diferentes linguagens e desenvolvem a **competência geral 4**. Por exemplo, na seção **Para explorar** da página 90, eles fazem um experimento envolvendo um sorteio para explorar a ideia de espaço amostral e a noção de probabilidade. Usam a linguagem verbal oralmente e por escrito, além da linguagem matemática, tanto durante as discussões na execução do experimento quanto no momento de responder às questões propostas e apresentar justificativas para suas conclusões. Por trabalharem em grupos, desenvolvem a **competência geral 9** ao exercitarem empatia, diálogo, resolução de conflitos e cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competência específica 1

EM13MAT106: Várias situações cotidianas que envolvem probabilidade são abordadas nesta unidade. Na página 127, por exemplo, por meio do infográfico sobre métodos contraceptivos, os estudantes têm a oportunidade de avaliar os riscos probabilísticos de adotar este ou aquele método.

Competências específicas 3 e 5

EM13MAT311 e EM13MAT511: Nas atividades propostas nas páginas 91 a 96, os estudantes resolvem e elaboram problemas em que identificam e exploram o espaço amostral em diversos tipos de evento. Em seguida, até a página 102, analisam exemplos resolvidos sobre o cálculo de probabilidade em diversas situações, considerando o espaço amostral. Por meio das atividades propostas, eles pensam e discutem sobre os exemplos, resolvem e elaboram problemas sobre o assunto, reconhecem diferentes tipos de espaço amostral, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigam implicações no cálculo de probabilidades. Desenvolvem, assim, essas duas habilidades.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Competência específica 3

EM13MAT312: A partir da página 115, são propostas situações que envolvem o cálculo de probabilidade em experimentos aleatórios sucessivos, com e sem reposição.

Resoluções e comentários

Página 87

Abertura

1. Resposta pessoal. Explique aos estudantes que, embora haja pesquisas que indiquem ser mais provável ocorrer acidentes de automóveis do que de avião, tudo depende do contexto analisado. Por exemplo, se considerarmos viagens de carro e de avião entre São Paulo e Rio de Janeiro, temos um contexto em que pode ser mais provável acidentes de automóvel do que de avião.
2. Resposta pessoal. Esta é uma questão de genética associada ao estudo de probabilidade. Sugira aos estudantes pesquisarem informações para obter a resposta.

Página 88

Para pensar e discutir

1. É tão provável que a bolinha azul caia no tubo *H* quanto no tubo *I*.
2. Não é possível saber. Entretanto, na posição em que ela está, passará entre o 2º e 3º pinos da 3ª linha, de baixo para cima. Isso elimina a possibilidade de cair, no final, nos tubos *A*, *E*, *F*, *G*, *H* e *I*. Assim, cairá em um dos seguintes tubos: *B*, *C* ou *D*.
3. A bolinha pode cair em qualquer um dos tubos. Porém, devido à posição que eles ocupam na distribuição no tabuleiro, é mais provável que caia nos tubos centrais do que nos tubos laterais.

Página 89

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal; o objetivo é verificar se os estudantes teriam outra maneira de distribuir o prêmio.
2. Resposta pessoal. Sugerimos que os estudantes discutam como os matemáticos teriam chegado à solução apresentada. Eles podem simular a situação para verificar quais são as possibilidades dos resultados.

Página 90

Para explorar

Esta é uma atividade de exploração que precisa ter a participação de todos os estudantes. Daqui são extraídas, intuitivamente, ideias importantes como espaço amostral e noção de probabilidade.

Na primeira etapa, os estudantes farão um experimento de sorteio [illegible]. A ideia é observarem que [illegible] sorteio, para garantir que todos os elementos tenham "chances" iguais de ocorrerem, devem produzir pedaços de papel com o mesmo tamanho. Assim terão intuitivamente a ideia do que representa um espaço amostral equiprovável.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1. Sim. Não sabemos qual será o resultado, mesmo que todos os participantes tenham iguais condições de serem sorteados.
2. Sim.
3. No segundo, pois diminui-se o número de possíveis resultados após o 1º sorteio.
4. Se o número de estudantes na turma é n, temos: n possibilidades para o 1º sorteio, $n - 1$ possibilidades para o 2º sorteio e $n - 2$ possibilidades para o 3º sorteio.

Página 91

Para pensar e discutir

1. Não é possível saber qual será a bola retirada. A justificativa é que estamos diante de um experimento aleatório.
2. São 75 resultados possíveis para o sorteio da 1ª bolinha.
3. Sim. Note que as duas cartelas têm a mesma quantidade de números.

Página 92

Para pensar e discutir

Essa é uma discussão importante. Uma das grandes dificuldades do cálculo de probabilidades é o fato de os estudantes não identificarem o tipo de elemento que faz parte do espaço amostral.

1. Resposta pessoal. Entretanto, após a discussão os estudantes devem chegar à seguinte conclusão: o espaço amostral é formado por "todas as senas" que podem ocorrer.
2. Resposta pessoal. Um "elemento" do espaço amostral seria a seguinte sena: {10; 22; 24; 01; 58; 55}. Outro "elemento" do espaço amostral seria a seguinte sena: {08; 09; 10; 11; 12; 13}.
3. É bem provável que alguns estudantes digam que o número de elementos do espaço amostral seja 60, mas é incorreto. O número de elementos do espaço amostral é a quantidade de senas que podem ser formadas a partir de 60 números, isto é, $C_{60,6}$ (combinação de 60 números tomados 6 a 6).

Página 93

Para pensar e discutir

1. O espaço amostral é formado por 36 elementos.
2. O evento é formado por 6 elementos.
3. A soma mais provável é 7, e a soma menos provável é 2 ou 12, pois só há uma possibilidade para se obter soma 2 (1; 1) e 12 (6; 6).

Página 94

Para pensar e discutir

1. O evento *C* é impossível, porque ao se retirar uma ficha o número resultante não pode ser maior ou igual a 19, já que todas as fichas têm números menores que 19.
2. O evento *D* é certo, pois ao se retirar uma ficha o número resultante será menor que 19.
3. Os eventos possíveis *A* e *B* formam o espaço amostral, porque ou tiramos uma ficha preta ou tiramos uma ficha laranja. Comente com os estudantes que o evento *A* e o evento *B* são ditos **complementares em relação ao espaço amostral**.

Página 95

Para pensar e discutir

1. É mais provável que caia no setor *D*, porque ele ocupa a área maior na região colorida (o círculo com os quatro setores).
2. Correto, pois o setor *A* ocupa uma área menor do que o setor *C*.
3. Resposta pessoal. Espera-se que o estudante perceba que o espaço amostral é representado pela região colorida, isto é, a região correspondente à união dos quatro setores (o círculo).
4. Resposta pessoal. A discussão levanta o fato de que nesta situação não temos os eventos nem o espaço amostral discreto, mas contínuo. Poderíamos associar o espaço amostral com a área do círculo e os eventos com as áreas dos setores correspondentes. Outra maneira seria associar o espaço amostral com o ângulo 360°, e os eventos, com os ângulos dos setores correspondentes.

Páginas 95-96

Atividades

Embora os estudantes já tenham noções de espaço amostral e também de eventos, que viram ao longo do Ensino Fundamental, essas atividades propostas são importantes para a fixação dos conceitos. Sugerimos que as atividades de 1 a 7 sejam desenvolvidas individualmente com as devidas correções coletivas. Pelas correções, você pode identificar se compreenderam essas ideias, que são fundamentais para a continuação do assunto. Na atividade 8, as noções de espaço amostral e de evento são associadas à medida de superfície. Os estudantes observarão que quanto maior a área, maior a probabilidade de o evento ocorrer. Da mesma forma, quanto menor a área, menor a probabilidade de o evento ocorrer.

1. Respostas pessoais que dependem do número de estudantes da turma e do número de estudantes com o nome começado por vogal.
2. **a)** $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
   b) $A = \{4; 5; 6\}$
   c) $B = \{2; 3; 5\}$
   d) $C = \{1; 4\}$
   e) $D = \{\ \}$
   f) $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
3. **a)** Os eventos *A* e *B*, porque eles têm o mesmo número de possibilidades.
   b) O evento *D*, porque não há nenhuma possibilidade de haver um número maior que 6 no dado.
   c) O evento *E*, porque todos os números do dado são menores que 7.
4. As respostas dependem do experimento e do evento elaborados.
   Veja a seguir um exemplo de resposta.
   a) Experimento: lançamento de um dado no formato de um dodecaedro.
   - Escreva todos os elementos do espaço amostral.
     $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$
   - Escreva todos os elementos do evento: “Sair número maior que 8”.
     {9; 10; 11; 12}

   b) Experimento: lançamento de um dado no formato de um icosaedro.
   - Escreva todos os elementos do espaço amostral.
     $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20\}$
   - Escreva todos os elementos do evento: “Sair um número primo”.
     {2; 3; 5; 7; 11; 13; 17;19}
5. **a)** São 37 elementos.
   b) Múltiplos de 3: {0; 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; 36}

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

n(A) = 13 (Lembre-se de que zero é múltiplo de 3.)

c) Múltiplos de 5: {0; 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35}

n(B) = 8 (Lembre-se de que zero é múltiplo de 5.)

d) Múltiplos de 3 e de 5: {0; 15; 30}

n(C) = 3 (Lembre-se de que zero é múltiplo de 15.)

6.
- Evento A – será formado por 13 cartas com o naipe espadas.
- Evento B – será formado por 4 cartas com o número 3, uma de cada naipe.
- Evento C – será formado por 1 carta com o rei de ouros.
- Evento D – será formado por 4 cartas com o ás, uma de cada naipe.

O evento A é o mais provável, pois são 13 resultados entre 52 possíveis de ocorrer. O evento C é o menos provável, pois há 1 resultado entre 52 possíveis de ocorrer.

7. a) O espaço amostral é formado por todas as sequências possíveis de 6 letras. A quantidade é obtida pela permutação de 6 elementos:

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Ou seja, há 720 sequências com as letras.

b) O evento é formado apenas por uma sequência (sequência de letras que formam o nome RUBENS): 1.

8. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes, em duplas, observem, de forma intuitiva, que "ser mais provável" está relacionado a ter maior área. Mesmo que não tenham ainda trabalhado formalmente com espaço amostral contínuo, a experiência deles em relacionar o tiro ao alvo com outras brincadeiras os leva a resolver esta atividade de investigação intuitivamente. Ao final, comente com eles, reforçando, que a probabilidade neste caso é proporcional à área. Dê exemplos, como acertar uma cesta de basquete a certa distância, comparada com acertar a bola em um gol à mesma distância: para uma pessoa qualquer que não seja nem jogador de basquete nem jogador de futebol, qual das duas situações é mais provável de acontecer? Assim, eles podem calcular as áreas para verificar qual delas é maior.

Ocorrência do evento A – Proporcional à área amarela: $2^2 - 1^2 = 3 \Rightarrow 3\ m^2$.

Ocorrência do evento B – Proporcional à área preta: $1^2 = 1 \Rightarrow 1\ m^2$.

Espaço amostral – Proporcional à área do quadrado correspondente ao alvo: $2^2 = 4 \Rightarrow 4\ m^2$.

Página 96

Para pensar e discutir

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1. É mais provável [illegible] mais possibilidades de escolher meias que não sejam do mesmo par do que escolher [illegible]

2. Sim, pois as meias são diferentes apenas na estampa. Como o estudante extrai a meia sem olhar, garante o aspecto aleatório.

3. O espaço amostral é formado por todas as combinações de 2 meias. O número de elementos desse espaço amostral é o número de maneiras de escolher 2 meias em 12 meias, ou seja, ele é calculado por $C_{12,2} = 66$.

$$C_{12,2} = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = 6 \cdot 11 = 66$$

4. O evento é "retirar 2 meias do mesmo par". O número de elementos do evento é 6, pois é o número de pares de meias com os dois pés que têm a mesma estampa.

Página 97

Para pensar e discutir

Incentive os estudantes a retomarem a situação para discutir a probabilidade associada a um espaço amostral contínuo. Eles podem, por exemplo, investigar situações de tiro ao alvo para determinar as probabilidades correspondentes de acertar as regiões em que o alvo é dividido.

Espaço amostral – proporcional à área do quadrado correspondente ao alvo: $2^2 = 4 \Rightarrow 4\ m^2 \rightarrow$ 100%.

Ocorrência do evento A – proporcional à área amarela: $2^2 - 1^2 = 3 \Rightarrow 3\ m^2 \rightarrow 75\%$.

Ocorrência do evento B – proporcional à área preta: $1^2 = 1 \Rightarrow 1\ m^2 \rightarrow 25\%$.

Página 98

Comentário do exemplo 1

Espera-se que os estudantes percebam a ideia de probabilidades complementares, que veremos mais adiante.

Página 99

Comentário dos exemplos 2 e 3

Esses exemplos podem ser vivenciados ou encenados pelos estudantes na própria sala de aula.

Para pensar e discutir

Espera-se que percebam que a probabilidade seria $\frac{2}{120}$, isto é, o dobro da calculada no exemplo.

Comentário do exemplo 4

A habilidade EF08MA22 (trabalhada no 8º ano do Ensino Fundamental) diz: "Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1". É isso o que retomamos neste exemplo. Aproveite para lembrar aos estudantes que a probabilidade 1 se refere ao evento certo, isto é, 100%.

Página 100

Para pensar e discutir

1. Não, pois a face 1 tem o triplo de probabilidade de ocorrer em relação a qualquer outra face.
2. Aqui é interessante investigar junto aos estudantes como eles pensaram para resolver a situação.

   Resposta esperada:

   Como $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, temos que:

   $P(1) = \frac{1}{21}$, $P(2) = \frac{2}{21}$, $P(3) = \frac{3}{21}$, $P(4) = \frac{4}{21}$, $P(5) = \frac{5}{21}$ e $P(6) = \frac{6}{21}$.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir

1. As duas têm a mesma probabilidade de ganhar, pois ambas estão competindo com 6 números.
2. A probabilidade pode ser calculada da seguinte maneira: o espaço amostral é formado pelo número total de senas que podem ser formadas, isto é, $C_{60,6}$. Cada uma delas só está concorrendo com 1 sena. Portanto, temos:

   $P(L) = P(A)$

   $$\frac{1}{C_{60}^{6}} = \frac{1}{\frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{1}{50\,063\,860}$$

Página 101

Para explorar

1. A resposta depende dos valores atuais cobrados.
2. A resposta depende dos valores atuais cobrados.

   Exemplo de resposta:

Quantidade de números jogados	Valor da aposta (R$)
6	4,50
7	31,50
8	126,00
9	378,00
10	945,00
11	2.079,00
12	4.158,00
13	7.722,00
14	13.513,50
15	22.522,50

PROBABILIDADE. *In:* CAIXA ECONÔMICA FEDERAL. *Mega-Sena*. Brasília, [2020?]. Disponível em: http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/megasena/. Acesso em: 16 jun. 2020.

3. As probabilidades são dadas como a seguir.

   6 dezenas: $\frac{C_{6,6}}{C_{60,6}}$

   7 dezenas: $\frac{C_{7,6}}{C_{60,6}}$;

   ⋮

   15 dezenas: $\frac{C_{15,6}}{C_{60,6}}$

4. Os valores dependem de quantas dezenas são possíveis de serem formadas em cada aposta. Assim, se o valor da aposta simples (escolha de 6 dezenas) for x, para a escolha de 7 dezenas se paga o valor $x \cdot C_{7,6}$, para a escolha de 8 dezenas se paga o valor $x \cdot C_{8,6}$, ... e para a escolha de 15 dezenas se paga o valor $x \cdot C_{15,6}$.

Páginas 101–102

Atividades

Todas as atividades propostas no tópico anterior (Espaço amostral e Evento) podem ser utilizadas para o cálculo das probabilidades correspondentes. Sugerimos retomar aquelas situações e propor aos estudantes que calculem as probabilidades de todos os eventos que constam das atividades. Somente depois conduza as atividades aqui propostas, pois exigirão bem mais do que aquelas.

As nove atividades aqui propostas podem ser conduzidas para resolução em duplas, de modo que os estudantes ajudem uns aos outros na interpretação e no cálculo das probabilidades solicitadas. A discussão coletiva é fundamental para você verificar possíveis e esperadas dificuldades. Outras situações podem ser encaminhadas como tarefa, a seu critério, mas para serem resolvidas individualmente.

1. Para analisar os eventos, precisamos calcular as correspondentes probabilidades de ocorrência:

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$

$A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\}$

$B = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15\}$

$C = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 13; 14\}$

$P(A) = \frac{7}{15}$, $P(B) = \frac{8}{15}$, $P(C) = \frac{10}{15}$

Assim, o mais provável é o evento C, e o menos provável é o evento A.

2. **a)** $n(\Omega) = 8$ e $n(2 \text{ caras}) = 4$, então: $P = \frac{4}{8}$

b) $P = \frac{2}{8}$

c) Resposta pessoal. Veja a seguir um exemplo de resposta.

Qual é a probabilidade de obter pelo menos duas coroas? $P = \frac{4}{8}$

3. Espaço amostral: formado por todas as sequências possíveis de 3 algarismos $(10 \cdot 10 \cdot 10)$.

Evento: apenas uma sequência é favorável (aquela que abre o cadeado).

Probabilidade: $P = \frac{1}{1000}$

4. **a)** $P = \frac{1}{C_{n, 2}}$, sendo n o número de estudantes da turma.

b) $P = \frac{C_{n-2, 2}}{C_{n, 2}}$, sendo n o número de estudantes da turma.

5. **a)** $P = \frac{1}{6}$

b) $P = \frac{1}{9}$

c) $P = \frac{2}{9}$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

6. Utilize um painel de soluções para a correção: observe os estudantes enquanto resolvem o problema e selecione dois ou três que usaram diferentes estratégias ou representações, inclusive algum que tenha errado a solução. Divida o quadro em partes, peça a cada estudante que escreva sua solução e a explique. A turma fará, então, comparações entre as estratégias e as validarão. Veja como trabalhar com Painel de Soluções no *site* do Mathema (disponível em: https://mathema.com.br/jogos-e-atividades/explorando-problemas-no-painel-de-solucoes/; acesso em: 8 jul. 2020).

Fazendo: $P(1) = P(3) = P(5) = P(7) = P(9) = 2x$ e $P(2) = P(4) = P(6) = P(8) = P(10) = x$.

Tem-se: $5 \cdot (2x) + 5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{15}$.

Logo, $P(7) = \frac{2}{15}$.

7. Área total $= \pi \cdot 50^2 = 2500\pi \Rightarrow 2500\pi \text{ cm}^2$

Área azul $= \pi \cdot (50^2 - 30^2) = 1600\pi \Rightarrow 1600\pi \text{ cm}^2$

Área vermelha $= \pi \cdot (30^2 - 10^2) = 800\pi \Rightarrow 800\pi \text{ cm}^2$

Área amarela $= \pi \cdot 10^2 = 100\pi \Rightarrow 100\pi \text{ cm}^2$

$P(\text{azul}) = \frac{1600\,\pi}{2500\,\pi}$

$P(\text{vermelha}) = \dfrac{800\,\pi}{2\,500\,\pi}$

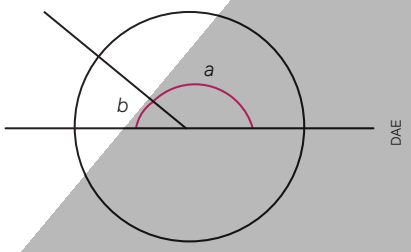
$P(\text{amarela}) = \dfrac{100\,\pi}{2\,500\,\pi}$

Portanto, $P(\text{azul}) = 0{,}64$; $P(\text{vermelha}) = 0{,}32$; $P(\text{amarela}) = 0{,}04$

8. Esta questão exige do estudante a observação dos ângulos colaterais internos no traçado de uma reta transversal em duas retas paralelas (os ângulos são suplementares). Além disso, ele precisa calcular a metade da área de um círculo.

Área total = 628 km²

Juntando as duas áreas destacadas em cinza, temos um semicírculo, cujos ângulos são suplementares.



Cálculo da área do semicírculo ($A + B$) de raio 10 km:

$A_{A+B} = \dfrac{\pi r^2}{2} \cong \dfrac{3{,}14 \cdot 10^2}{2} = 157 \Rightarrow 157\ \text{km}^2$

Cálculo da probabilidade:

$P \cong \dfrac{157}{628} = 0{,}25$ ou 25%

Alternativa **b**.

9. Uma ideia para a resolução desta atividade é organizar um quadro com todas as possibilidades de soma com total 200 reais.

R$ 50,00	R$ 20,00	R$ 10,00
1	1	13
1	2	11
1	3	9
1	4	7
1	5	5
1	6	3
1	7	1
2	1	8
2	2	6
2	3	4
2	4	2
3	1	3
3	2	1

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

De todas as situações possíveis, 6 são favoráveis. Assim, a probabilidade é $\frac{6}{13}$.

Página 103

Para explorar

É importante o estudante compreender que, ao calcular a probabilidade de ocorrer cara em 50% e de ocorrer coroa também em 50%, não significa que experimentalmente isso irá acontecer. Os resultados de um experimento nem sempre correspondem aos resultados teóricos. Entretanto, os resultados do experimento se aproximam cada vez mais dos resultados teóricos quando o número de lançamentos é muito grande.

Página 104

Para pensar e discutir

1. As probabilidades são:

   $P(A) = 1$; $P(B) = 0$; $P(C) = \frac{2}{6}$; $P(\overline{C}) = \frac{4}{6}$.
2. Espera-se que os estudantes percebam que o evento A é certo e o evento B é impossível.
3. O resultado é 1. Significa que esses eventos do mesmo espaço amostral são complementares.
4. Pode variar de 0 a 1, isto é, de 0% a 100%.

Para pensar e discutir

Será igual a 1 somente se todos os estudantes da turma forem meninas.

Para pensar e discutir

Será igual a 1 somente se todos os estudantes da turma forem meninas.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 105

Para pensar e discutir

A probabilidade será representada por um número maior ou igual a zero (será zero se você não for estudante dessa turma) e menor que 1 se você for estudante da turma. Um caso extremo é o seguinte: a probabilidade será igual a 1 se a "turma" tiver apenas um estudante e esse estudante for você. Então dizemos que a probabilidade será um número pertencente ao intervalo [0; 1].

Para pensar e discutir

A probabilidade de acontecer um evento e a probabilidade de ele não acontecer são complementares. Assim, a probabilidade de não acontecer o evento é 87,5%, ou seja, 100% − 12,5%.

Página 106

Para pensar e discutir

1. Sim, é possível, pois a probabilidade de isso acontecer é de $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} \cong 0{,}000976 \cong 0{,}0976\%$, ou seja, a probabilidade não é nula. É impossível saber qual é o próximo resultado. No entanto, é possível estimar que há 50% de probabilidade de sair cara e 50% de sair coroa.
2. É impossível saber um fato que ainda não aconteceu. Pode-se apenas estimá-lo com base no seu histórico e na probabilidade de o evento acontecer.

Páginas 106-108

Atividades

Até aqui os estudantes trabalharam o conceito de probabilidade com as suas propriedades. Assim, as atividades colocam os estudantes diante de situações diversas que exigem interpretação antes mesmo de qualquer cálculo. Incentive-os, em cada situação de probabilidade, a identificarem inicialmente qual é o espaço amostral. Somente depois conduza-os ao evento em si. Sugerimos que a maioria dessas atividades seja feita em duplas ou em pequenos grupos para facilitar as trocas de impressões sobre a melhor maneira de resolvê-las. A correção coletiva será o momento de verificar se ainda há alguma dificuldade. Caso isso ocorra, proponha situações similares para os estudantes resolverem individualmente.

1. **a)** Total = 75 números. Já foram sorteados 40 números, então restam 75 − 40 = 35 números.

   Evento: "preencher no próximo número sorteado uma linha ou uma coluna".

   $P = \frac{2}{35}$

   b) É a probabilidade complementar do evento anterior.

   $P = \frac{33}{35}$
2. **a)** 100% − 45% = 55%

   b) $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$
3. Respostas pessoais. Veja a seguir exemplos de resposta.

   a) Em um dado no formato de um dodecaedro (numerado de 1 a 12), qual é a probabilidade de sair o número 15 na face voltada para cima? O evento é impossível, pois não há face numerada com o número 15, uma vez que o dodecaedro só tem 12 faces.

b) Numa caixa foram colocadas 8 bolas pretas. Qual é a probabilidade de retirar uma bola preta da caixa? O evento é certo, pois todas as bolas são pretas.

4. Respostas pessoais; dependem dos eventos elaborados pelo estudante. Veja a seguir exemplos de resposta.

a) • Qual é a probabilidade de retirar uma carta de naipe preto do baralho? São 4 naipes: espadas e paus são pretos; ouros e copas são vermelhos. Cada naipe tem 13 cartas. Logo, $P = \frac{26}{52}$.

• Qual é a probabilidade de retirar uma carta que não seja de naipe preto? É o evento complementar ao anterior, ou seja, $P = \frac{26}{52}$.

b) Qual é a probabilidade de retirar uma carta do baralho e ela ser o "5 de copas"? Como há apenas 1 carta de 5 de copas no baralho:

$P = \frac{1}{52} \cong 0{,}01923$

Ou seja, aproximadamente, 1,92%.

5. a) $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ e $A = \{1; 2\}$

$P = \frac{2}{6}$

b) $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ e $B = \{3; 4; 5; 6\}$

$P = \frac{4}{6}$

c) Sim, pois a soma das probabilidades desses dois eventos do mesmo espaço amostral é igual a 1.

6. Total = 100 parafusos, sendo 10 defeituosos e 90 perfeitos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

a) $P = \frac{C_{90,6}}{C_{100,6}}$

b) $P = \frac{C_{10,6}}{C_{100,6}}$

c) Probabilidade de que nenhum dos 6 parafusos seja perfeito, isto é, os 6 sejam defeituosos:

$P = \frac{C_{10,6}}{C_{100,6}}$

d) Probabilidade de que nenhum dos 6 parafusos seja defeituoso, isto, é os 6 sejam perfeitos:

$P = \frac{C_{90,6}}{C_{100,6}}$

e) Retiramos do todo a probabilidade de termos só parafusos defeituosos:

$P = 1 - \frac{C_{10,6}}{C_{100,6}}$

f) Retiramos do todo a probabilidade de termos só parafusos perfeitos:

$P = 1 - \frac{C_{90,6}}{C_{100,6}}$

7. Algarismos 2, 3 e 4. Total de números = $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Evento *A*: todos os números formados são múltiplos de 3, pois a soma dos três algarismos (9) é um múltiplo de 3. Logo, $P(A) = 1 = 100\%$.

Evento *B*: é o evento complementar de *A*, ou seja, $P(B) = 0 = 0\%$.

Evento *C*: para o número ser múltiplo de 5, é preciso terminar em 0 ou 5. Como não temos esses algarismos, nenhum número formado é múltiplo de 5. Logo, $P(C) = 0 = 0\%$.

Evento *D*: é o evento complementar de *C*, ou seja, $P(D) = 1 = 100\%$.

8. a) São os seguintes resultados: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12.

b) Não, pois os resultados não têm a mesma probabilidade de ocorrência.

c) $P = \frac{6}{36}$

d) Complementar do evento anterior: $P = \frac{30}{36}$.

e) $P = \frac{18}{36}$

f) $P = \frac{18}{36}$

9. Total = 500 parafusos, sendo 4 com defeito.

a) $P = \frac{4}{500} = 0{,}008 = 0{,}8\%$

b) Evento complementar:

$1 - 0{,}008 = 0{,}992 = 99{,}2\%$

10. Total de escolhas: $C_{10,2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 5 \cdot 9 = 45$.

Retirar 2 não amassadas: $C_{7,2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 7 \cdot 3 = 21$.

a) $P = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$

b) $P = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$

Página 108

Em algumas situações apresentadas anteriormente, os estudantes já utilizaram adição de probabilidades, porém usando a ideia do princípio aditivo. A partir deste momento, no Livro do Estudante, será formalizado o procedimento de resolver situações com a adição de probabilidades.

Para pensar e discutir

A ideia desta discussão é, inicialmente, levar o estudante a conhecer e aplicar a ideia de união e interseção

de conjuntos para, então, investigar como ele observa e entende situações que relacionam probabilidades com união de conjuntos.

1. São 13 elementos. O estudante pode escrever {2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 3; 9; 15}.
2. São 3 elementos. O estudante pode escrever {6; 12; 18}.
3. São 7 elementos. O estudante pode escrever {1; 5; 7; 11; 13; 17; 19}.
4. A probabilidade é $\frac{13}{20}$.
5. Não, pois $P(A) + P(B) = \frac{10}{20} + \frac{6}{20} = \frac{16}{20}$, que é diferente de $\frac{13}{20}$. Essa diferença ocorre porque existem elementos (três elementos) que estão nos dois conjuntos simultaneamente e ao adicionar as probabilidades eles foram computados duplamente.

Página 110

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal. Uma ideia é calcular a probabilidade de nenhum deles participarem e, a partir daí, diminuir 100%. O resultado, percentualmente, dará a probabilidade de Paula ou Eduardo participarem.
2. A probabilidade de nenhum deles participar é de aproximadamente 33%, pois 100% − 67% = 33%.
3. Como nenhum deles irá participar, a probabilidade de isso ocorrer é dada por $P = C_{8,4} : C_{10,4}$.

Página 110-111

Atividades

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

As situações dadas nesta atividade envolvendo probabilidades costumam apresentar certas dificuldades normais e esperadas quanto à interpretação e ao cálculo. Para que as atividades sejam bem conduzidas, sugerimos que a maioria seja feita na sala de aula. Você pode pedir a eles que alternem resolução individual com resolução em duplas para facilitar o desenvolvimento. Ao final, a correção coletiva possibilitará a todos os estudantes a ampliação do conhecimento sobre formas de resolução e interpretação.

1. Quando os eventos A e B forem mutuamente exclusivos, isto é, quando a interseção entre eles for o conjunto vazio.
2. **a)** Total = 15 números

   $P(A) = \frac{3}{15}$; $P(B) = \frac{8}{15}$; $P(A \cap B) = \frac{2}{15}$

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

   $P(A \cup B) = \frac{3}{15} + \frac{8}{15} - \frac{2}{15} = \frac{9}{15}$

   b) Não, pois existem elementos que pertencem aos dois conjuntos correspondentes aos eventos A e B.
3. Resposta pessoal; depende dos eventos elaborados pelo estudante. Exemplo de resposta:

   Total = 15 números

   Evento A: o número sorteado é múltiplo de 3.

   Evento B: o número sorteado é múltiplo de 7.

   Qual é a probabilidade de ocorrência de A ou de B?

   $A = \{3; 6; 9; 12; 15\}$; $B = \{7; 14\}$

   $P(A) = \frac{5}{15}$; $P(B) = \frac{2}{15}$

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

   $P(A \cup B) = \frac{5}{15} + \frac{2}{15} - \frac{0}{15} = \frac{7}{15}$
4. Total = 52 cartas

   Evento A: retirar um rei; evento B: retirar uma dama.

   $P(A) = \frac{4}{52}$; $P(B) = \frac{4}{52}$

   Probabilidade de retirar um rei ou uma dama:

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

   $P(A \cup B) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} - \frac{0}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$

   Os eventos são mutuamente exclusivos, pois a interseção deles é vazia, isto é, não há uma carta que possa ser simultaneamente dama e rei.
5. Resposta pessoal; depende dos eventos elaborados pela dupla. Veja a seguir um exemplo de resposta.

   Retirando-se aleatoriamente uma carta de um baralho de 52 cartas, calcule a probabilidade de ocorrer uma carta de naipe de copas ou um rei.

   Evento A: retirar uma carta de copas; evento B: retirar um rei.

   $P(A) = \frac{13}{52}$; $P(B) = \frac{4}{52}$

   $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$

   Probabilidade de ocorrer uma carta de copas ou um rei:

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

   $P(A \cup B) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$
6.
   - Divisíveis por 2 são 50 números, pois é a metade de 100. São divisíveis por 3:

     (3; 6; 9; ...;99) ou (3 · 1; 3 · 2; 3 · 3; ...; 3 · 33)

     Ao todo temos 33 números divisíveis por 3.
   - Divisíveis por 6 (2 **e** 3) são 16 números, pois, calculando, temos:

     (6; 12; 18; ...; 96) ou

     (6 · 1; 6 · 2; 6 · 3; ...; 6 · 16)

     São 16 números divisíveis por 6

- Divisíveis por 2 **ou** 3 são 67 números, pois, calculando, temos:

  $50 + 33 - 16 = 67$

- Probabilidade: $P = \frac{67}{100}$

Portanto, $100P = 67$.

7. Vamos representar os dados do enunciado em uma tabela, sendo:

X: sofre da doença X

$\overline{X}$: não sofre da doença X

A: presença do gene A

$\overline{A}$: ausência do gene A

	A	$\overline{A}$	Total
X	6%	4%	10%
$\overline{X}$	2%	88%	90%
Total	8%	92%	100%

Probabilidade de que uma pessoa dessa população seja portadora do gene A, dado que sofre da doença X:

$P = \frac{6\%}{10\%} = 0{,}6 = 60\%$

Alternativa **e**.

8. Probabilidade de retirar o cartão escrito:

- "sábado": $\frac{1}{7}$;
- "domingo": $\frac{1}{7}$.

Como os eventos são independentes, temos que:

$P = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$

Alternativa **d**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 112

Para pensar e discutir

Esta discussão envolve investigação sobre o procedimento do cálculo da probabilidade.

1. A probabilidade é de $\frac{30}{125}$. Temos aqui um primeiro evento: "Pessoas que nunca tinham viajado de avião antes". Assim, o espaço amostral diminui (do total de 180 pessoas, 55 são descartadas) para 125. Dessas 125, apenas 30 pessoas têm idade menor que 50 anos.

2. A probabilidade é de $\frac{95}{125}$. A explicação é análoga à anterior, e a probabilidade é complementar.

Página 113

Exemplo 1

O estudante pode simplesmente organizar a resolução pensando como explicado a seguir.

- Como sabemos que o estudante sorteado está com a mensalidade atrasada, o espaço amostral fica reduzido a apenas 13 elementos (estudantes que estão com a mensalidade atrasada).
- Queremos calcular a probabilidade de sortear, dentre esses 13 estudantes, alguém que estuda Inglês. Como são 5 estudantes entre os 13 que fazem o curso de Inglês, a probabilidade é $\frac{5}{13}$.

Para explorar

Esta atividade envolve os estudantes no cálculo de probabilidade condicional. É importante que, ao final, cada dupla de estudantes apresente as situações elaboradas e as soluções encontradas. As apresentações ampliam não apenas o vocabulário matemático, mas trabalham a argumentação e o saber ouvir.

2. Queremos apenas pares de números cuja soma seja menor que 7, então temos 15 possibilidades desse evento; e que a face 2 ocorra ao menos em um dos dados, são 7 possibilidades. Portanto, a probabilidade é $\frac{7}{15}$.

3. Exemplo de resposta: Os dois dados são lançados. Sabendo-se que as faces voltadas para cima têm números pares, qual é a probabilidade de esses números serem iguais?

$P = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

4. Exemplo de resposta: Os dois dados são lançados. Sabendo-se que a soma dos resultados das faces é 10, qual é a probabilidade de que em ao menos um dos dados ocorra a face 5?

$P = \frac{1}{3}$

5. Exemplo de resposta: Os dois dados são lançados. Sabendo-se que em ao menos um dos dados ocorre a face 4, qual é a probabilidade de que a soma dos resultados das faces seja igual a 10?

$P = \frac{2}{11}$

6. Exemplo de resposta: Os dois dados são lançados. Sabendo-se que a soma dos resultados das faces é maior que 6, qual é a probabilidade de que em ao menos um dos dados ocorra a face 5?

$P = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$

Página 114

Atividades

Recomendamos que, de início, os estudantes resolvam todas essas atividades individualmente. A ideia dessa proposta é estimular o desenvolvimento da autonomia, principalmente em relação à interpretação de enunciados em questões diversas. A discussão coletiva ao final permitirá verificar se ainda existem dúvidas. Caso aconteça, novas atividades podem ser conduzidas para sanar tais dificuldades.

1. A resposta depende do número de estudantes da turma. Se a turma tiver n estudantes, a probabilidade será $\frac{1}{n-1}$.

2. Total = 78 pessoas. Queremos uma pessoa que não seja adulto, portanto, deve ser criança ou adolescente; sabendo-se que é mulher, são 30 possibilidades. Portanto, $P = \frac{30}{78} = \frac{5}{13}$.

3. O espaço amostral é formado por 13 cartas de paus. De 2 a 10, temos 9 cartas possíveis, então: $P = \frac{9}{13}$.

4. **a)** $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$

b) $\frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$

c) $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{64}$

d) $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$

5. **a)** $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$

b) $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$

c) $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$

d) $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

6. **a)** Sabendo que o espaço amostral de fumantes é de 50 funcionários e querendo que seja um homem, temos:

$P = \frac{35}{50} = \frac{7}{10}$.

b) Sabendo que o espaço amostral de não fumantes é de 150 funcionários e querendo que seja uma mulher, temos:

$P = \frac{85}{150} = \frac{17}{30}$.

7. O espaço amostral é de 60 pessoas do sexo masculino, e 12 querem Medicina, então:

$P = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$.

Alternativa **e**.

8. Resposta pessoal; depende da situação elaborada. Veja a seguir um exemplo de resposta.

Uma escola de Ensino Médio fez uma pesquisa sobre as disciplinas preferidas entre os estudantes. A tabela a seguir apresenta as disciplinas escolhidas pelos 100 estudantes.

Disciplina	Masculino	Feminino
Matemática	15	8
Literatura	6	12
Ed. Física	10	5
Geografia	6	8
Outras	18	12

Um desses estudantes é escolhido ao acaso e sabe-se que sua disciplina favorita é Matemática. A probabilidade de este estudante ser do sexo feminino é de $P = \frac{8}{23}$ ou, em porcentagem, aproximadamente, 34,8%.

9. Total de alunos: 300

$\frac{1}{5}$ dos alunos atuam em área diferente, ou seja:

$\frac{300}{5} = 60$

$\frac{3}{8}$ dos restantes não trabalham (restante é igual ao total menos o $\frac{1}{5}$ dos que atuam em áreas diferentes, 300 − 60)

$\frac{240}{8} = 30$ (como queremos 3 partes das 8, então multiplicaremos o resultado por 3)

$3 \cdot 30 = 90$

O restante trabalha na área escolhida (o restante é 240 menos os 90 alunos que não trabalham)

$240 - 90 = 150$

A probabilidade de escolhermos um aluno que trabalha na mesma área é de 50% (ou 0,5), porque 300 é o total, ou seja, 100%. Os 150 que trabalham na área são metade do total, ou seja, 50%.

Alternativa **a**.

Página 115

Para pensar e discutir

1. São 2 de 3 possibilidades para o jogador 1 sair vencedor. Aqui o estudante fica tentado a dizer que a probabilidade então seria $\frac{2}{3}$ do jogador 1 vencer e $\frac{1}{3}$ do jogador 2 vencer. Assim, a distribuição deveria ser $\frac{2}{3}$ para o jogador 1 e $\frac{1}{3}$ para o jogador 2. Mas não é isso, como podemos observar na distribuição de probabilidades do esquema.
2. Os percentuais indicam que a probabilidade do jogador 2 vencer a disputa em jogos futuros é de 25%, enquanto a do jogador 1 é de 75%.

Página 116

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal que lhe permite sondar se o estudante compreendeu ou não a alteração do espaço amostral quando a extração é com ou sem reposição. A probabilidade será maior na 2ª; situação, pois o fato de ser "sem reposição" diminui o espaço amostral quando comparada com a 1ª; situação.
2. Não, pois haverá reposição. Assim, as condições iniciais da 2ª; extração da ficha são mantidas em relação às condições iniciais quando da 1ª; extração da ficha.
3. Sim. Há uma alteração na quantidade de elementos do espaço amostral, diminuindo o número de fichas.

Página 118

Para pensar e discutir

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1. A probabilidade é $\frac{1}{5}$.
2. Na 1ª tentativa, temos 4 chaves em 5 que não abrem, e separamos uma; na 2ª, temos 3 chaves em 4 que não abrem, e separamos uma; na 3ª, temos 2 chaves em 3 que não abrem, e separamos uma; na 4ª tentativa, queremos que abra e temos 2 opções de chaves. Então, a probabilidade é:
$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$
3. A probabilidade de resultar coroa é $\frac{1}{2}$.
Logo, a probabilidade de 3 coroas consecutivas é:
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Página 119

Para explorar

Para auxiliar nessa pesquisa, sugerimos a leitura do artigo sobre Mendel disponível em: https://pt.khanacademy.org/science/biology/classical-genetics/mendelian--genetics/a/mendel-and-his-peas (acesso em: 19 jun. 2020).

Página 120

Atividades

As atividades aqui propostas podem ser resolvidas em duplas com a correção coletiva ao final. Sugerimos que a condução da atividade 5 seja feita em parceria com a disciplina de Biologia, pois trabalha com uma doença recessiva. Isso permitirá ampliar o conhecimento de genética. Além disso, você pode acrescentar outras situações reais retiradas da disciplina de Biologia. Esse intercâmbio entre as disciplinas possibilita aos estudantes estabelecer relações interdisciplinares entre os conteúdos.

1. **a)** Probabilidade de acertar apenas a 1ª questão:
$$P = \frac{1}{4}.$$
b) Probabilidade de acertar todas as questões:
$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{1024}$$
c) Probabilidade de errar todas as questões:
$$P = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$
d) Probabilidade de acertar as 3 primeiras e errar as 2 últimas:
$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{1024}$$
2. $P(C)$
$P(B) = 3 \cdot P(C)$
$P(A) = 2 \cdot P(B)$
$P(A) + P(B) + P(C) = 100\%$
$6 \cdot P(C) + 3 \cdot P(C) + P(C) = 100\%$
$10 \cdot P(C) = 100\% \Rightarrow P(C) = 10\% = \frac{1}{10}$
$P(B) = 30\% = \frac{3}{10}$
$P(A) = 60\% = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
3. Resposta pessoal; depende da situação elaborada. Veja a seguir um exemplo de resposta.
$P(C)$
$P(B) = \frac{1}{2} \cdot P(C)$
$P(A) = 4 \cdot P(B)$
$P(A) + P(B) + P(C) = 100\%$
$2 \cdot P(C) + \frac{1}{2} \cdot P(C) + P(C) = 100\%$
$\frac{7}{2} \cdot P(C) = 100\% \Rightarrow P(C) \cong 28{,}57\%$
$P(B) \cong 14{,}29\%$
$P(A) \cong 57{,}14\%$

4. A probabilidade de chover no dia, combinada com a probabilidade de o piloto vencer, é dada por:

$$\frac{75}{100} \cdot \frac{60}{100} = \frac{45}{100} = 0{,}45 = 45\%$$

Probabilidade de não chover e de vencer é:

$$\left(1 - \frac{75}{100}\right) \cdot \frac{20}{100} = \frac{25}{100} \cdot \frac{20}{100} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} =$$

$$= \frac{1}{20} = 0{,}05 = 5\%$$

Portanto, a probabilidade de o piloto vencer na corrida é 0,45 (chovendo) + 0,05 (sem chover), totalizando 0,5 ou 50%.

5. Probabilidade de se atrasar e chover:

- 50% (de chance de atraso se chover);
- 30% (de chance de chover).

Ou seja, $P = 50\% \cdot 30\% = 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15$.

Probabilidade de se atrasar e não chover:

- 25% (de chance de atraso sem chuva);
- 70% (100% − 30% de chance de não chover).

Ou seja, $P = 25\% \cdot 70\% = 0{,}25 \cdot 0{,}7 = 0{,}175$.

Concluindo, ele tem:

- 0,15 de chance de se atrasar se chover;
- 0,175 de chance de se atrasar se não chover.

Como pode ou não chover, ele tem a probabilidade de se atrasar de:

0,15 + 0,175 = 0,325.

Alternativa **c**.

6. **a)** Do quadro, $P = \frac{1}{4} = 25\%$.

b) $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = 12{,}5\%$

7. A probabilidade de Adriano acertar é 80%, logo, a de não acertar é 20%.

A de Bruno acertar é 60%, logo, a de não acertar é 40%.

Transformando em decimal e multiplicando:

0,4 · 0,2 = 0,08

Transformando em porcentagem:

0,08 · 100 = 8%

Alternativa **a**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

8. Supondo que haja 1000 declarações:

- 10% de 1000 = 100 declarações suspeitas;
- 20% de 100 = 20 declarações fraudulentas suspeitas;
- 90% de 1000 = 900 declarações não suspeitas;
- 2% de 900 = 18 declarações fraudulentas não suspeitas.

a) $P = \frac{20}{1000} = \frac{2}{100} = 2\%$

b) 20 + 18 = 38 declarações fraudulentas, sendo 20 suspeitas

$P = \frac{20}{38} \cong 52{,}6\%$

Página 121

Para pensar e discutir

1. Não é correto, pois, antes da fase cruzeiro, acontecem 35% dos acidentes (11% + 11% + 5% + 8%), enquanto depois da fase cruzeiro o percentual é de 55% (4% + 11% + 19% + 23%).
2. Resposta pessoal. Qualquer informação pode chamar mais a atenção do estudante, porém uma observação possível pode ser a de que a maioria dos acidentes fatais ocorre durante o pouso da aeronave.

Página 122

Para pensar e discutir

1. Pela ministração do remédio em grande número de pessoas portadoras da doença. É claro que isso é feito com todos os protocolos necessários e devidamente regulados pelos órgãos competentes.
2. Pela tabela, temos as probabilidades:
   1ª pessoa, melhora → 0,2
   2ª pessoa, nenhuma alteração → 0,1
   3ª pessoa, nenhuma alteração → 0,1
   4ª pessoa, cura → 0,7
   $P = 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}0014 = 0{,}14\%$
   $P \cdot 10^4 = 0{,}0014 \cdot 10\,000 = 14$

Página 122-123

Atividades

Essas atividades não são imediatas, porque exigem que os estudantes não apenas interpretem a probabilidade mas também a relacionem com informações estatísticas em alguns enunciados. A melhor estratégia para o encaminhamento das atividades é em sala de aula, com as correspondentes discussões de procedimentos e respostas obtidas.

1. A probabilidade de ser afetada é $\frac{1}{800} = 0{,}00125 = 0{,}125\%$, logo, a de não ser afetada é 99,875%.
   (I) F
   (II) V
   (III) V

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

2. Comprador *A* em fevereiro: $P(A) = \frac{30}{100}$.
   Comprador *B* em fevereiro: $P(B) = \frac{20}{120}$.
   $P = \frac{30}{100} \cdot \frac{20}{120} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$
   Alternativa **a**.
3. Resposta pessoal.
   Confira a tabela no Terra Esportes que apresenta o quadro de medalhas dos Jogos Pan-Americanos de 2019 (disponível em: https://www.terra.com.br/esportes/badminton-se-destaca-e-brasil-garante-mais-cinco-medalhas-no-pan-de-lima,b7394ba8fb5d8ef879d996f31c71e08dbmdt1q2s.html; acesso em: 20 jun. 2020).
   Escolhendo ao acaso um medalhista de ouro, qual é a probabilidade de que ele seja brasileiro?
   $P = \frac{12}{106} \cong 0{,}113 = 11{,}3\%$
   A probabilidade é de, aproximadamente, 11,3%.
4. $P(O) = \frac{30}{200} = 0{,}15 = 15\%$
   Alternativa **c**.

5. Total de pessoas que opinaram subtraindo os que não opinaram:

$500 - \frac{21}{100} \cdot 500 = 395$

Total de pessoas que assinalaram "Chato":

$\frac{12}{100} \cdot 500 = 60$

Assim, a probabilidade pedida é:

$P = \frac{60}{395} = 0{,}15$

Alternativa **d**.

6. Total = 180 alunos

Número de alunos com 15 anos (pertence ao grupo de idade de 15 a 17 anos):

$\frac{1}{5} \cdot 40 = 8$ alunos

$P = \frac{8}{180} = \frac{2}{45}$

Alternativa **e**.

7. **a)** 200 pessoas sadias: 170 negativos e 30 positivos
100 pessoas portadoras: 10 negativos e 90 positivos

$P = \frac{30 + 90}{300} = \frac{120}{300} = \frac{2}{5}$

b) 120 laudos positivos: 30 pessoas sadias e 90 pessoas portadoras

$P = \frac{90}{120} = \frac{3}{4}$

8. $P = \frac{12}{100} \cdot \frac{77}{100}$

$P = 0{,}0924$

$P = 9{,}24\%$

Alternativa **d**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 124

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes informem que houve maior frequência para as posições centrais e que, à medida que se afasta do centro, a frequência vai diminuindo.

2. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes informem que são maiores para as posições centrais x_9, x_{10}, x_{11} e x_{12}.

3. A mediana dos valores de x.

Página 126

Para pensar e discutir

1. Da esquerda para a direita:

$\frac{1}{64} = 0{,}015625 = 1{,}5625\%$

$\frac{6}{64} = 0{,}09375 = 9{,}375\%$

$\frac{15}{64} = 0{,}234375 = 23{,}4375\%$

$\frac{20}{64} = 0{,}3125 = 31{,}25\%$

$\frac{15}{64} = 0{,}234375 = 23{,}4375\%$

$\frac{6}{64} = 0{,}09375 = 9{,}375\%$

$\frac{1}{64} = 0{,}015625 = 1{,}5625\%$

2. Sim, pois temos probabilidades iguais em tubos posicionados simetricamente em relação ao tubo central.

Página 127

Para explorar

Esta atividade deve ser explorada com as disciplinas de Língua Portuguesa e Biologia. O texto dos estudantes externará, de certa forma, o conhecimento ou a falta de conhecimento do tema, que precisa ser trabalhado nesse momento da vida dos jovens. A ideia é dialogar com a disciplina de Biologia para abordar o tema da gravidez e as possíveis doenças transmissíveis no ato sexual sem a devida proteção.

Páginas 128-129

Atividades finais

No estudo de probabilidade, normalmente os estudantes enfrentam dificuldades maiores porque, além do cálculo probabilístico, também há situações envolvendo análise combinatória. Sugerimos que as atividades do final dessa unidade sejam desenvolvidas, excepcionalmente, em duplas para que haja troca de informações e interpretações. Será necessária também discussão coletiva das respostas.

1. **a)** $\frac{1}{2}$

b) Todo experimento cujo resultado depende exclusivamente do acaso.

c) Representa o conjunto formado por todos os resultados possíveis.

d) Representa o conjunto formado por todos os resultados favoráveis para a realização desse evento.

e) Significa um evento impossível de ocorrer.

f) Significa um evento certo.

g) 100% − 2,8% = 97,2%

h) Quando a interseção entre eles é vazia.

i) Quando a realização de um deles não interfere na realização do outro.

j) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2. 20% eram inconsistentes, 25% delas eram fraudulentas

$0{,}25 \cdot 0{,}2 = 0{,}05 = 5\%$

80% eram consistentes, 6,25% delas eram fraudulentas

$0{,}8 \cdot 0{,}0625 = 0{,}05 = 5\%$

Probabilidade de ser inconsistente, dado que é fraudulenta:

$$P = \frac{0{,}05}{0{,}05 + 0{,}05} = 0{,}5$$

Alternativa **e**.

3. Analisando as opções, temos:

Opção 1

Urna *A*: 3 bolas brancas, 2 pretas e 1 verde. A probabilidade de retirar a primeira bola preta é $\frac{2}{6}$, e de retirar a segunda preta é $\frac{1}{5}$, então, a probabilidade de vencer é:

$$P = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

Opção 2

Urna *B*: 6 bolas brancas, 3 pretas e 1 verde. A probabilidade de retirar a primeira bola preta é $\frac{3}{10}$, e de retirar a segunda preta é $\frac{2}{9}$, então, a probabilidade de vencer é:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

$$P = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

Opção 3

Urna *C*: 2 bolas pretas e 2 verdes. Há duas possibilidades.

1. Passar uma bola preta da urna *C* para a urna *A* (que ficaria com 3 pretas, 7 no total) $\rightarrow P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Retirar 2 bolas (pretas) da urna *A*:

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{84} = \frac{1}{14}$$

2. Passar uma bola verde da urna *C* para a urna *A* (que ficaria com 2 pretas, 7 no total) $\rightarrow P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Retirar 2 bolas (pretas) da urna *A*:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{84} = \frac{1}{42}$$

A probabilidade total é a soma das duas:

$$P = \frac{1}{14} + \frac{1}{42} = \frac{2}{21}$$

Opção 4

Urna *D*: 3 bolas brancas e 3 pretas. Há duas possibilidades.

1. Passar uma bola preta da urna *D* para a urna *C* (que ficaria com 3 pretas, 5 no total) $\rightarrow P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Retirar 2 bolas (pretas) da urna *C*:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$$

2. Passar uma bola branca da urna *D* para a urna *C* (que ficaria com 2 pretas, 5 no total) $\rightarrow P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Retirar 2 bolas (pretas) da urna *C*:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}$$

A probabilidade total é a soma das duas:

$$P = \frac{3}{20} + \frac{1}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

Opção 5

Há duas possibilidades.

1. Passar uma bola preta da urna *C* para a urna *D* (que ficaria com 4 pretas, 7 no total) $\rightarrow P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Retirar 2 bolas (pretas) da urna *D*:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{84} = \frac{1}{7}$$

2. Passar uma bola verde da urna *C* para a urna *D* (que ficaria com 3 pretas, 7 no total) $\rightarrow P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Retirar 2 bolas (pretas) da urna *D*:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{84} = \frac{1}{14}$$

A probabilidade total é a soma das duas:

$$P = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} = \frac{3}{14}$$

A maior probabilidade está na opção 5.

Alternativa **e**.

4. Nesta questão, o estudante deve utilizar os conceitos de mediana e moda numa distribuição de valores. Esse assunto foi abordado neste livro, no Capítulo 1.

Sabemos que:

- ele nunca consegue chegar ao ponto de ônibus antes de 6h15;
- o mês teve 21 dias letivos (total de elementos);
- o horário que mais se repetiu (moda) foi 6h21;
- a mediana é 6h22.

Como ele nunca chega antes das 6h15, pode pegar o ônibus nos seguintes horários (antes das 6h21): 6h15; 6h16; 6h17; 6h18; 6h19; 6h20. Como 6h22 é mediana, há 10 elementos entre 6h15 e 6h21.

6h15; 6h16; 6h17; 6h18; 6h19; 6h20; 6h21; ← **6h22**; → (10 elementos)

1 1 1 1 1 2 3

Para pegar o ônibus antes das 6h21, o número de elementos favoráveis deve ser 10 menos a quantidade da moda.

A probabilidade é máxima quando a moda é formada por 3 elementos, como mostrado acima no exemplo de distribuição dos horários. Então:

$$P = \frac{10 - 3}{21} = \frac{7}{21}$$

Alternativa **d**.

5. Antes de adicionar as perguntas, a urna tinha 20 perguntas, sendo que 25% delas eram de nível fácil, ou seja, $0{,}25 \cdot 20 = 5$ perguntas fáceis.

Há, então, 15 perguntas de nível médio e difícil.

De acordo com o enunciado, o gerente colocará mais perguntas de nível fácil, de modo que agora elas representarão 75% do total.

A quantidade de perguntas de nível médio e difícil continuará a mesma (15), ou seja, 25%.

Seja x a quantidade total de perguntas depois de acrescentadas as perguntas fáceis.

Utilizando a regra de três simples:

100% ——— x

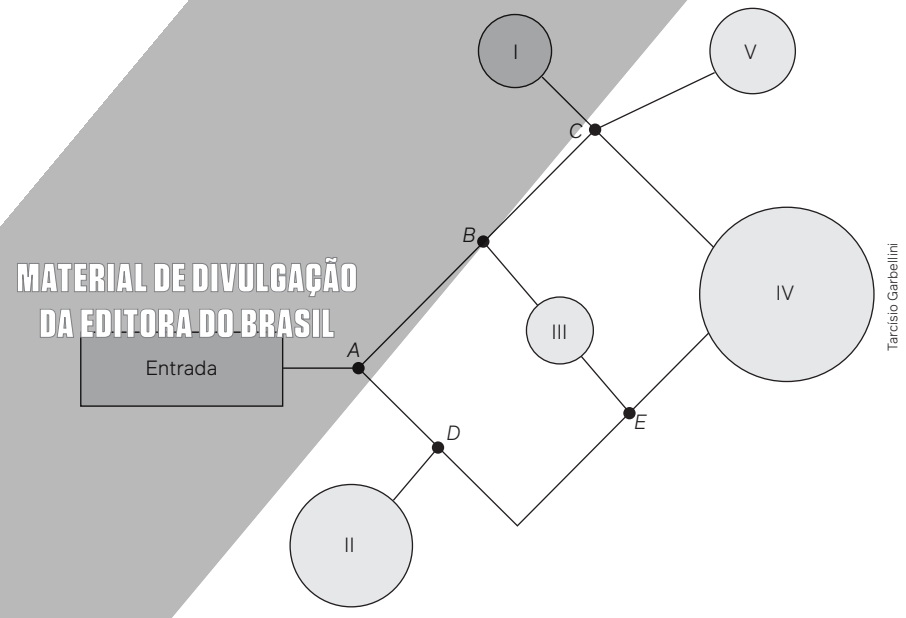
25% ——— 15

$100 \cdot 15 = 25x \Rightarrow 1500 = 25x \Rightarrow x = 60$

Então, o gerente acrescentará $60 - 20 = 40$ perguntas.

Alternativa **d**.

6. Chamando de A, B, C, D e E as ramificações, temos:



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Há apenas dois caminhos sem passar por outras áreas e sem retornar:

Entrada → **A** → **B** → **C** → **IV**: $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

Entrada → **A** → **D** → **E** → **IV**: $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Então, a probabilidade total é: $P = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$

Alternativa **c**.

7. A probabilidade de nenhum dos três alunos responder à pergunta em inglês é:

$70\% \cdot 70\% \cdot 70\% = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}343 = 34{,}3\%$

Assim, a probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta respondida em inglês é: $100\% - 34{,}3\% = 65{,}7\%$

Alternativa **d**.

8. Total de atletas $= 20 \cdot 10 = 200$.

Há 3 possibilidades de o atleta dopado ser sorteado, e são 3 sorteios, então:

$$P(\text{I}) = 3 \cdot \frac{1}{200} \cdot \frac{199}{199} \cdot \frac{198}{198}$$
$$P(\text{I}) = \frac{3}{200}$$

Queremos sortear uma equipe em 20 e sortear 3 atletas dessa equipe. A probabilidade de o atleta dopado ser o primeiro sorteado na equipe de 10 atletas é $\frac{1}{10}$. Então:

$$P(\text{II}) = \frac{1}{20} \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{9} \cdot \frac{8}{8}\right)$$
$$P(\text{II}) = \frac{3}{200}$$

A equipe do atleta dopado pode ser a primeira, a segunda ou a terceira sorteada, e a probabilidade de ele ser sorteado na equipe é de $\frac{1}{10}$. Então:

$$P(\text{III}) = 3 \cdot \left(\frac{1}{20} \cdot \frac{19}{19} \cdot \frac{18}{18}\right) \cdot \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{10}{10} \cdot \frac{10}{10}\right)$$
$$P(\text{III}) = \frac{3}{200}$$

Assim, temos: $P(\text{I}) = P(\text{II}) = P(\text{III})$.

Alternativa **e**.

9. Chance de errar uma resposta: 0,2.

Chance de acertar uma resposta: 0,8.

Para o teste acabar na quinta pergunta, ele deve acertar 3 das 4 primeiras, errar a última e errar mais uma (pode ser a primeira, a segunda, a terceira ou a quarta).

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Casos: **C** = Acertar; **E** = Errar.

C C C E E = $(0{,}8)^3 \cdot (0{,}2)^2 = 0{,}02048$

C C E C E = $(0{,}8)^3 \cdot (0{,}2)^2 = 0{,}02048$

C E C C E = $(0{,}8)^3 \cdot (0{,}2)^2 = 0{,}02048$

E C C C E = $(0{,}8)^3 \cdot (0{,}2)^2 = 0{,}02048$

Como ocorrerá uma das quatro, devemos somar as probabilidades:

$0{,}02048 + 0{,}02048 + 0{,}02048 + 0{,}02048 = 0{,}08192$

Alternativa **b**.

10. A probabilidade de os números nos cartões sorteados serem consecutivos é igual a $\frac{1}{5}$.

Com os números de 1 a 5, podemos formar 20 ($5 \cdot 4$) pares (casos possíveis; lembre-se de que é sem reposição).

O caso favorável é retirar números consecutivos. Existem 4 possibilidades: 1 e 2, 2 e 3, 3 e 4, 4 e 5 (casos favoráveis).

Portanto, a probabilidade é:

$$P = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 20\%$$

Alternativa **b**.

Conexões & projetos

Objetivos

- Compreender e se apropriar da relação entre modelos estatísticos e situações reais por meio de uma sequência de experimentos matemáticos.
- Analisar resultados de pesquisas, visando comparar dados e tirar conclusões, avaliando possíveis soluções erradas que podem ser obtidas com base em informações verdadeiras.

Justificativa

Por meio dos projetos propostos, os estudantes têm mais uma oportunidade de desenvolver e consolidar habilidades e competências trabalhadas nas unidades deste livro, não só relativas aos aspectos cognitivos como também aos que envolvem iniciativa, busca do conhecimento, autoestima e autoconhecimento, liderança, empatia, diálogo e convivência, além da resolução de conflitos, entre tantas outras de fundamental importância para sua formação como sujeito capaz de exercer a cidadania.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Competências gerais trabalhadas nos projetos

Competência geral 2: Essa competência é desenvolvida nos experimentos que os estudantes realizam no **Projeto 1**, por meio dos quais aplicam processos de investigação e desenvolvem a imaginação e a criatividade. No **Projeto 2**, quando analisam resultados de pesquisas, visando comparar dados e tirar conclusões, eles desenvolvem a reflexão, a análise crítica e a imaginação. Exercitam, assim, a curiosidade intelectual e recorrem a uma abordagem própria das ciências para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções.

Competência geral 4: O desenvolvimento dos dois projetos exige que os estudantes se comuniquem utilizando diferentes linguagens, como a verbal (oral e escrita) e a matemática. No **Projeto 1**, comunicam-se ainda usando algoritmos e fluxogramas e, no **Projeto 2**, por meio de gráficos estatísticos, como o histograma e o *boxplot*. O desenvolvimento dessa competência também ocorre na elaboração dos relatórios apresentados no final de cada projeto. Seja qual for a forma de comunicação, os dois projetos possibilitam aos estudantes se expressar e partilhar informações, experiências e ideias, favorecendo o entendimento mútuo.

Competência geral 5: Essa competência é mobilizada nos dois projetos. No caso do **Projeto 1**, os estudantes empregam planilhas eletrônicas para registrar os experimentos. No **Projeto 2**, usam os meios digitais para acessar informações. Em ambos os casos, utilizam as tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética para desenvolver os projetos.

Competência geral 6: A convivência em grupo para a realização dos dois projetos favorece a valorização da diversidade de saberes e a vivência de experiências que possibilitam entender as relações do mundo do trabalho. Os estudantes têm a oportunidade de agir com determinação, esforço e perseverança na busca de soluções para resolver situações complexas, tomar decisões ouvindo e respeitando o outro e atuar em equipe. É por meio da participação de cada um e do trabalho de todos que a proposta vai se desenvolver.

Competência geral 7: Na realização dos dois projetos, os estudantes desenvolvem essa competência. No **Projeto 1**, eles devem argumentar com base em dados e informações obtidas por meio dos experimentos propostos. No caso do **Projeto 2**, essa competência é naturalmente mobilizada, uma vez que eles analisam resultados de pesquisas visando comparar dados e tirar conclusões, avaliando possíveis conclusões erradas obtidas com base em informações verdadeiras. Portanto, seja qual for o projeto desenvolvido, os estudantes têm a oportunidade de argumentar e fazer inferências, confrontando dados e pontos de vista.

Competência geral 8: Esse tipo de trabalho, desenvolvido por meio de projetos feitos em grupo, proporciona aos estudantes a oportunidade de se conhecerem, de desenvolverem a autoconfiança e a autoestima, contribuindo para o reconhecimento de suas emoções e das dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

Competência geral 9: Ao trabalharem em grupo para desenvolver qualquer um dos dois projetos, os estudantes têm a oportunidade de [illegible] exercitando a empatia, o diálogo e a cooperação. Desenvolvem, assim, o respeito por si mesmos e pelo outro, valorizando a diversidade de ideias e aprendendo a acolher a perspectiva alheia.

Competência geral 10: Durante o desenvolvimento dos dois projetos, feitos em grupo, os estudantes resolvem os problemas que surgem agindo pessoalmente e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação. Exercitam, assim, a participação solidária, o exercício de liderança e a tomada de decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos e sustentáveis.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Projeto 1

Objetivo

- Compreender e se apropriar da relação entre modelos estatísticos e situações reais por meio de uma sequência de experimentos matemáticos.

Competências específicas de Matemática: 2, 3, 4 e 5

Habilidades

EM13MAT202: Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio-padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.

EM13MAT203: Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

EM13MAT311: Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

EM13MAT312: Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

EM13MAT315: Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

EM13MAT316: Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas

de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio-padrão).

EM13MAT406: Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

EM13MAT511: Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Orientações ao professor

A ideia principal desse projeto é tornar visível uma ideia bastante abstrata: a de que dados estatísticos podem realmente auxiliar na previsão do comportamento de eventos aleatórios, fornecendo informações amostrais que, dependendo da amostra, podem ser transpostas para o todo o universo abordado.

Para que esse objetivo seja atingido, será preciso acompanhar os estudantes em suas conclusões, até [illegible] todo que seus estudos [illegible] necessária para as conclusões que se pretende alcançar. Assim, ao propor o primeiro contato dos alunos com o projeto, convém fazer uma roda de conversa sobre o que eles já sabem acerca dos conceitos de probabilidade e estatística, podendo ser esse um bom começo para o trabalho com esse volume. Explique que a compreensão desses conceitos é essencial para iniciar o projeto e proponha, então, a questão disparadora, esclarecendo que eles deverão saber respondê-la no final:

- Como um modelo estatístico pode nos dar informações sobre a situação que ele representa?

Após essa primeira conversa, organize a turma em grupos e combine um cronograma para a realização do projeto. Isso pode ser feito com os estudantes por meio de uma leitura coletiva da descrição do projeto: contexto, desenvolvimento, produto, apresentação e relatório conclusivo. O cronograma deve conter, além do encontro inicial, as etapas a seguir.

1. Conceitos iniciais

Devido à grande quantidade de conteúdos necessários nesse projeto, é importante começar com uma conversa de alinhamento para garantir que todos os grupos tenham acesso aos conceitos fundamentais para melhor aproveitá-lo.

Eles devem estudar e conceituar o que é estatística descritiva, o que é uma inferência estatística e o que pode ser feito com base nos textos disponíveis no próprio volume. Além disso, devem ser capazes de criar planilhas que gerem números aleatórios. Para isso, pode ser interessante um exercício inicial de utilização dessa função.

Uma opção para começar todas essas discussões é, utilizando o conceito de sala de aula invertida, pedir aos alunos que pesquisem o método Monte Carlo de determinação de áreas. Esse é exatamente o método que eles irão investigar no projeto e uma leitura prévia pode despertar a curiosidade deles sobre os conceitos aqui propostos: estatística descritiva, inferência e geradores aleatórios de dados.

2. Realização dos experimentos: dados controlados

Assim que dominarem os conceitos iniciais, os grupos devem começar os experimentos. É possível realizar um de cada vez ou os dois ao mesmo tempo. Aqui propomos que ambos sejam feitos em paralelo.

Nessa primeira fase dos experimentos, os estudantes utilizarão apenas cálculos matemáticos. Para o experimento 1, devem criar uma tabela com todos os resultados possíveis em um lançamento de dois dados idênticos,

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

determinando a probabilidade de ocorrência de cada resultado. Para o experimento 2, devem desenhar um círculo em uma malha quadriculada e determinar a razão entre a área do círculo e a área da malha.

Oriente os alunos nesses cálculos. No caso dos dados, eles devem considerar os pares $(a;b)$ e $(b;a)$ como idênticos. Assim, nos pares em que $a = b$, a probabilidade de ocorrência será $\frac{1}{36}$, enquanto nos outros casos a probabilidade será $\frac{1}{18}$. No caso do círculo na malha quadriculada, eles devem manter uma margem externa ao círculo da largura de, no mínimo, um ou dois quadrados. A área da malha pode ser obtida por contagem dos quadrados (que pode ser feita unitariamente ou por multiplicação retangular) e a área do círculo pode ser aproximada por contagem dos quadrados (tomando o cuidado de estimar quantos "pedaços" de quadrado serão contados como um quadrado inteiro e quantos serão desconsiderados) ou pela fórmula da área do círculo, obtendo-se a medida do raio pela aproximação da quantidade de lados do quadrado que compõem esse segmento.

3. Realização dos experimentos: dados estatísticos

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

O passo seguinte é a pesquisa estatística. Auxilie os grupos para que a obtenção das informações seja a mais acurada possível. No caso do lançamento dos dados, cada estudante pode lançar o dado determinada quantidade de vezes e anotar os resultados em uma planilha compartilhada, assim todos terão acesso a uma amostra maior. Entretanto, por uma questão de rigor matemático, é importante que todos lancem o mesmo par de dados. Senão, não será possível saber se algum dos dados usados nos lançamentos é um dado viciado. Já no caso dos grãos sobre as folhas, cada grupo deve fazer o próprio experimento, criando estratégias próprias de contagem dos grãos, contados diretamente sobre a folha (o que pode ser complicado, considerando que qualquer movimentação dos grãos pode implicar o reinício da contagem) ou fotografando a folha e contando os grãos na imagem. De qualquer forma, oriente os grupos para numerar as linhas e colunas: essa estratégia facilita bastante a contagem parcial, evitando a recontagem caso o contador se perca em algum ponto do registro.

4. Realização dos experimentos: dados estatísticos virtuais

Nessa última etapa do experimento, os alunos deverão manipular algoritmos, planilhas eletrônicas e fluxogramas, utilizando o pensamento computacional para reproduzir virtualmente os experimentos feitos anteriormente.

Auxilie os estudantes no uso das funções que geram dados aleatórios e contam valores iguais em planilhas eletrônicas.

Os conhecimentos estatísticos empregados serão os mesmos, mas a tecnologia pode extrapolar os dados para ampliar a amostra tanto quanto se queira. Essa etapa será essencial para que eles consigam responder à questão disparadora. Para isso, verifique se todos responderam corretamente às questões propostas nas outras etapas do projeto, compartilhando as respostas dos grupos entre eles e propondo uma avaliação coletiva. A garantia desse alinhamento será importante para que todos elaborem um bom relatório final, garantindo que as conclusões sejam proveitosas mesmo que alguns experimentos não funcionem como o esperado.

5. Apresentação

Essa etapa final deve ser feita de forma compartilhada: ao observar e discutir as apresentações dos dados e as conclusões dos outros grupos, cada estudante estará mais capacitado para argumentar e relacionar os projetos com os conhecimentos estatísticos trabalhados no volume.

Projeto 2

Objetivo

- Analisar resultados de pesquisas, visando comparar dados e tirar conclusões, avaliando possíveis conclusões erradas que podem ser obtidas com base em informações verdadeiras.

Competências específicas de Matemática: 1, 3, 4 e 5

Habilidades

EM13MAT101: Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT104: Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

EM13MAT106: Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

EM13MAT310: Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

EM13MAT312: Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

EM13MAT407: Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*boxplot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

EM13MAT511: Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Orientações ao professor

A elaboração e análise de relatórios estatísticos provavelmente será constante na vida profissional da maior parte dos estudantes. Mesmo que suas escolhas profissionais não envolvam diretamente esse tipo de ferramenta, é muito provável que entrem em contato com ela em algum momento. Assim, compreender dados e relatórios estatísticos é essencial para a leitura da sociedade, seja analisando informações do cotidiano, seja interpretando gráficos divulgados pela mídia com dados de sua região, seu país, do planeta ou da humanidade.

Soma-se a isso o fato de que a Probabilidade e a Estatística são ciências que, muitas vezes, propõem ideias contraintuitivas. Assim, ao estudar essas áreas, é preciso não só construir conceitos como também desmistificar ideias falsas que podem ser erroneamente consideradas verdadeiras. É esse o caso das ideias estudadas nesse projeto. É preciso levar os estudantes à conclusão de que, quando duas variáveis são dependentes, não podemos afirmar que uma é causadora da outra. Por exemplo, quando um evento A ocorre mais vezes caso um evento B tenha ocorrido antes, muitas coisas podem explicar o fato, como:

- B pode causar o aumento de ocorrências de A;
- B pode causar um evento C que causa o aumento de ocorrências de A;
- um evento C pode ser simultaneamente causador tanto de B quanto do aumento de ocorrências de A.

Assim, para começar esse projeto, traga para a sala diferentes relatórios ou artigos que apresentem dados compilados e proponha uma discussão inicial sobre eles, a fim de que os estudantes percebam que nem sempre é simples tirar conclusões da análise desses dados. Dessa discussão inicial, é possível discutir a questão disparadora:

Que cuidados devemos ter ao interpretar o comportamento de variáveis que apresentam relação de dependência?

Depois dessa conversa, organize a turma em grupos e combine um cronograma para a realização do projeto. Isso pode ser feito com os estudantes por meio de uma leitura coletiva da descrição do projeto: contexto, desenvolvimento, produto, apresentação e relatório conclusivo. O cronograma deve conter, além do encontro inicial, as etapas a seguir.

1. Conceitos iniciais

Para em[illegible]os, convém que, n[illegible]nto, todos acessem e discutam coletivamente tanto os gráficos do livro quanto o Atlas Brasil, do qual os dados geradores dos gráficos foram obtidos. É essencial fazer uma investigação inicial com os estudantes sobre as formas de seleção e obtenção dos dados do Atlas. Por exemplo, proponha que sigam um roteiro simples, abaixo descrito.

- Acesse: http://atlasbrasil.org.br/2013/pt/consulta/ (o *link* leva diretamente à área de consulta do Atlas; acesso em: 8 set. 2020).
- Em "Especialidade", selecione "Estados" e, em seguida, seu estado natal. Clique em "ok".
- Em "Indicadores", selecione "Educação", "Todos" e "Taxa de frequência líquida ao médio".
- Observe o resultado. Passando o cursor sobre o título da taxa, aparecerá o que ela significa: é a porcentagem de jovens entre 15 e 17 anos que estão no Ensino Médio.

Depois desse estudo, proponha uma discussão coletiva sobre a probabilidade condicional apresentada no livro. Verifique se todos compreendem que os eventos dependentes estudados não mostram nenhuma relação de causa e consequência. Logicamente, o local de nascimento de um indivíduo não é capaz de alterar sua expectativa de vida: são as condições sociais nas quais ele está inserido que alteram essa variável. Essas condições são construídas de forma diferente nas regiões devido a contextos históricos diversos. Estes sim podem ser estudados para se obter alguma relação de causa.

2. Leitura de dados

Assim que dominarem os conceitos iniciais e as formas de acesso aos dados do Atlas, os grupos deverão fazer a própria análise de dados.

Acompanhe-os na escolha das variáveis que analisarão e cuide para que escolham eventos cujas probabilidades eles serão capazes de calcular. Ao organizar o cronograma do projeto, se possível, proponha que essa etapa seja realizada antes da etapa 1 para contextualizar o estudo de probabilidades simples. Apenas após o estudo das probabilidades condicionais será possível concluir essa etapa do projeto.

Depois da escolha das variáveis que analisarão e dos eventos cujas probabilidades calcularão, eles deverão estudar a dependência entre os eventos por meio do cálculo da probabilidade condicional entre eles.

3. Estudo de dados

O passo seguinte é a análise dos dados da reportagem. Pode ser interessante fazer

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

uma análise coletiva do exemplo dado no texto projeto: "Em 2018, 47,3% das pessoas ocupadas pretas ou pardas estavam em trabalhos informais, segundo o estudo do IBGE" (AFONSO, 2019).

Analisando a sentença, eles devem perceber que a probabilidade condicional de uma pessoa estar em trabalho informal, dado que ela é negra, é de 47,3%. Sabendo que a probabilidade de uma pessoa escolhida aleatoriamente ser negra é de 56,1%, eles podem concluir que a probabilidade de uma pessoa escolhida aleatoriamente ser negra e estar em trabalho informal é de: $47{,}3\% \cdot 56{,}1\% = 26{,}5353\%$.

Com base nesse exemplo, eles devem propor a análise de outros dados da reportagem. Entretanto, mais do que selecionar dados, é essencial que consigam transferir o conhecimento adquirido na etapa anterior para esses novos dados, reconhecendo que a dependência entre os eventos não configura relação de causa e dependência.

Se possível, compartilhe a condução dessa etapa com os docentes da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas promovendo um debate das reais causas históricas das discrepâncias entre as participações de negros e brancos em algumas esferas sociais. Esse debate deve levar à conclusão de que a cor da pele não é causadora dessas discrepâncias, mas sim os fatores históricos, que causam tanto as discrepâncias quanto a associação das desigualdades à cor da pele.

4. Apresentação

No final, proponha que os relatórios sejam compartilhados em um ambiente real ou virtual para que todos os grupos possam conhecer o trabalho dos colegas.

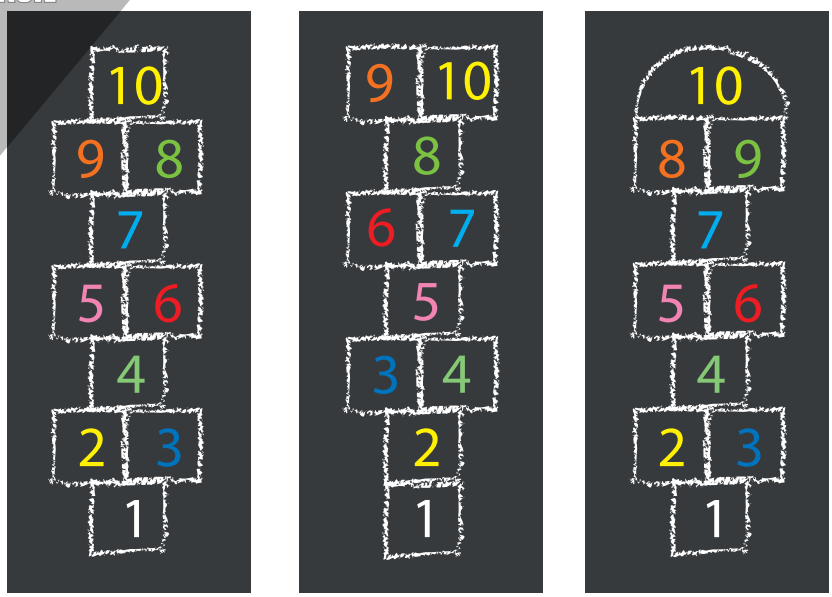
O acesso a esses trabalhos pode ocasionar um novo debate, de modo que a turma faça uma avaliação coletiva não só da aprendizagem proporcionada pelo projeto acerca dos conceitos de probabilidade e estatística como também dos impactos dela na capacidade dos estudantes de ler e atuar na sociedade.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Atividade 1

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

Resolva esta atividade em grupo.



Reinaldo Vignati

Fonte: YOUCUBED. Amarelinha maluca. [*S. l.*]: YouCubed, [20--?]. Disponível em: https://www.youcubed.org/pt-br/resources/amarelinha-maluca-2o-ano-ef-3a-serie-em-video/?utm_campaign=mm_newsletter_youcubed_9&utm_medium=email&utm_source=RD+Station. Acesso em: 13 ago. 2020.

Quantos são os modos possíveis de reorganizar os números em uma amarelinha? Em quantos deles a brincadeira ainda é possível?

Se o número 1 não estiver perto do 2, se o 3 não estiver perto do 4, e assim por diante, é provável que a brincadeira não dê certo. Quais fatores são decisivos nesse sentido?

Quantas amarelinhas praticáveis você consegue montar?

Comentários:

Essa é uma atividade de exploração que pode ser proposta antes de iniciar o estudo da Unidade 2. Assim, os estudantes têm a oportunidade de elaborar estratégias de resolução para problemas de contagem. Durante o desenvolvimento da unidade, o problema pode ser retomado à medida que os alunos forem identificando possibilidades de aplicação dos conteúdos estudados. Você pode encontrar mais sugestões de exploração para esse problema em: YOUCUBED. Amarelinha maluca. [*S. l.*]: YouCubed, [20--?]. Disponível em: https://www.youcubed.org/pt-br/resources/amarelinha-maluca-2o-ano-ef-3a-serie-em-video/?utm_campaign=mm_newsletter_youcubed_9&utm_medium=email&utm_source=RD+Station. Acesso em: 13 ago. 2020.

Atividade 2

1ª parte: individual

Em um *show* de televisão, é apresentado um quadro em que há três portas fechadas. Em uma delas, há um prêmio; as outras duas estão vazias. Você é sorteado para tentar ganhar o prêmio abrindo apenas uma porta. Depois que você escolhe uma das portas, que continua fechada, o apresentador, que sabe em que porta está o prêmio, abre uma das portas restantes, que está vazia, e pergunta: Você deseja manter a porta escolhida ou quer mudar de porta?

O que você deve fazer? Explique matematicamente como pensou.

2ª parte: em duplas

Reúna-se com um colega e, juntos, façam o experimento 20 vezes mantendo a porta escolhida e 20 vezes mudando a escolha. Vocês podem usar 3 copinhos de café descartáveis e um grão de feijão. Anotem os resultados em uma tabela.

Comentários:

Esta atividade pode ser proposta antes de os alunos iniciarem a **Unidade 3** para que a resolvam usando os conhecimentos trazidos do Ensino Fundamental.

1ª parte

Depois de os estudantes resolverem individualmente o problema, solicite que apresentem suas soluções e os respectivos argumentos. Encaminhe, então, uma discussão com a turma. Em seguida, mostre a solução.

Esse é o clássico problema de Monty Hall (veja em: https://www.youtube.com/watch?v=Hh7pDPnKK-4; acesso em: 14 ago. 2020). À primeira vista, parece que a chance de acertar, mudando ou não de porta, é de 50%. Entretanto, não é isso que acontece.

Inicialmente, a chance de acerto em cada porta é de 1/3. Ao escolher uma das portas, a chance de o prêmio estar em uma das duas não escolhidas é de 2/3; sendo 1/3 para cada porta. Quando o apresentador abre uma porta vazia, a chance de o prêmio estar na outra porta, não escolhida anteriormente, passa a ser de 2/3.

2ª parte

Peça aos estudantes que façam o experimento proposto. Um aluno esconde o grão de feijão dentro do copinho sem que o outro veja. O colega então faz a escolha. Incentive-os a refazer o experimento aumentando o número de copinhos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

REFERÊNCIAS

AFONSO, Nathália. Dia da Consciência Negra: números expõem desigualdade racial no Brasil. *Folha de S.Paulo*, São Paulo, 20 nov. 2019. Disponível em: https://piaui.folha.uol.com.br/lupa/2019/11/20/consciencia-negra-numeros-brasil/. Acesso em: 19 ago. 2020.

BUSSAB, Wilton de O.; MORETTIN, Pedro A. *Estatística básica*. 5. edição. São Paulo: Saraiva, 2002.
A primeira parte desse livro trata da análise de dados unidimensionais e bidimensionais, com ênfase em métodos gráficos. A segunda aborda os conceitos básicos de probabilidades e variáveis aleatórias. Na terceira e última parte, são apresentados os tópicos principais da inferência estatística, além de alguns temas especiais, como regressão linear simples.

COUTINHO, Cileda (org.). *Discussões sobre o ensino e a aprendizagem da probabilidade e da estatística na Escola Básica*. Campinas: Mercado de Letras, 2013.
Esse livro contém atividades que podem ser desenvolvidas com os alunos acompanhadas de discussões que justificam sua aplicação.

LOPES, Celi E. (org.). *Os movimentos da educação estatística na Escola Básica e no Ensino Superior*. Campinas: Mercado de Letras, 2014. (Coleção Educação Estatística).
Nessa obra, você encontra reflexões sobre a formação de professores e sobre o processo de aprendizagem dos alunos em todos os níveis de escolaridade.

LOPES, Celi; COUTINHO, Cileda; ALMOULOUD, Saddo (org.). *Estudos e reflexões em educação estatística*. Campinas: Mercado de Letras, 2010.
Esse livro aborda o ensino de Estatística, de probabilidade e de combinatória preconizados em documentos curriculares atuais, de âmbito nacional, voltados para a Educação Básica.

LOPES, Celi; MENDONÇA, Luzinete O. (org.). *Trilhas investigativas em educação estatística narradas por professores que ensinam Matemática*. Campinas: Mercado de Letras, 2017.
Nessa obra, são apresentados e discutidos seis projetos que exploram conteúdos estatísticos idealizados por professores do Ensino Fundamental. Os professores relatam os avanços dos estudantes ao assumirem o papel de protagonistas na construção do conhecimento.

MLODINOW, Leonard. *O andar do bêbado*: como o acaso determina nossas vidas. Tradução: Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.
Nesse livro, o autor, que é físico, fornece os mais diferentes exemplos para mostrar como várias situações da vida cotidiana são determinadas, em larga escala, por eventos imprevisíveis.

PEREIRA, Fernanda A.; RODRIGUES, Chang Kuo; SOUZA, Fabiano dos Santos. Pesquisa sobre variabilidade na educação estatística: uma revisão sistemática da literatura. *Zetetiké*, Campinas, v. 28, p. 1-14, 2020. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8656884/22068. Acesso em: 31 jul. 2020.
Esse artigo trata da revisão de literatura desenvolvida para analisar pesquisas que apresentam recursos que auxiliam no processo de ensino e aprendizagem de conceitos envolvendo o estudo da variabilidade.

SOUZA, F. dos S. Ensino de probabilidade e estatística por meio da análise exploratória de dados e resolução de problemas. *Revista internacional de educação superior*, Campinas, v. 5, p. 1-20, 2019. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/riesup/article/view/8652708. Acesso em: 31 jul. 2020.
Nesse artigo, o autor relata uma pesquisa cujos resultados mostram que o ensino de probabilidade e estatística, quando realizado por meio da metodologia da resolução de problemas e da análise exploratória de dados, proporciona a construção do letramento estatístico.

VAN DE WALLE, John. *Matemática no Ensino Fundamental*: formação de professores e aplicação em sala de aula. Porto Alegre: Artmed, 2009.
Esse livro oferece sugestões de como tornar a Matemática significativa para estudantes e professores, propondo um trabalho voltado para a compreensão e o desenvolvimento de habilidades. O capítulo 22 aborda o tratamento e a análise de dados e o capítulo 23 refere-se à probabilidade.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

ENTRE AÇÃO

MATEMÁTICA

A ESTATÍSTICA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR MEIO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

Luciana Maria Tenuta de Freitas (Coordenação)

Mestre em Ensino de Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC-Minas)

Bacharel e licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Assessora pedagógica da Educação Básica, com atuação na formação de professores

Adilson Longen

Doutor em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Mestre em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Professor do Ensino Médio

Rodrigo Morozetti Blanco

Mestre em Matemática com linha de pesquisa em Filosofia da Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat)

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP)

Professor da Educação Básica com atuação na formação de professores

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Ensino Médio

1ª edição
São Paulo, 2020

Editora do Brasil

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Longen, Adilson
Interação matemática : a estatística e a resolução de problemas por meio de análise combinatória e probabilidade / Adilson Longen, Rodrigo Morozetti Blanco ; coordenação Luciana Maria Tenuta de Freitas. -- 1. ed. -- São Paulo : Editora do Brasil, 2020. -- (Interação)

ISBN 978-85-10-08362-1 (aluno)
ISBN 978-85-10-08363-8 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) 2. Matemática e suas tecnologias (Ensino médio) I. Blanco, Rodrigo Morozetti. II. Freitas, Luciana Maria Tenuta de. III. Título. IV. Série.

20-42647 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

© Editora do Brasil S.A., 2020
Todos os direitos reservados

Direção-geral: Vicente Tortamano Avanso

Direção editorial: Felipe Ramos Poletti
Gerência editorial: Erika Caldin
Supervisão de arte: Andrea Melo
Supervisão de editoração: Abdonildo José de Lima Santos
Supervisão de revisão: Dora Helena Feres
Supervisão de iconografia: Léo Burgos
Supervisão de digital: Ethel Shuña Queiroz
Supervisão de controle de processos editoriais: Roseli Said
Supervisão de direitos autorais: Marilisa Bertolone Mendes

Supervisão editorial: Rodrigo Pessota
Consultoria técnico-pedagógica: Eduardo Wagner e Maria Cristina Bonomi
Edição: Adriana Soares Netto, Daniel Leme, Everton José Luciano, Katia Simões de Queiroz e Marcos Gasparetto de Oliveira
Assistência editorial: Juliana Bomjardim, Viviane Ribeiro e Wagner Razvickas
Especialista em copidesque e revisão: Elaine Silva
Copidesque: Gisélia Costa, Ricardo Liberal e Sylmara Beletti
Revisão: Amanda Gabral, Andreia Andrade, Fernanda Almeida, Fernanda Sanchez, Flávia Gonçalves, Gabriel Ornelas, Jonathan Busato, Mariana Paixão, Martin Gonçalves e Rosani Andreani
Pesquisa iconográfica: [illegible]
Assistência de arte: Daniel Souza
Design gráfico: Talita Lima
Capa: Megalo Design
Imagem de capa: AndrewJohnson/iStockphoto.com, AnthonyRosenberg/iStockphoto.com, Devonyu/iStockphoto.com, DmitriyKazitsyn/iStockphoto.com, MADDRAT/iStockphoto.com, malerapaso/iStockphoto.com, matejmo/iStockphoto.com, Prostock-Studio/iStockphoto.com, Sergio Delle Vedove/iStockphoto.com e unkas_photo/iStockphoto.com
Edição de arte: Paula Coelho e Talita Lima
Ilustrações: Dawidson França, Mauro Salgado, Reinaldo Vignati e Tarcísio Garbellini
Editoração eletrônica: JS Design
Licenciamentos de textos: Cinthya Utiyama, Jennifer Xavier, Paula Harue Tozaki e Renata Garbellini
Controle de processos editoriais: Bruna Alves, Carlos Nunes, Rita Poliane, Terezinha Oliveira e Valéria Alves

1ª edição, 2020

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Editora do Brasil

Rua Conselheiro Nébias, 887
São Paulo/SP – CEP 01203-001
Fone: +55 11 3226-0211
www.editoradobrasil.com.br

Começo de CONVERSA

A etapa do Ensino Médio é um desafio na vida de todo estudante. Especialmente neste momento, com as mudanças trazidas pelo Novo Ensino Médio, os desafios se acentuam e se tornam mais complexos.

A ideia deste novo modelo é que as aprendizagens escolares capacitem os estudantes para que, ao final dessa etapa de escolaridade, estejam aptos a atuar, com competência e responsabilidade, na sociedade em que vivem.

Para isso, é importante que você se aproprie dos conhecimentos escolares como uma das diversas formas de leitura da realidade, utilizando-os como ferramentas para intervir, de forma consciente e responsável, nessa realidade.

O Novo Ensino Médio

O Novo Ensino Médio está organizado em quatro áreas de conhecimento: **Linguagens e suas Tecnologias**, **Matemática e suas Tecnologias**, **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** e **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**.

De acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM)[1], os novos currículos são compostos de duas partes que se integram e se complementam: a **formação geral básica** e os **itinerários formativos**.

Na **formação geral básica**, "os currículos e as propostas pedagógicas devem garantir as aprendizagens essenciais definidas na BNCC", contemplando de modo integrado e articulado as quatro áreas de conhecimento. (BRASIL, 2018, p. 476.)

Os **itinerários formativos** possibilitam aos estudantes fazer escolhas que irão compor seu currículo. Eles dialogam com as áreas de conhecimento, uma vez que quatro deles estão diretamente ligados a cada uma dessas áreas: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Além desses, um quinto itinerário contempla a formação técnica e profissional.

Os itinerários formativos são orientados por meio de cinco eixos estruturantes:

I. investigação científica: supõe o aprofundamento de conceitos fundantes das ciências para a interpretação de ideias, fenômenos e processos para serem utilizados em procedimentos de investigação voltados ao enfrentamento de situações cotidianas e demandas locais e coletivas, e a proposição de intervenções que considerem o desenvolvimento local e a melhoria da qualidade de vida da comunidade;

II. processos criativos: supõem o uso e o aprofundamento do conhecimento científico na construção e criação de experimentos, modelos, protótipos para a criação de processos ou produtos que atendam a demandas para a resolução de problemas identificados na sociedade;

III. mediação sociocultural: supõem a mobilização de conhecimentos de uma ou mais áreas para mediar conflitos, promover entendimento e implementar soluções para questões e problemas identificados na comunidade;

IV. empreendedorismo: supõe a mobilização de conhecimentos de diferentes áreas para a formação de organizações com variadas missões voltadas ao desenvolvimento de produtos ou prestação de serviços inovadores com o uso das tecnologias (Resolução CNE/CEB nº 3/2018, Art. 12, § 2º). (BRASIL, 2018, p. 478-479.)

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Isaeva Anna/Shutterstock.com

1 BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. Parecer nº 3, de 8 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, observadas as alterações introduzidas na LDB pela Lei nº 13.415/2017. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, p. 49, 21 nov. 2018.

A BNCC e o Ensino Médio

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) está estruturada em **dez competências gerais** que devem ser desenvolvidas pelos estudantes desde a Educação Infantil até o Ensino Médio.

Cada uma das quatro áreas de conhecimento está definida por meio de **competências específicas** que se articulam às competências gerais. No caso da área de Matemática e suas Tecnologias, são cinco competências específicas, e cada uma delas se desdobra em um conjunto de habilidades que devem ser desenvolvidas ao longo dos três anos do Ensino Médio (BRASIL, 2018, p. 531).

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Nesse novo contexto, a palavra-chave passa a ser **flexibilidade**. Essa é a característica da coleção de Matemática que você tem em mãos. Esta coleção foi escrita para atender à **formação geral básica**, e a flexibilidade é seu eixo condutor.

elenabsl/Shutterstock.com

De acordo com o que propõe a BNCC, o desenvolvimento das habilidades e competências no Ensino Médio está articulado às "aprendizagens essenciais estabelecidas para o Ensino Fundamental".

> A área de Matemática, no Ensino Fundamental, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade (BRASIL, 2018, p. 471).

Sendo assim, as atividades desta coleção foram pensadas para que você possa ter experiências que o levem a desenvolver um pensamento matemático consistente, estabelecendo o maior número possível de relações, ao mesmo tempo que aplica esse conhecimento a outras disciplinas e a situações do mundo real. Esse processo, que visa a uma aprendizagem profunda dos conceitos matemáticos, também o prepara para avaliações de acesso às universidades, se essa for sua opção.

Por meio de atividades diversificadas, que envolvem resolução e elaboração de problemas, você terá a oportunidade de discutir com os colegas, levantar hipóteses, argumentar, defender suas ideias, mudar de ideia com base na argumentação do colega e, assim, desenvolver a empatia e o respeito pelo outro, que vão contribuir para sua formação humana, contemplando o desenvolvimento das competências gerais expressas na BNCC.

As atividades envolvem investigação de propriedades matemáticas, produção de textos relatando a conclusão das investigações, análise de gráficos e tabelas envolvendo situações cotidianas, modelagem para resolução de problemas reais, desenvolvimento de projetos etc. usando ou não a tecnologia. Dessa forma, você poderá desenvolver sua autonomia intelectual e pensamento crítico, fundamentais para contribuir na construção de "uma sociedade mais justa, ética, democrática, inclusiva, sustentável e solidária" (BNCC, 2018, p. 466).

Você está sendo chamado a ser **protagonista** de todo o processo de aprendizagem da Matemática ao longo do Ensino Médio. Esperamos que aproveite essa oportunidade.

Para conhecer um pouco mais a Base Nacional Comum Curricular, consulte: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ (acesso em: 7 maio 2020).

Objetivos e justificativas deste volume

Unidades	Objetivos	Justificativa	Competências e habilidades da BNCC
1. Estatística Descritiva	• Interpretar criticamente situações socioeconômicas utilizando medidas de tendência central e medidas de dispersão. • Analisar criticamente a distribuição normal e medidas de posição. • Calcular e analisar medidas de tendência central (média, moda e mediana). • Calcular e analisar medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio-padrão). • Construir e analisar gráficos e diagramas estatísticos (histogramas, diagrama de caixa, ramos e folhas).	O desenvolvimento de habilidades que envolvem a Estatística Descritiva por meio da exploração de situações reais permite aos estudantes interpretar e compreender tanto os textos científicos quanto os que são divulgados pela mídia. Essa compreensão contribui para a tomada de decisões relativas a situações cotidianas nos mais diversos aspectos.	Gerais: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9 e 10 Matemática e suas Tecnologias: 2, 3 e 4 Habilidades: EM13MAT202 EM13MAT316 EM13MAT406 EM13MAT407
2. Análise combinatória	• Empregar diagrama da árvore na resolução de problemas de contagem. • Diferenciar problemas de contagem em que a ordem dos elementos influencia no total de possibilidades daqueles problemas em que a ordem dos elementos não influencia. • Calcular o número de possibilidades de ocorrência de um evento utilizando estratégias de arranjo, combinação, permutação simples e permutação com repetição. • Utilizar o princípio aditivo de contagem para resolver problemas. • Utilizar o princípio multiplicativo de contagem para resolver problemas. • Elaborar situações de contagem que possam ser resolvidas pelo princípio aditivo ou pelo princípio multiplicativo.	A construção de modelos que empregam estratégias de cálculo nas quais a ordem dos elementos pode ou não influenciar o resultado possibilita resolver problemas de variados contextos que envolvem contagem dos elementos de determinado conjunto.	Gerais: 2, 4, 5 e 9 Matemática e sus Tecnologias: 3 e 4 Habilidades: EM13MAT310 EM13MAT315 EM13MAT405

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Viktoria Kurpas/Shutterstock.com

Unidades	Objetivos	Justificativa	Competências e habilidades da BNCC
3. Probabilidades	• Identificar no cotidiano situações de uso de probabilidades. • Reconhecer diferentes tipos de espaços amostrais (discretos ou não). • Calcular a probabilidade condicional de dois eventos simultâneos. • Identificar e descrever o espaço amostral em diferentes experimentos aleatórios. • Elaborar e resolver situações relacionadas com o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios. • Reconhecer eventos independentes em situações relacionadas a eventos equiprováveis consecutivos. • Diferenciar eventos dependentes de eventos independentes em experimentos aleatórios. • Calcular a quantidade de elementos do evento e do espaço amostral utilizando contagem das possibilidades relacionadas à análise combinatória.	As noções de probabilidade constituem ferramentas básicas que possibilitam aos estudantes compreender informações que envolvem riscos para que possam se posicionar, tomar decisões e fazer escolhas em diferentes aspectos de sua vida pessoal e da coletividade.	Gerais: 1, 2, 4, 7, e 9 Matemática e suas Tecnologias: 1, 3 e 5 Habilidades: EM13MAT106 EM13MAT311 EM13MAT312 EM13MAT511
Conexões & projetos	• Compreender a relação entre modelos estatísticos e situações reais por meio de uma sequência de experimentos matemáticos, bem como se apropriar dessa relação. • Analisar resultados de pesquisas visando comparar dados e tirar conclusões, avaliando possíveis conclusões erradas que podem ser obtidas com base em informações verdadeiras.	Os projetos propostos possibilitam aos alunos colocar em ação de forma articulada as habilidades trabalhadas nas unidades deste volume.	Gerais: 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 Matemática e seus Tecnologias: 1, 2, 3, 4 e 5 Habilidades: EM13MAT101 EM13MAT104 EM13MAT106 EM13MAT202 EM13MAT203 EM13MAT310 EM13MAT311 EM13MAT312 EM13MAT315 EM13MAT316 EM13MAT406 EM13MAT407 EM13MAT511

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Gearstd/Shutterstock.com

SUMÁRIO

UNIDADE 1 **Estatística Descritiva** 10

1. Tópicos de Estatística Descritiva 12
Linguagem estatística 14
Fazendo uma pesquisa estatística 21
Realização de uma pesquisa estatística em todas as suas etapas 23
Medidas de tendência central 23
Média 24
Moda 29
Mediana 30
Medidas de dispersão 35
Amplitude total 35
Variância e desvio-padrão 38
Atividades finais 48

Mauro Salgado

UNIDADE 2 **Análise combinatória** 50

1. Princípios de contagem 52
Problemas iniciais de contagem 53
Princípio multiplicativo 56
Fatorial de um número natural 60
Agrupamentos 62
Permutação simples 63
Permutação com repetição 68
Arranjos simples 72
Combinação simples 76
Aproveitando a oportunidade: O triângulo de Pascal e os números binomiais 82
Atividades finais 84

Hedzun Vasyl/Shutterstock.com

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

UNIDADE 3

Probabilidades 86

1. Probabilidade 88
Espaço amostral e evento 91
Probabilidade 96
Propriedades das probabilidades 103
Adição de probabilidades 108
Probabilidade condicional 111
Multiplicação de probabilidades 115

2. Probabilidades e Estatística 121
Obtenção de uma curva 124
Atividades finais 128

Jose Gil/Shutterstock.com

Milos Muller/Shutterstock.com

CONEXÕES & PROJETOS

A ciência da incerteza 130

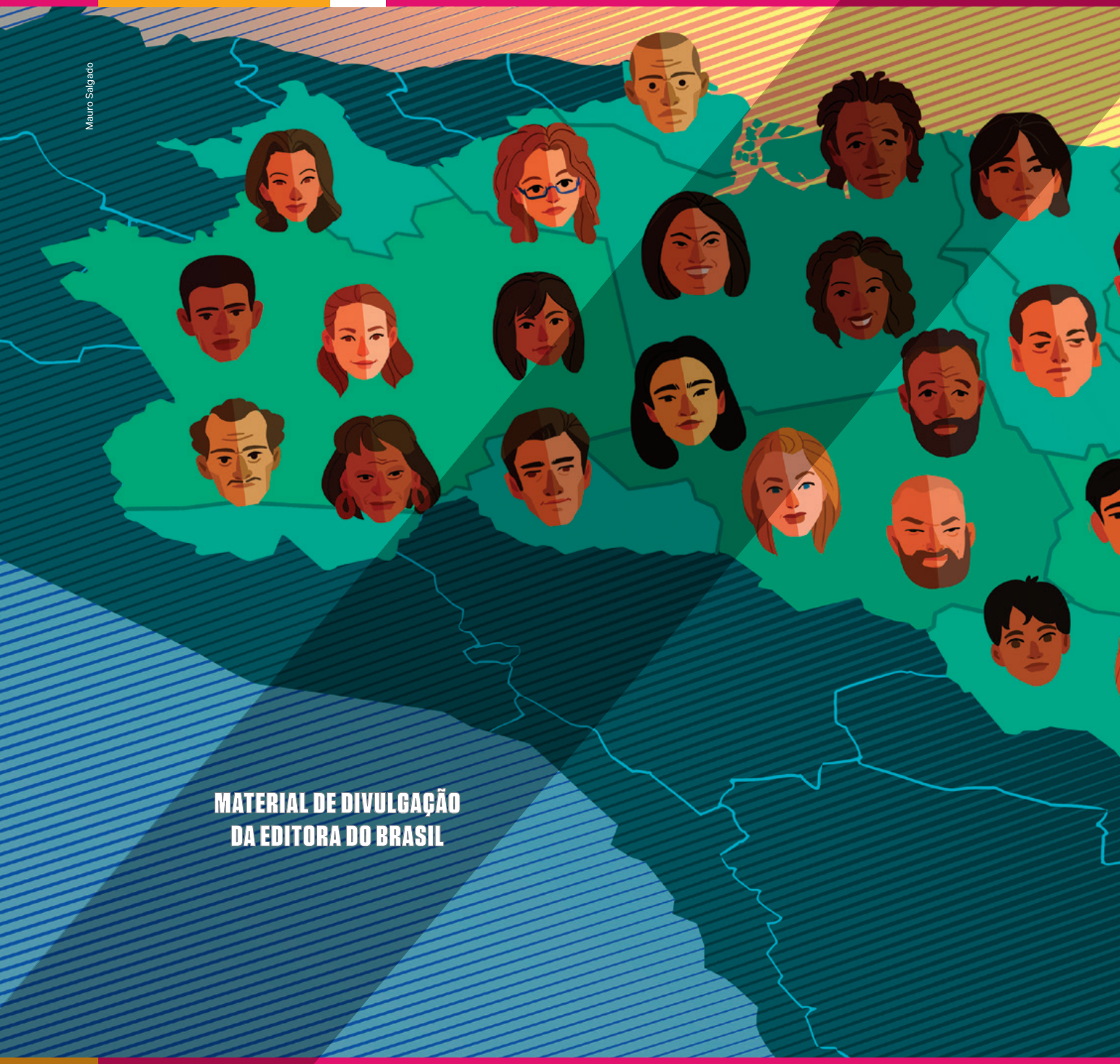
Patty Chan/Shutterstock.com

Projeto 1
Previsão de resultados 132

Projeto 2
Relatórios estatísticos 136

Caixa de ferramentas 140
Gabarito 155
Competências gerais da BNCC 156
Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC 156
Referências 159

UNIDADE 1



Mauro Salgado

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

ESTATÍSTICA DESCRITIVA

Um país de diferentes etnias.

Nesta unidade, você vai:

- interpretar criticamente situações socioeconômicas utilizando medidas de tendência central e medidas de dispersão;
- analisar criticamente a distribuição normal e medidas de posição;
- calcular e analisar medidas de tendência central (média, moda e mediana);
- calcular e analisar medidas de dispersão: amplitude, variância e desvio-padrão;
- construir e analisar gráficos e diagramas estatísticos (histogramas, diagrama de caixa, ramos e folhas).

O IDH do Brasil

O Brasil é um país com território continental. Tem uma população formada por várias etnias. Tradições e costumes são diferentes de estado para estado; sotaques os mais variados possíveis; climas diversos. A distribuição das rendas, as expectativas de vida e o grau de escolarização são muito diferentes de região para região. Segundo um relatório do IBGE, o IDH do Brasil em 2018 foi de 0,761, ocupando a 79ª posição no *ranking* dos países. Nesse documento concluiu-se que quase um terço de todas as riquezas do Brasil estão concentradas nas mãos da população que compõe o 1% mais rico.

1. O que mede o IDH de um país? Qual é sua função? Pesquise!

2. Como a afirmação de que "1% da população brasileira concentra praticamente um terço das riquezas" impacta o restante da população?

1. Espera-se que os estudantes reflitam sobre o fato de que esse índice mede o desenvolvimento humano de um país. Sua utilidade está na tomada de decisões por parte dos dirigentes no sentido de melhorar a distribuição de renda e a questão da saúde para que haja uma maior expectativa de vida, além de investir mais na educação (escolarização).

2. Resposta pessoal.

1 Tópicos de Estatística Descritiva

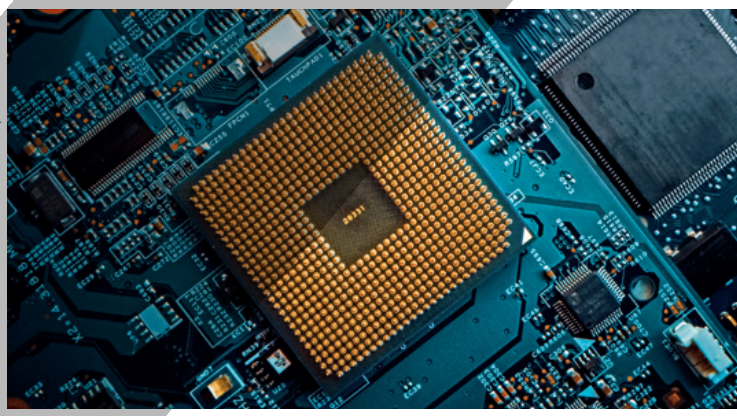
Na BNCC

Neste tópico, você vai trabalhar as competências específicas de Matemática e suas tecnologias 2, 3 e 4 e as habilidades EM13MAT202, EM13MAT316, EM13MAT406, EM13MAT407.

Você já viu o equipamento eletrônico ilustrado abaixo? Se esse equipamento está na sua frente, é normal a seguinte pergunta: **O que é isso?** Respondida essa questão, normalmente fazemos outra: **Para que serve?** Quando somos mais curiosos ainda, fazemos uma terceira: **Como podemos utilizá-lo?**

Mas essas três questões não estão associadas apenas a um dispositivo eletrônico. O livro *Estatística – O que é, para que serve, como funciona*, do autor Charles Wheelan, utiliza no próprio título três questões condutoras para tentar esclarecer ao leitor o que vem a ser Estatística: O que é? Para que serve? Como funciona?

Não propomos aqui um estudo completo de Estatística. Queremos que você compreenda melhor esse importante recurso de análise de informações; entenda como os dados gerados numa pesquisa estatística são interpretados; conheça as chamadas medidas de tendência central e as medidas de dispersão.



Gorodenkoff/Shutterstock.com

Modelo de placa utilizada na parte interna de um dispositivo eletrônico. Geralmente, essas placas têm a função de interligar todos os componentes de um dispositivo para que ele possa funcionar com êxito.

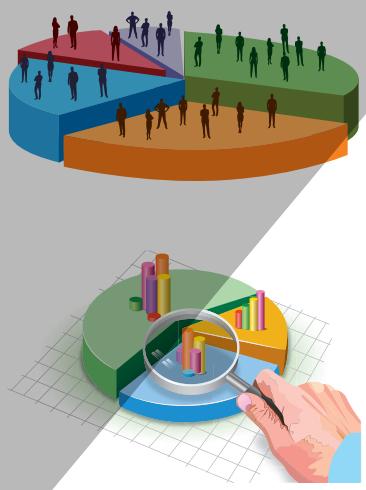
As ilustrações a seguir transmitem a ideia da Estatística como uma maneira de conhecer nossa realidade no país. Os chamados censos demográficos brasileiros apresentam os dados populacionais coletados. Mas é preciso muito mais do que esses dados.

Os dados brutos levantados numa pesquisa acabam nos dando "pistas" sobre uma realidade, que, entretanto, estão desorganizadas. Entra em jogo o tratamento da informação, que processa esses dados, organizando-os. A partir daí, é a análise crítica dessas informações que possibilita alguma conclusão significativa a respeito da pesquisa.

Em diversos momentos do Ensino Fundamental, na disciplina de Matemática, você teve [illegible] elaborar pequenas pesquisas, com a tabulação dos dados e a elaboração de gráficos estatísticos. Para fazer gráficos estatísticos, hoje temos as chamadas **planilhas eletrônicas**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Nosso interesse aqui é a chamada Estatística Descritiva, que nos propicia conhecer um pouco melhor os dados gerados em uma pesquisa e, além disso e mais importante, obter determinadas medidas para "resumir" conjuntos de dados observados. Entram nesse estudo, por exemplo, as chamadas tabelas de frequências e as medidas de tendência central.



Tarcísio Garbellini

Mauro Salgado

Para auxiliar seu trabalho com planilhas eletrônicas, consulte o tópico **Recursos digitais** na **Caixa de ferramentas**.

Sugerimos a leitura do texto a seguir, que, ao abordar aspectos importantes da história da área de conhecimento chamada Estatística, analisa como um conceito surge e enaltece um fato essencial: em geral, não é um personagem isoladamente o responsável por uma criação.

Breve história da Estatística

Desde remota antiguidade, os governos têm se interessado por informações sobre suas populações e riquezas, tendo em vista, principalmente, fins militares e tributários. O registro de informações perde-se no tempo. Confúcio relatou levantamentos feitos na China, há mais de 2 000 anos antes da era cristã. No antigo Egito, os faraós fizeram uso sistemático de informações de caráter estatístico, conforme evidenciaram pesquisas arqueológicas. Desses registros também se utilizaram as civilizações pré-colombianas dos maias, astecas e incas. É conhecido de todos os cristãos o recenseamento dos judeus, ordenado pelo imperador Augusto.

Bridgeman Images/Keystone Brasil

Papiro funerário de Nesmin, produzido entre 380 a.C. e 343 a.C.

[...]

Com o Renascimento, foi despertado o interesse pela coleta de dados estatísticos, principalmente por suas aplicações na administração pública. A obra pioneira de Francesco Sansovini (1521-1586), representante da orientação descritiva dos estatísticos italianos, publicada em 1561, é um exemplo dessa época.

Bridgeman Images/Keystone Brasil

A Estatística foi fundamental na administração pública durante a época do Renascimento, entre os séculos XIV e XVII.

[...]

Entretanto, mais amplos e gerais foram os estudos feitos pelos alemães, especialmente por Gottfried Achenwall (1719--1772), professor da Universidade Göttingen, a quem se atribui ter criado o vocabulário "estatística", em 1746. Contudo, nada mais fizeram do que dar melhor sistematização e definição da mesma orientação descritiva dos estatísticos italianos.

Acreditar nessas atividades como o começo da história da Estatística é deixar de compreender o verdadeiro significado da Estatística. Podemos dizer que o desenvolvimento da Estatística teve origem nas aplicações, pois nenhuma disciplina tem interagido tanto com as demais disciplinas em suas atividades do que ela, dado que é por sua natureza a ciência do significado e do uso dos dados. Daí, sua importância como instrumento auxiliar na pesquisa científica.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

A primeira tentativa de apresentar conclusões a partir de dados numéricos foi feita somente no século 17, na Inglaterra, com o que foi denominado *Aritmética Política*, que evoluiu para o que se chama hoje de demografia. Contudo, só começou realmente a existir como disciplina autônoma no raiar do século 20, o verdadeiro início da Estatística Moderna.

A tentativa acima referida foi feita por John Graunt (1620-1674), um próspero negociante londrino de tecidos que em 1662, publicou um pequeno livro intitulado *Natural and Political Observations Mentioned in a Following Index and Made upon the Bills of Mortality*. Sua análise foi baseada sobre razões e proporções de fatos vitais, nos quais ele observou uma regularidade estatística num grande número de dados. Por seu trabalho foi eleito *Fellow of the Royal Society* (F.R.S.), sociedade científica fundada em 1660, por Carlos II.

Os dados usados por Graunt compreendiam uma série anual de 1604 a 1660, coletados nas paróquias de Londres, de onde ele tirou as seguintes conclusões: que havia maior nascimento de crianças do sexo masculino, mas havia distribuição aproximadamente igual de ambos os sexos na população geral; maior mortalidade nas zonas urbanas em relação às zonas rurais.

Graunt era cônscio de ser leigo no assunto, pois não era médico, nem matemático, nem político, mas apenas uma mente curiosa que utilizou com lógica uma análise, pode-se dizer "científica", dos registros disponíveis sobre mortalidade. Com seus dados, elaborou uma tábua de vida rudimentar, baseada apenas na sobrevivência nas idades de 6 a 76 anos.

Foi William Petty (1623-1683), contemporâneo e continuador de Graunt, quem denominou de Aritmética Política à nova arte de raciocinar por meio de dados sobre fatos relacionados com o governo. Em 1683, ele publicou sua obra *Five Essays on Political Arithmetic* e sugeriu que fosse criada uma repartição de registro de estatísticas vitais, mas isso só se consolidou no século 19, com o Dr. William Farr (1807-1883), contribuidor original da estatística médica. Note-se que a denominação posterior de Estatística acabou por incluir a Estatística Descritiva e a Aritmética Política.

Dos trabalhos desse período, sem dúvida, o mais importante foi o do astrônomo inglês Edmond Halley (1656-1742), que em 1693 construiu a primeira tábua de sobrevivência, elaborada com os registros vitais da cidade alemã de Bresláu (atual Wroclaw, Polônia), referentes ao período de 1687 a 1691, elemento básico para o cálculo de seguros de vida. Embora o seguro comercial tivesse sido praticado pelos babilônios e fosse conhecido dos gregos e dos romanos. Halley é, com justiça, considerado o criador do cálculo atuarial. Deve ser ainda mencionado o nome de Richard Price (1723-1791), o fundador da atuária, na Inglaterra.

MEMÓRIA, José Maria Pompeu. *Breve história da Estatística*. Brasília, DF: Embrapa Informação Tecnológica, 2004. p. 11-14. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~rvicente/JMPMemoria_Historia_Estatistica.pdf. Acesso em: 21 maio 2020.

Antes de você iniciar a discussão que sugerimos a seguir, releia esse texto e, com base nele, trace uma "linha do tempo" que destaque os personagens envolvidos e suas realizações em Estatística.

Para pensar e discutir

Respostas no Manual do Professor.

1. O texto menciona o "verdadeiro significado da Estatística". Analise-o e, depois, responda: Nos dias atuais, como a Estatística pode ser utilizada a favor das pessoas?
2. De acordo com o texto, a primeira tentativa para se tirar conclusões com base em dados numéricos foi denominada **Aritmética Política**. Pensando em como os dados estatísticos são utilizados hoje, escreva um pequeno parágrafo relacionando essa denominação ao uso que se faz, muitas vezes, da Estatística nos dias atuais.
3. Na abertura da unidade, falamos sobre o IDH brasileiro. Para se chegar a esse importante e atual índice, um dos dados refere-se à expectativa de vida das pessoas. Há algum trecho nesse texto histórico em que um levantamento nesse sentido foi feito? Qual?
4. Qual foi a maior motivação de John Graunt nos "levantamentos estatísticos" feitos por ele? Resuma em uma palavra.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Linguagem estatística

Principais produtos deste tema:	
Censo demográfico	PNAD Contínua - Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua
SIS - Síntese de Indicadores Sociais	Sistema de Estatísticas Vitais
POF - Pesquisa de Orçamentos Familiares	Tábuas Completas de Mortalidade
Estimativa da população	Projeções da População
PNAD - Pesquisa Nacional por Amostras de Domicílios	Contagem da População IBGE

Principais produtos deste tema. IBGE. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao.html. Acesso em: 21 abr. 2020.

Vivemos num país continental. Conhecer as condições de vida das pessoas, o grau de escolaridade, a renda familiar, a quantidade de pessoas numa mesma família e tantas outras informações é de interesse geral. Para isso existem os censos demográficos feitos de tempos em tempos pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). É com base neles que autoridades governamentais tomam decisões sobre como direcionar recursos e políticas especiais.

Quando, por exemplo, o tema é "População", a própria página do IBGE indica ao leitor subtemas, como você pode observar ao lado. Caso seja de seu interesse, consulte-os.

O acesso a essas informações nos possibilita conhecer melhor nossa realidade.

Agora, vamos imaginar que você é um empresário que pretende lançar determinado produto no mercado. Recomenda-se que, inicialmente, você faça ou encomende uma pesquisa não apenas em relação ao tipo de produto a ser lançado, mas considerando outros fatores.

1 Sua empresa encomenda uma pesquisa a um instituto especializado.

2 O instituto de pesquisa define o conjunto de pessoas que representam o universo estatístico a ser pesquisado.

3 Como muitas vezes é inviável pesquisar todas as pessoas, o instituto define uma amostra representativa da população a ser pesquisada. Essa escolha da amostra é muito criteriosa para de fato representar essa população.

4 Define-se como os dados serão coletados. Por exemplo, podem ser feitas entrevistas por telefone.

5 Os dados coletados são organizados em tabelas e gráficos por meio de *softwares* para serem analisados. Pode-se também, nesta etapa, calcular as medidas que resumem os dados (médias, desvios etc.).

6 O instituto de pesquisa apresenta à empresa uma análise dos dados, indicando margem de erros, médias, tendências de aceitação do produto a ser lançado.

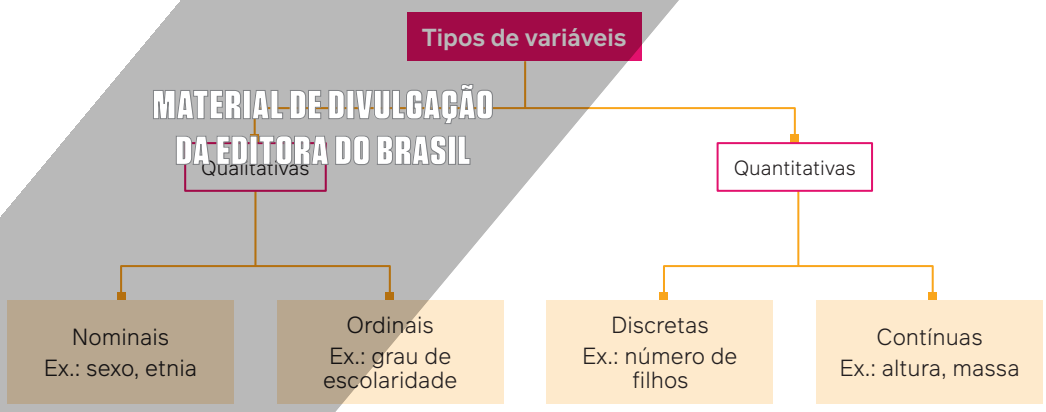
Esse esquema dá uma ideia geral sobre as fases de uma **pesquisa estatística**. Como é um produto a ser lançado no mercado, podem-se definir outras ações nessa pesquisa. Uma delas seria analisar os possíveis concorrentes ao produto em questão.

Uma observação importante diante de uma pesquisa é que cada um dos itens investigados é chamado de variável. São exemplos de variáveis:

- estado civil;
- idade;
- renda mensal;
- cor predileta;
- atividade física que pratica etc.

Para saber mais detalhes sobre as etapas de uma pesquisa estatística, consulte o tópico **Pesquisa estatística** na **Caixa de ferramentas**.

As variáveis são classificadas como qualitativas ou quantitativas. Observe o diagrama a seguir.



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

As **variáveis qualitativas**, como o próprio nome diz, referem-se à qualidade que possa ser classificada. Se estamos pesquisando, por exemplo, o gênero de filme predileto (policial, ficção, ação etc.) estamos diante de uma variável nominal. Quando, entretanto, existe uma ordenação (ótimo, regular, médio e fraco, por exemplo) a variável qualitativa é ordinal.

Já as **variáveis quantitativas** são representadas por números. Quando esses números são naturais, dizemos que as variáveis correspondentes são discretas (número de pessoas, quantidade de livros lidos etc.). Para chegarmos a esses números, procedemos com uma contagem. Por outro lado, quando esses números são reais e obtidos por meio de medições que podem assumir valores com casas decimais, por exemplo, as variáveis correspondentes são contínuas (temperatura, renda familiar etc.).

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Junte-se a mais três colegas para fazer esta atividade, em que vocês vão explorar a ideia de tipos de variáveis numa pesquisa.

1. Elaborem duas perguntas a serem feitas para os demais colegas cujos resultados representem variáveis qualitativas, sendo uma nominal e outra ordinal.
2. Elaborem duas perguntas a serem feitas para seus familiares ou pessoas que vivem com você cujos resultados representem variáveis quantitativas, sendo uma discreta e outra contínua.
3. Apresentem as perguntas para os demais colegas e, nessa apresentação oral, comentem as distinções entre as variáveis justificando cada uma delas.

As tabelas são fundamentais para a organização dos dados referentes às variáveis. Assim, por exemplo, para cada variável numa pesquisa, contamos o número de vezes que cada um de seus valores está presente. Esse número é chamado de **frequência absoluta** (utilizamos normalmente apenas frequência). Quando, porém, desejamos evidenciar o número de vezes que um dos valores ocorre em relação ao total, apresentamos a **frequência relativa** (geralmente dada em porcentagem).

Exemplo

A tabela apresenta as populações brasileiras estimadas em 2019 e foi publicada no Diário Oficial da União em 28 de agosto de 2019. Observe as colunas com as frequências absoluta e relativa.

POPULAÇÃO POR REGIÃO

Região	População	Percentual
Região Norte	18 430 980	8,77%
Região Nordeste	57 071 654	27,16%
Região Sudeste	88 371 433	42,05%
Região Sul	29 975 984	14,26%
Região Centro-Oeste	16 297 074	7,76%
BRASIL	210 147 125	100,00%

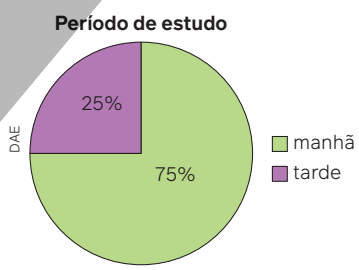
frequência absoluta — frequência relativa

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

BRASIL. Diário Oficial da União (DOU). *População residente segundo as unidades da federação e municípios*. Disponível em: https://www.jusbrasil.com.br/diarios/258713194/dou-secao-1-28-08-2019-pg-374?ref=previous_button/. Acesso em: 16 jun. 2020.

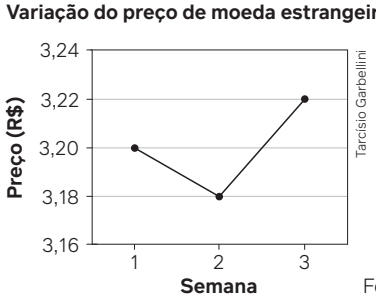
Para apresentar os dados de uma pesquisa utilizamos tabelas e gráficos. Os principais tipos de gráficos estão ilustrados a seguir. A escolha de um gráfico depende do contexto, do objetivo e das variáveis envolvidas.

Gráfico de setores



Fonte: Dados fictícios.

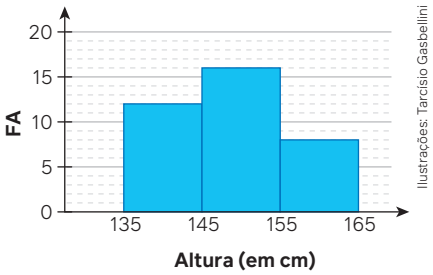
Gráfico de linhas



Fonte: Dados fictícios.

Histograma

Alturas dos visitantes de uma atração infantil

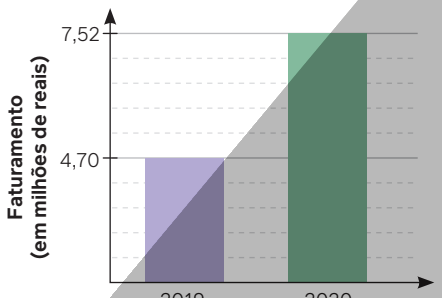


Ilustrações: Tarcísio Gasbellini

Fonte: Dados fictícios.

Gráfico de colunas

Lucro de uma empresa de tecnologia



Fonte: Dados fictícios.

Gráfico pictórico

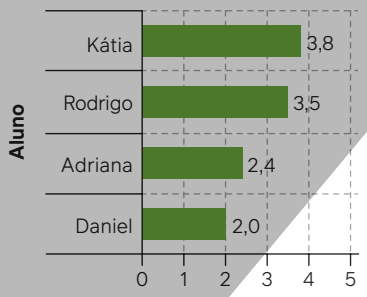
Gols marcados em uma partida de futebol

– Dois gols em uma partida

Fonte: Dados fictícios.

Gráfico de barras

Notas obtidas em uma prova de Matemática



Fonte: Dados fictícios.

O gráfico de colunas também pode ser identificado como gráfico de barras verticais. Outra observação diz respeito à utilização do gráfico de linhas exemplificado. Ao abordar como exemplo a variação de preço por semana de uma moeda estrangeira, poderíamos ter apenas os pontos correspondentes aos valores por semana. Assim, teríamos um gráfico com três pontos (um ponto por semana). Utilizamos segmentos ligando esses pontos para ilustrar e ter uma ideia gráfica do comportamento local da variável.

As planilhas eletrônicas são ferramentas para a construção desses e de outros gráficos estatísticos empregados para apresentar os dados e as informações obtidas numa pesquisa ou na organização [illegible] estatísticas.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Junte-se a mais três colegas para fazer uma pesquisa sobre alguns tipos de gráficos.

1. Pesquisem na mídia um exemplo de utilização de cada gráfico a seguir.
   - gráfico de setores
   - gráfico de colunas (barras verticais)
   - gráfico de barras
   - gráfico pictórico
2. Por meio de uma frase, resumam as informações de cada um dos gráficos selecionados.
3. Façam uma apresentação dos gráficos e dos resumos utilizando recursos de mídia.

Outras formas de representação de dados

Uma forma um pouco diferente de representar os dados de uma pesquisa, que você provavelmente ainda não utilizou no Ensino Fundamental, é o chamado gráfico de folhas, mas conhecido como **diagrama de ramo e folhas**. Esse diagrama representa de maneira simples a distribuição de frequência de uma variável quantitativa explicitando os valores assumidos por ela. Vamos exemplificar.

Exemplo 1

No quadro abaixo estão indicadas as idades em anos completos de um grupo de pessoas reunidas para a comemoração do aniversário do bisavô da família. Construa um gráfico de ramos e folhas.

9	46	48	50	63	66	68	75	82	87	98
82	35	27	18	19	12	33	38	73	44	48

ramo	folhas
0	9
1	2 8 9
2	7
3	3 5 8
4	4 6 8 8
5	0
6	3 6 8
7	3 5
8	2 2 7
9	8

- A construção do gráfico de ramo e folhas consiste em observar as dezenas e unidades das idades das pessoas reunidas. Assim, utilizamos um traço vertical para dividi-lo em duas partes: a da esquerda será chamada de ramo e a da direita será chamada de folhas. Nos ramos colocamos os algarismos que indicam as dezenas das idades das pessoas.
- Agora, preenchemos as folhas com os algarismos que representam as unidades das idades das pessoas. Num mesmo ramo, para facilitar a leitura, colocamos as idades em ordem crescente da esquerda para a direita.

Para pensar e discutir

Respostas no Manual do Professor.

1. Observe apenas o diagrama de folhas e diga qual faixa de idade é mais frequente nesse grupo de pessoas.
2. Existem duas pessoas com 82 anos. Como essas idades foram representadas no diagrama?
3. Caso houvesse uma pessoa com 102 anos nesse grupo, como você poderia representar essa idade no diagrama acima?

Ismail/Shutterstock.com

Número 35 utilizado para identificar localização de quarto em hotel.

Exemplo 2

Em determinado hotel, do 3º andar ao 8º andar estão localizados os quartos para os hóspedes, sendo 10 apartamentos em cada andar numerados da seguinte maneira: os algarismos das dezenas (de 3 a 8) indicam o andar e os algarismos das unidades (de 0 a 9) indicam o número do quarto. Assim, por exemplo, o quarto 35 ilustrado ao lado fica no 3º andar.

Paula é a responsável pela recepção e, a cada dia, elabora um diagrama de ramo e folhas para indicar os quartos que estão ocupados. Hoje ela fez o seguinte diagrama:

3	5 7
4	1 2 4 6 9
5	2 3 4 5 6 7 8 9
6	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
7	2 3 8
8	1

Para pensar e discutir

Respostas no Manual do Professor.

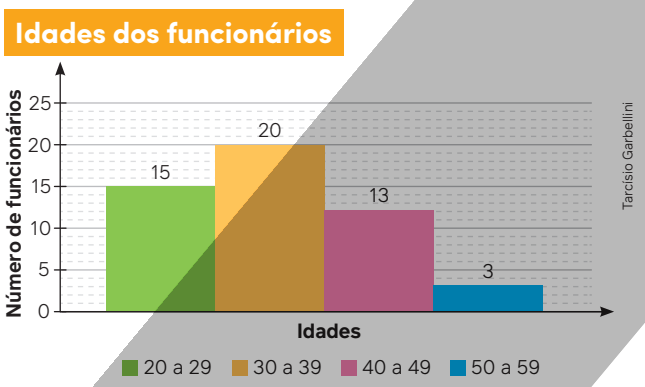
1. Quais são os números dos quartos desocupados no 4º andar?
2. Qual é o andar com a maior taxa de ocupação dos quartos?
3. Sete quartos são reservados para um grupo de pessoas que chegarão hoje e desejam ficar no mesmo andar. Em quais andares Paula poderá atender ao pedido dos hóspedes que chegarão?

Exemplo 3

O quadro a seguir contém as idades de 50 funcionários da empresa Força Total, que presta serviços de manutenção elétrica e hidráulica em residências.

20	20	21	21	22	27	25	24	29	28	23	23	22	25	24	40	40	48	48	48	43	44	42	42	41
39	33	31	31	34	35	36	38	32	33	37	37	30	30	30	32	39	39	30	52	57	53	45	49	37

O histograma ao lado foi feito com base no quadro com as idades desses funcionários.



Fonte: Empresa Força Total (dados fictícios).

Para explorar

Respostas no Manual do Professor.

Junte-se a um colega para fazer o que se pede a seguir.

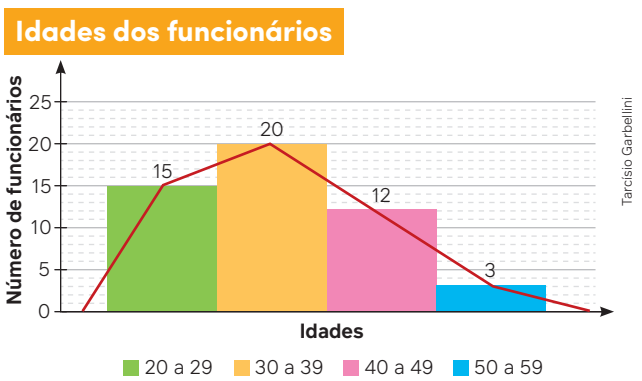
1. Utilizando os dados do quadro, façam um diagrama de ramo e folhas.
2. Pesquisem em planilhas eletrônicas a construção do diagrama de ramo e folhas e, com os mesmos dados, elaborem o diagrama utilizando esse recurso tecnológico.
3. Comparem o diagrama de ramo e folhas com o histograma apresentado.
4. Escrevam um texto comparando as duas construções e comentem o grau de dificuldade de construção e a semelhança nas informações que eles produzem.

O diagrama de ramo e folhas que vimos aqui possibilita a você fazer uma leitura rápida da distribuição do conjunto de valores. Além disso, sua construção não exige muito. Atualmente, a construção de tabelas e gráficos estatísticos ficou facilitada pela possibilidade do uso de recursos digitais. Dessa forma, o histograma é bem mais utilizado do que o diagrama de ramo e folhas.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Com base em um histograma, podemos obter o polígono das frequências ligando os pontos médios das classes. Observe como fica o polígono das frequências com base no histograma anteriormente construído. Note que, antes da primeira classe e depois da última, ligamos o ponto médio de ambas com o eixo horizontal para que tenhamos um polígono.

Esse polígono de frequências possibilita observar comparativamente a distribuição das classes.



Fonte: Empresa Força Total (dados fictícios).

Atividades

Consulte as respostas e as orientações para as atividades no Manual do Professor.

1. No quadro incompleto a seguir estão as alturas de um grupo de pessoas. Note que essas alturas estão divididas em classes. Assim, por exemplo, o intervalo [150; 155[significa alturas de 150 cm a 155 cm, porém excluindo a medida 155 cm.

Altura (cm)	Frequência absoluta	Frequência relativa
[150; 155[	2	
[155; 160[	6	
[160; 165[	10	
[165; 170[	5	
[170; 175[	4	
[175; 180[	6	
[180; 185[	12	
[185; 190[	5	
Total		

Copie esse quadro e complete-o com as informações que faltam.

2. Junte-se a mais um colega para esta atividade.

1. Façam um levantamento das alturas de todos os estudantes da turma.
2. Dividam essas alturas em 5 classes igualmente espaçadas.
3. Elaborem uma tabela que contenha as classes, frequências relativas e frequências absolutas.
4. Construam um histograma para representar os dados levantados.
5. Com base no histograma, façam o polígono das frequências.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

3. Em 25 de novembro de 2019, o jornal *Folha de S.Paulo* publicou uma reportagem sobre os gases de efeito estufa na atmosfera. Nessa reportagem, estavam evidenciadas as seguintes informações:

Gases do efeito estufa na atmosfera

Três gases são responsáveis por 89% do efeito estufa

Em %

Quantidade de CO_2, CH_4 e N_2O na atmosfera vem aumentando ao longo do tempo.

Fonte: PEDRERO, Agnès. Concentração de gases do efeito estufa bate recorde em 2018. *Folha de S.Paulo*, São Paulo, 25 nov. 2019. Disponível em: https://www1.folha.uol.com.br/ambiente/2019/11/concentracao-de-gases-do-efeito-estufa-bate-recorde-em-2018-diz-onu.shtml. Acesso em: 15 jun. 2020.

Elabore um pequeno texto que resuma as informações desse trecho da reportagem e faça uma análise do aumento do CO_2 na atmosfera de 2004 a 2018. Utilize nessa análise, como comparação, o nível de gases-estufa na Era Pré-Industrial.

4. O diagrama de ramo e folhas a seguir contém as idades dos 40 funcionários de uma indústria de alimentos em determinada data.

1	8 8 9
2	0 1 1 2 2 2 7 8 8 9
3	1 3 3 3 3 4 4 4 5 6 7 8 8 8
4	0 1 2 2 3 4 8 9
5	1 5 8
6	2 5

Responda:

a) Qual é a maior idade entre os funcionários?

b) Qual é a idade com maior frequência?

c) Quais são a frequência absoluta e a frequência relativa das idades de 30 a 39 anos nessa empresa?

5. Junte-se a um colega nesta atividade. Façam o que se pede a seguir.

a) Pensem num levantamento que pode ser feito na turma sobre alguma informação de interesse comum, que não cause nenhum constrangimento a todos e que possa facilmente ser representada num diagrama de ramo e folhas.

b) Levantem essas informações.

c) Elaborem e apresentem o diagrama de ramo e folhas correspondente às informações levantadas.

6. (EEAR) A tabela apresenta as frequências acumuladas das notas de 70 estudantes, obtidas em uma avaliação. A frequência absoluta da 2ª classe é:

Alternativa **a**.

Notas	2,0 ⊢ 3,5	3,5 ⊢ 5,0	5,0 ⊢ 6,5	6,5 ⊢ 8,0	8,0 ⊢ 9,5
Frequência acumulada	12	26	43	57	70

a) 14.
b) 15.
c) 16.
d) 17.

7. Junte-se a um colega nesta atividade.

Utilizando os dados da atividade anterior e com o auxílio de planilhas eletrônicas, façam o que se pede a seguir.

a) Construam o histograma dessa distribuição.

b) Com base no histograma, façam o polígono das frequências.

6. O estudante deverá descobrir que a frequência acumulada é a soma da frequência da 2ª classe de notas com a frequência da classe anterior (1ª classe).

Fazendo uma pesquisa estatística

Na hora de elaborar uma pesquisa é importante fazer os seguintes questionamentos:

- O que vou pesquisar?
- O que espero dessa pesquisa estatística?
- Quais são minhas variáveis de interesse?
- E se os dados levantados não forem suficientes para chegar a uma conclusão?

Qualquer pesquisa estatística a ser feita tem, geralmente, seu ponto de partida numa pergunta que se refere ao objeto a ser pesquisado. Você já deve ter feito diversas pesquisas ao longo de sua escolarização. Entretanto, elas provavelmente foram facilmente executadas, sendo algumas delas por meio de *sites* de busca.

Queremos agora que você faça uma pesquisa estatística envolvendo todas as etapas. O objetivo será conhecer melhor algum tema que você esteja estudando em outra área de conhecimento.

Uma etapa importante nesse tipo de pesquisa é a coleta dos dados que depois serão analisados. Na elaboração do instrumento para fazer a coleta, as perguntas devem estar alinhadas com a questão que se deseja responder.

Veja como usar um instrumento de pesquisa para coletar dados e como esses dados podem ser interpretados.

Ao ingressar na Universidade, você provavelmente irá participar de uma avaliação tanto no início de seu curso quanto no final dele. Essa avaliação, feita pelo MEC, é conhecida como Enade e objetiva acompanhar o processo de aprendizagem e o desempenho acadêmico dos estudantes em relação aos conteúdos previstos no curso. Nesse processo, os estudantes devem preencher um questionário. Reproduzimos a seguir parte da apresentação do questionário de 2019.

sebra/Shutterstock.com

As universidades costumam conduzir pesquisas estatísticas entre os alunos para obter dados sobre o perfil dos ingressantes.

Ministério da Educação
Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
Diretoria de Avaliação da Educação Superior

Questionário do estudante – Enade 2019

Caro(a) estudante,

Este questionário é um instrumento importante para compor o perfil dos participantes do Enade e é uma oportunidade para você avaliar diversos aspectos do seu curso e formação.

Sua contribuição é extremamente relevante para melhor conhecermos aspectos das condições de oferta de seu curso e da qualidade da Educação Superior no país. As respostas às questões serão analisadas em conjunto, por curso de graduação, preservando o sigilo da identidade dos participantes.

Este instrumento deve ser preenchido exclusivamente por você, não sendo admitidas quaisquer manipulações, influências ou pressões de terceiros.

Caso você perceba alguma das situações acima, configurando tentativa de manipulação do preenchimento do questionário, entre em contato com o Inep por meio do 'Fale Conosco' disponível no Portal do Inep.

Para responder, basta clicar sobre a alternativa desejada. O questionário será enviado ao Inep apenas quando, na última página, for acionado o botão "Finalizar", indicando o preenchimento total do instrumento. A finalização do questionário será pré-requisito para a visualização do local de prova, que se tornará disponível a partir da data prevista no edital desta edição do Enade.

Agradecemos a sua colaboração!

QUESTIONÁRIO do estudante. INEP, Brasília, 2019. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/questionario-do-estudante. Acesso em: 16 jun. 2020.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

O questionário é, como informado na própria apresentação, "um instrumento importante para compor o perfil dos participantes". Há uma exigência de que o documento seja preenchido apenas pelo estudante, sem sofrer nenhuma interferência.

O questionário era composto de 68 itens. Selecionamos a seguir alguns desses itens para que você observe com atenção.

[...]

2. Qual é a sua cor ou raça?

A (:::) Branca.
B (:::) Preta.
C (:::) Amarela.
D (:::) Parda.
E (:::) Indígena.
F (:::) Não quero declarar.

5. Até que etapa de escolarização sua mãe concluiu?

A (:::) Nenhuma.
B (:::) Ensino fundamental: 1º ao 5º ano (1ª a 4ª série).
C (:::) Ensino fundamental: 6º ao 9º ano (5ª a 8ª série).
D (:::) Ensino médio.
E (:::) Ensino Superior – Graduação.
F (:::) Pós-graduação.

7. Quantas pessoas da sua família moram com você? Considere seus pais, irmãos, cônjuge, filhos e outros parentes que moram na mesma casa com você.

A (:::) Nenhuma.
B (:::) Uma.
C (:::) Duas.
D (:::) Três.
E (:::) Quatro.
F (:::) Cinco.
G (:::) Seis.
H (:::) Sete ou mais.

8. Qual a renda total de sua família, incluindo seus rendimentos?

A (:::) Até 1,5 salário mínimo (até R$ 1.497,00).
B (:::) De 1,5 a 3 salários mínimos (R$ 1.497,01 a R$ 2.994,00).
C (:::) De 3 a 4,5 salários mínimos (R$ 2.994,01 a R$ 4.491,00).
D (:::) De 4,5 a 6 salários mínimos (R$ 4.491,01 a R$ 5.988,00).
E (:::) De 6 a 10 salários mínimos (R$ 5.988,01 a R$ 9.980,00).
F (:::) De 10 a 30 salários mínimos (R$ 9.980,01 a R$ 29.940,00).
G (:::) Acima de 30 salários mínimos (mais de R$ 29.940,00).

21. Alguém em sua família concluiu um curso superior?

A (:::) Sim.
B (:::) Não.

22. Excetuando-se os livros indicados na bibliografia do seu curso, quantos livros você leu neste ano?

A (:::) Nenhum.
B (:::) Um ou dois.
C (:::) De três a cinco.
D (:::) De seis a oito.
E (:::) Mais de oito.

23. Quantas horas por semana, aproximadamente, você dedicou aos estudos, excetuando as horas de aula?

A (:::) Nenhuma, apenas assisto às aulas.
B (:::) De uma a três.
C (:::) De quatro a sete.
D (:::) De oito a doze.
E (:::) Mais de doze.

24. Você teve oportunidade de aprendizado de idioma estrangeiro na Instituição?

A (:::) Sim, na modalidade presencial.
B (:::) Sim, na modalidade semipresencial.
C (:::) Sim, parte na modalidade presencial e parte na modalidade semipresencial.
D (:::) Sim, na modalidade a distância.
E (:::) Não.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

[...]

QUESTIONÁRIO do estudante. INEP, Brasília, 2019. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/questionario_estudante/questionario_estudante_enade_2009.pdf. Acesso em: 16 jun. 2020.

Para pensar e discutir

Orientações no Manual do Professor.

1. Se alguém sugerir a pergunta "Quantos fogões existem na casa em que você mora?", essa pergunta trará algum dado relevante para observar a situação socioeconômica de um grupo de pessoas de uma localidade? Justifique.
2. E se a pergunta for "Quantos banheiros há na casa em que você mora?", a resposta trará algum fato importante sobre a situação socioeconômica?
3. Que tipo de questão você faria a fim de contribuir para o levantamento socioeconômico de um grupo de pessoas de uma localidade que seja diferente das que foram elencadas até aqui?

Esses e outros itens possibilitam conhecer o estudante e um pouco de sua situação socioeconômica.

Realização de uma pesquisa estatística em todas as suas etapas

Você colocará em ação os conteúdos matemáticos que está estudando nesta unidade ao fazer uma pesquisa estatística que contemple todas as etapas:

1. Problematização.
2. Planejamento.
3. Execução da pesquisa e análise de dados.
4. Atuação sobre os resultados da pesquisa.

Organizem os grupos e bom trabalho!

Para entender melhor esses conceitos, consulte o tópico **Pesquisa estatística** na **Caixa de ferramentas**.

Orientações

1. Escolham o tema a ser abordado entre os assuntos que vocês estão estudando em outra área de conhecimento: Ciências Humanas e Sociais, Ciências da Natureza ou Linguagens.
2. Defina nessa pesquisa qual é a variável de interesse.
3. Escolhido o tema, pensem nas questões que vocês desejam responder por meio da pesquisa. Levantem algumas hipóteses.
4. Definam a população a ser pesquisada e se a pesquisa será censitária ou amostral.
5. Preparem o instrumento de coleta de dados e planejem como ela será feita.
6. Concluída a coleta, organizem os dados em tabelas e gráficos e façam a análise deles.
7. Em seguida, comuniquem esses dados usando representações gráficas e textos para apresentar as conclusões.
8. Verifiquem a possibilidade de atuar sobre os resultados da pesquisa.

Orientações no Manual do professor.

Medidas de tendência central

Quais habilidades são necessárias ou desejáveis para selecionar uma pessoa entre tantas para ocupar uma função numa empresa?

Arriscamos aqui destacar uma habilidade que cada vez mais se mostra necessária: **tomada de decisão.** Para que isso ocorra, o profissional ou o futuro profissional deve, diante das informações apresentadas, saber analisar antes de tomar alguma decisão.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Quanto mais confiáveis e abrangentes são as informações sobre um problema, maior a probabilidade de se tomar uma decisão que, de fato, resolva de forma satisfatória a situação. Nesse sentido, em muitas situações, a análise estatística apurada pode ser uma excelente ferramenta.

Podemos, entretanto, ter uma quantidade imensa de dados coletados em uma pesquisa. Para que possamos ter uma ideia global a respeito desses dados, elencamos números ou índices que possam representá-los adequadamente. São as medidas de tendência central.

Vamos exemplificar!

Considere que você é o técnico de um time de basquetebol.

O time está disputando uma decisão importante. Há dois jogadores que atuam na mesma posição, e os dados dos últimos jogos dos quais participaram estão indicados na ilustração a seguir:

JOGADOR A
Participou o tempo inteiro em 5 jogos e fez a seguinte quantidade de pontos por jogo:
1º jogo: 22 pontos
2º jogo: 23 pontos
3º jogo: 20 pontos
4º jogo: 19 pontos
5º jogo: 21 pontos

Mauro Salgado

JOGADOR B
Participou o tempo inteiro em 6 jogos e fez a seguinte quantidade de pontos por jogo:
1º jogo: 34 pontos
2º jogo: 12 pontos
3º jogo: 10 pontos
4º jogo: 35 pontos
5º jogo: 22 pontos
6º jogo: 13 pontos

Para pensar e discutir Orientações no Manual do Professor.

1. Existe algum dado em comum quanto ao desempenho desses jogadores?
2. Quais critérios você usaria para escolher um deles? Justifique.

Veremos agora as chamadas medidas de tendência central: são medidas expressas por valores que representam, de algum modo, um conjunto de valores apresentados. Entre essas medidas, estão: média, moda e mediana.

Média

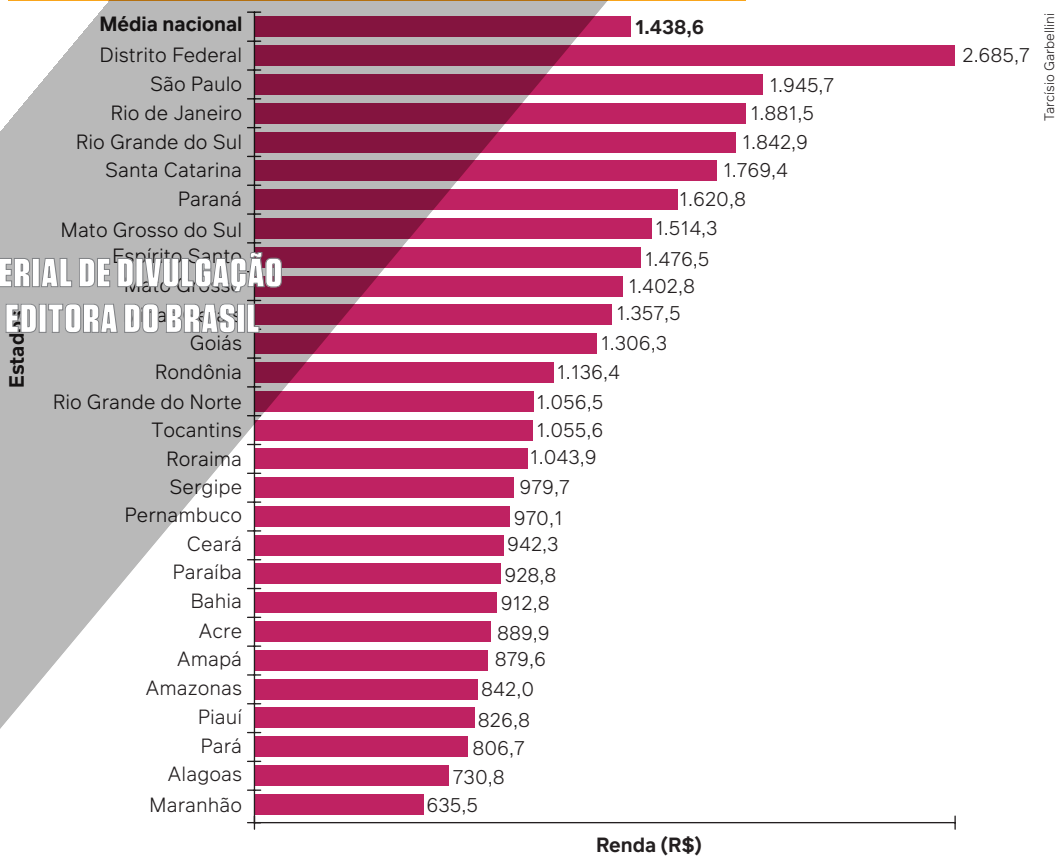
A seguir estão indicadas algumas frases que são, de certa maneira, comuns no dia a dia das pessoas e representam diferentes contextos.

- Uma pessoa em nosso município vive em média 65 anos.
- A duração da viagem é em média de 6 horas.
- Pedro trabalha em média 40 horas semanais.
- Aumentou no último ano a renda *per capita* da população brasileira.

Nas três primeiras frases a palavra média aparece. Mesmo que na última frase ela não esteja de forma direta, podemos dizer que implicitamente está presente. Você sabe o que é renda *per capita* e como calculá-la?

O gráfico abaixo apresenta a renda *per capita* em 2019 de cada um dos estados e do Distrito Federal e a média nacional.

Renda *per capita* no Brasil em 2019 por estado, em R$



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Fonte: Elaborado com base em: IBGE divulga o rendimento domiciliar per capita 2019. *Agência de notícias IBGE*, [Rio de Janeiro], 28 fev. 2020. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/26956-ibge-divulga-o-rendimento-domiciliar-per-capita-2019. Acesso em: 15 ago. 2020.

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. Como é feito o cálculo da renda *per capita* de um estado brasileiro ou do Distrito Federal? Pesquise o significado de renda *per capita*.
2. E como é calculada a renda *per capita* brasileira?
3. Como, em sua opinião, é a distribuição da renda *per capita* brasileira?

Esse foi um exemplo da utilização de média aritmética, ou simplesmente, média:

Dados os n valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ de uma variável, a média aritmética é o valor M_a, tal que:

$$M_a = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Essa relação, que representa a média aritmética dos n valores, também pode ser representada utilizando o símbolo de somatório:

$$M_a = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Leitura do símbolo $\sum_{i=1}^{n} x_i$:
Somatório de todos os valores de x_i, em que i é um número inteiro que vai de 1 até n.

Vamos analisar dois exemplos relacionados à média aritmética.

Exemplo 1

Laura observou que na fatura que fornece o consumo de água em metros cúbicos de sua casa constam os seguintes valores, nos últimos 10 meses:

Jun./19	Jul./19	Ago./19	Set./19	Out./19	Nov./19	Dez./19	Jan./20	Fev./20	Mar./20
44	40	44	42	39	34	30	22	21	38

- Resolveu então calcular a média de consumo em metros cúbicos por mês:

$$M_a = \frac{44 + 40 + 44 + 42 + 39 + 34 + 30 + 22 + 21 + 38}{10} \Rightarrow M_a = \frac{354}{10} \Rightarrow M_a = 35{,}4$$

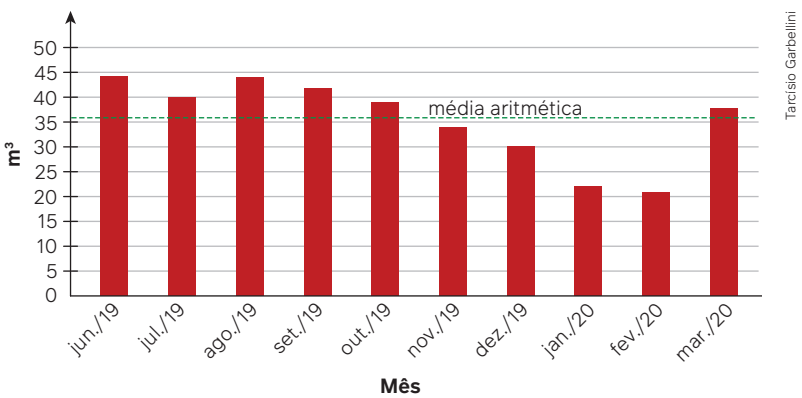
MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Assim, descobriu que o consumo médio de água é 35,4 m³ por mês considerando os últimos 10 meses.

- Laura fez um gráfico de colunas para destacar esses valores e colocou uma linha tracejada para indicar o consumo médio mensal nos 10 últimos meses.

Ela notou que, nos meses de novembro, dezembro, janeiro e fevereiro, o consumo ficou abaixo da média. Lembrou então de que, ao longo desses quatro meses, ela tinha ficado alguns dias, em cada mês, fora de casa em viagens de trabalho.

Consumo mensal de água



Tarcísio Garbellini

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. No exemplo apresentado, a média obtida corresponde ao consumo de um dos meses observados?
2. Se você multiplicar a média de consumo pelo correspondente número de meses, o que obtém?
3. Se você diminuísse 5 metros cúbicos em cada mês, o que iria acontecer com a média? Justifique cada uma de suas respostas.

Que tal pensarmos um pouco mais sobre o consumo de nossas casas?

Faça um levantamento das contas de água (ou de energia elétrica) da casa em que mora. Calcule o consumo médio dos últimos seis meses, por exemplo. Depois, troque ideias com os colegas sobre as médias obtidas e, principalmente, pense no consumo sustentável, propondo atitudes que podem ser tomadas para diminuir o consumo a fim de evitar qualquer tipo de desperdício.

Exemplo 2 Potencialize essa situação para que os estudantes discutam e apresentem coletivamente formas simples de redução dos consumos tanto de água quanto de energia elétrica na casa deles.

Seis colegas de trabalho resolvem levantar a quantidade de dinheiro disponível que cada um tem no bolso para auxiliar na compra de um bolo para comemorar o aniversário de outro colega que não está presente naquele momento.

PEDRO	AUGUSTO	LARA	PAULA	ADRIANA	JOAQUIM
				ZERO	

Banco Central do Brasil

- Vamos calcular o valor médio, em reais, desses 6 amigos:

$$M_a = \frac{2 + 100 + 2 + 2 + 0 + 2}{6} \Rightarrow M_a = \frac{108}{6} \Rightarrow M_a = 18$$

Ao calcular a média aritmética desses valores concluímos que o resultado é 18 reais. Podemos até dizer que, em média, cada um dos 6 amigos tem 18 reais. Entretanto, provavelmente aquele que tem 100 reais terá que bancar o bolo, emprestando dinheiro para os outros.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. O cálculo da média aritmética está correto?
2. Esse valor obtido pela média representa adequadamente o valor em reais que cada amigo do grupo possui? Justifique.

Exemplo 3

Numa pesquisa de satisfação houve uma sondagem sobre os serviços prestados pela empresa Gama. A pesquisa foi feita por telefone com as últimas 1 000 pessoas que utilizaram os serviços dela. Cada pessoa tinha que dar uma nota de 1 a 10. Havia a orientação de que, quanto menor a nota, menor o grau de satisfação e, analogamente, quanto maior a nota, maior o grau de satisfação. O resultado foi organizado na seguinte tabela.

PESQUISA DE SATISFAÇÃO										
NOTA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
FREQUÊNCIA	10	30	80	256	300	180	70	50	20	4

Fonte: Empresa Gama (dados fictícios).

- A variável de interesse aqui é o nível de satisfação. Logo, há maior frequência de notas 4,5 e 6. Portanto, temos uma indicação de que os serviços estão sendo classificados como regulares.

  Vamos calcular a média:

$$M_a = \frac{10 \cdot 1 + 30 \cdot 2 + 80 \cdot 3 + 256 \cdot 4 + 300 \cdot 5 + 180 \cdot 6 + 70 \cdot 7 + 50 \cdot 8 + 20 \cdot 9 + 4 \cdot 10}{10 + 30 + 80 + 256 + 300 + 180 + 70 + 50 + 20 + 4}$$

$$M_a = \frac{10 + 60 + 240 + 1024 + 1500 + 1080 + 490 + 400 + 180 + 40}{1\,000}$$

$$M_a = \frac{5024}{1\,000} \Rightarrow M_a = 5{,}024$$

Assim, a média é de aproximadamente 5.

Para pensar e discutir

Respostas no Manual do Professor.

1. No cálculo da média, qual é o motivo de, por exemplo, multiplicar a nota 6 por 180? Explique.
2. Se 4 pessoas entre 1000 deram nota 10, é de se esperar que, sem calcular a média, essa nota não terá muito "peso" na média. Você concorda? Justifique explicando o significado da utilização da palavra **peso**.
3. Quanto maior a frequência de uma nota, maior o "peso" dessa nota no cálculo da média? Justifique.

No cálculo da média aritmética (aqui, para simplificar, utilizamos apenas média) feito no exemplo anterior observamos valores que são repetidos – no caso, uma mesma nota sendo dada por diversas pessoas. Assim, multiplicamos a nota pelo número de repetições no cálculo da média. Essa média também pode ser chamada de média aritmética ponderada.

A **média aritmética ponderada** dos n valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ de uma variável, com pesos $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, respectivamente, é o valor M_p, tal que:

$$M_p = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 + \ldots + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

No cálculo da média (simples ou ponderada) de um conjunto de valores, podemos ter os valores agrupados em classes. É o caso, por exemplo, da distribuição das alturas de um grupo de pessoas. Qual é o procedimento para o cálculo da média quando os valores estão agrupados?

Vamos investigar um procedimento explorando uma situação.

Para explorar

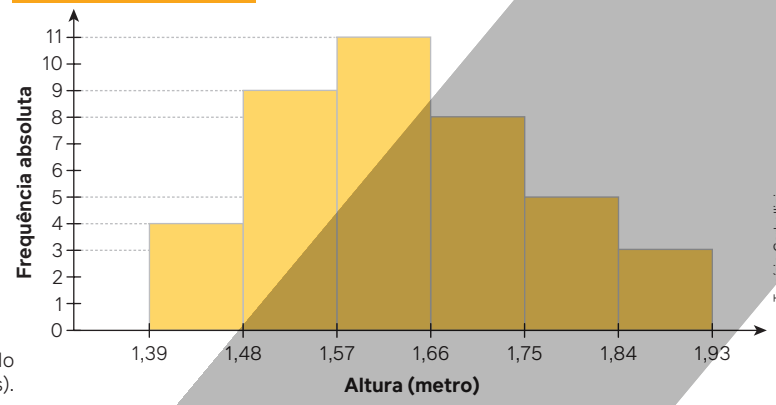
Junte-se a mais dois colegas para fazer esta atividade.

Considerem que a distribuição das alturas dos estudantes de uma turma A do Ensino Médio do Colégio Aprendendo a Fazer foi representada no histograma a seguir. Observe que essas alturas estão separadas em determinados intervalos. Assim, por exemplo, existem 4 estudantes dessa turma que têm a altura no intervalo [1,39; 1,48[. Esse intervalo representa uma classe de alturas.

1. Elaborem uma tabela com base no histograma. Organizem-na de acordo com os intervalos em que as alturas estão distribuídas e com as frequências absolutas. Além disso, para cada classe, indiquem a média aritmética das alturas.
2. Investiguem como calcular a média das alturas dessa turma e calculem-na.

3. Resumam o procedimento (pode ser um algoritmo) utilizado para o cálculo da média das alturas da turma A.

Alturas: turma A



Tarcísio Garbellini

Fonte: Colégio Aprendendo a Fazer (dados fictícios).

Um comentário que julgamos importante: a média aritmética (tanto simples quanto ponderada) pode ser calculada quando a variável envolvida na pesquisa ou nos dados apresentados for quantitativa. Assim, por exemplo, não tem sentido calcular a cor média preferida para um carro diante de um grupo de pessoas que têm carro.

Atividades

1. Observe no mapa a seguir o levantamento da previsão do tempo para o dia 24 de abril de 2020 quanto às temperaturas máximas em localidades da Região Norte brasileira.

Tarcísio Garbellini

Fonte: Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos. INPE, Cachoeira Paulista, 2020. Disponível em: https://tempo.cptec.inpe.br/. Acesso em 24 abr. 2020.

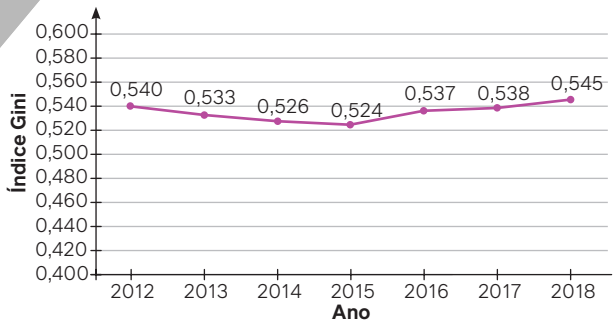
a) Há alguma temperatura mais frequente? Qual?

b) Qual é a média aproximada dessas temperaturas?

c) Essa temperatura média aproximada representa adequadamente esse conjunto de temperaturas? Justifique. Respostas no Manual do Professor.

2. O gráfico abaixo contém a evolução do índice de Gini da distribuição do rendimento domiciliar *per capita* brasileiro no período de 2012 a 2018.

Índice de Gini da distribuição do rendimento domiciliar *per capita* (Brasil – 2012-2018)



Tarcísio Garbellini

Fonte: IBGE, Índice de Gini da distribuição do rendimento domiciliar *per capita* – Brasil 2012-2018.

Observação sobre o gráfico:
Esse gráfico contém sete valores do índice de Gini correspondentes aos sete anos em que foram medidos. A mídia, com a pretensão de fornecer ao leitor certa visualização rápida do fenômeno ao longo do tempo, liga os pontos por meio de segmentos.

a) Pesquise inicialmente o que esse índice indica e qual é o menor valor possível para esse índice e qual é o maior valor.

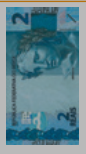
b) Obtenha a média do índice de Gini nesses sete anos e indique quais anos ficaram acima da média.
Respostas no Manual do Professor.

Moda

Em algumas situações, ao calcular a média aritmética dos valores de um conjunto de dados, percebemos que ela não representa adequadamente esse conjunto de valores. Isso ocorre, por exemplo, quando a diferença entre valores é muito grande. Vamos retornar ao exemplo do cálculo da média aritmética.

Para retomar

Seis colegas de trabalho resolvem levantar a quantidade de dinheiro disponível que cada um tem no bolso para auxiliar na compra de um bolo para comemorar o aniversário de outro colega que não está presente naquele momento.

PEDRO	AUGUSTO	LARA	PAULA	ADRIANA	JOAQUIM
				ZERO	

Banco Central do Brasil

Vimos que a média dessas quantias é de 18 reais.

Já discutimos essa situação e concluímos que a média aritmética não representa adequadamente o conjunto de valores. Nesse exemplo há uma diferença muito grande entre o menor e o maior valor do grupo e também uma concentração de valores menores (2 reais) em relação a apenas um valor maior (100 reais).

Para pensar e discutir

Respostas no Manual do Professor.

1. Se a média aritmética não representa adequadamente o grupo de valores, qual é o valor que melhor representa esse conjunto? Justifique.
2. O conjunto formado pelas idades dos estudantes de sua turma pode ser representado por qual idade?

Na situação discutida utilizamos outra medida de tendência central, a **moda.**

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Moda de um conjunto de valores é o elemento que ocorre com mais frequência.
Representaremos a moda por M_o.

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Esta atividade deve ser feita coletivamente.

1ª etapa

Com a turma, colete a idade em anos completos dos colegas e depois responda às questões:

1. Qual idade mais se repete no grupo de estudantes de sua turma?
2. Qual é quantidade de canetas mais frequente entre os estudantes da turma?
3. Qual é o mês do ano em que há mais aniversariantes da turma?

2ª etapa

Observando as informações acima, indique, com a turma, o que é mais adequado para representar os dados do grupo: a média aritmética ou a moda. Justifique a resposta.

3ª etapa

Elabore com a turma uma situação envolvendo valores ou dados em que a moda seja mais representativa do que a média aritmética.

A moda é uma medida de tendência central que nos permite obter uma medida rápida do conjunto de valores; basta observar aquele que é mais frequente. Entretanto, é importante compreender que nem sempre há valores repetidos. Por outro lado, em algumas situações haverá mais de um valor com a mesma frequência. Vamos exemplificar!

Exemplo

Um levantamento sobre as idades de uma das turmas do 2º ano do Ensino Médio resultou na seguinte tabela de frequência:

Levantamento sobre as idades da Turma do 2º ano	
Idade	**Número de estudantes**
13	1
14	5
15	20
16	4

Vamos calcular a média das idades desses estudantes:

$$M_a = \frac{1 \cdot 13 + 5 \cdot 14 + 20 \cdot 15 + 4 \cdot 16}{2 + 8 + 16 + 4}$$

$$M_a = \frac{13 + 70 + 300 + 64}{30}$$

$$M_a = \frac{447}{30} = 14{,}9 \Rightarrow M_a \cong 14{,}9 \text{ anos}$$

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. Qual é a moda da distribuição das idades dos estudantes?
2. Analisando a distribuição das idades, por que a média aritmética está mais próxima da moda das idades dos estudantes?

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Observações sobre moda:

- Se todos os elementos de um conjunto de dados têm a mesma frequência, ele é dito **amodal**.
- Caso um conjunto de elementos apresente duas modas, ele é dito **bimodal**. Se apresentar três modas, será **trimodal**, e assim por diante.

Mediana

O prefeito de um município brasileiro e a Secretaria de Educação resolveram fazer uma campanha nas escolas para incentivar a leitura. Assim, primeiramente solicitaram que Laura, a responsável pela biblioteca municipal, fizesse um levantamento das quantidades de livros que as pessoas emprestaram nos últimos dias.

Após algum tempo, Laura resolveu levantar, nos últimos 24 dias úteis, as quantidades de livros emprestados por dia. Colocou essas quantidades em ordem crescente neste quadro:

11	16	17	17	17	18	19	20	21	22	22	**23**	**23**	23	23	24	24	24	24	24	24	25	25	25

Ela fez o cálculo da média aritmética desses valores e determinou a moda, porém resolveu também obter o termo central dessa distribuição, lembrando de um conceito de Estatística que

havia estudado. Como a quantidade de dias analisados é par, não existe termo central na distribuição. Nesse caso, considerou os dois valores que ocupavam as posições centrais.

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

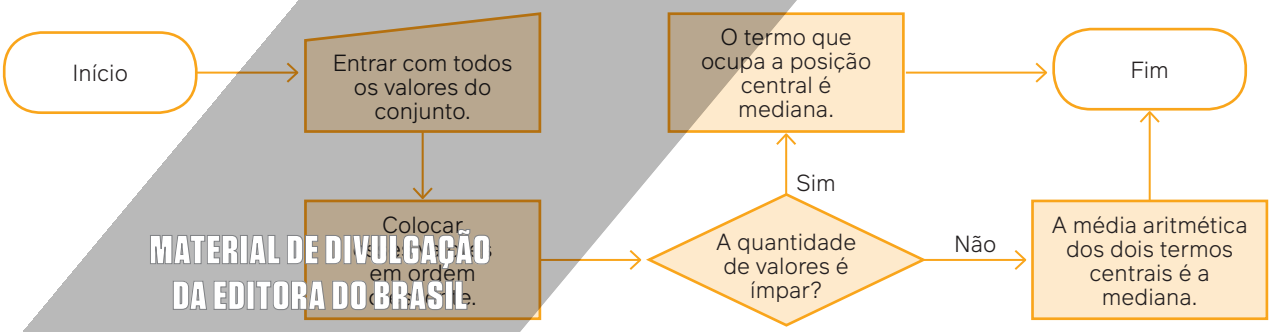
1. Qual é a moda das quantidades diárias de retiradas de livros nos 24 dias analisados?
2. Quais são os dois valores que ocupam o centro da distribuição? Qual é a média aritmética desses valores?
3. Calcule a média aritmética de todos os valores e compare-a com a média aritmética dos dois que estão no centro da distribuição. É o mesmo valor?
4. Se você inserisse a média da quantidade de livros dos 24 dias, ela ficaria na posição central? Explique.

Nessa discussão, você analisou uma distribuição de valores de uma variável colocados em ordem crescente, observando a posição central (no nosso exemplo "posições centrais"). A ideia é que você observe que podemos ter outra medida de posição central que também pode representar um conjunto de valores: é a **mediana**.

A **mediana** de um conjunto finito de valores, dispostos em ordem crescente ou decrescente, é o valor central, se o conjunto tiver um número ímpar de elementos, ou é a média aritmética dos dois valores centrais, se o conjunto tiver um número par de elementos.

Representamos mediana por M_e.

Agora que você já observou um exemplo relacionado à obtenção da mediana, podemos, por meio de um fluxograma, descrever um algoritmo que nos propicie obter a mediana de um conjunto de valores conhecidos.



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Observe e analise a seguir alguns exemplos utilizando a mediana.

Exemplo 1

Um grupo de 13 pessoas de uma mesma família está reunido. O quadro a seguir apresenta as idades dessas 13 pessoas em ordem crescente.

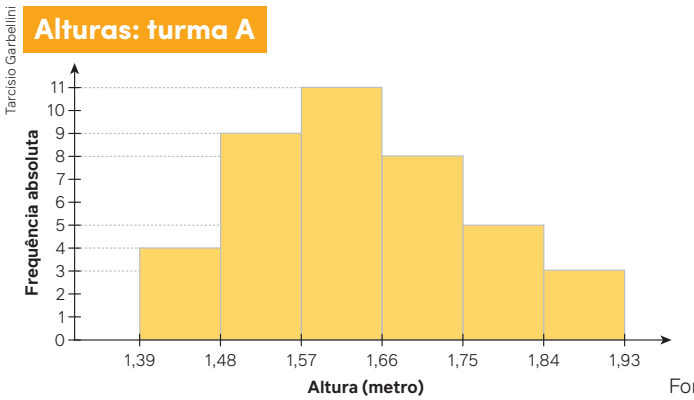
5	6	7	10	12	14	16	22	26	32	34	36	70

posição central

Como são 13 elementos nessa distribuição de idades, o 7º elemento (idade de 16 anos) separa esse grupo em dois. A mediana das idades é igual a 16 anos.

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. Qual é a média aritmética das idades dessas 13 pessoas, aproximadamente?
2. Essa idade média representa adequadamente as idades desse grupo de pessoas? Justifique.



Exemplo 2

Vamos utilizar a distribuição das alturas dos estudantes de uma turma A do Ensino Médio do Colégio Aprendendo a Fazer, que já foi utilizada para o cálculo de média aritmética. As informações estão no histograma ao lado.

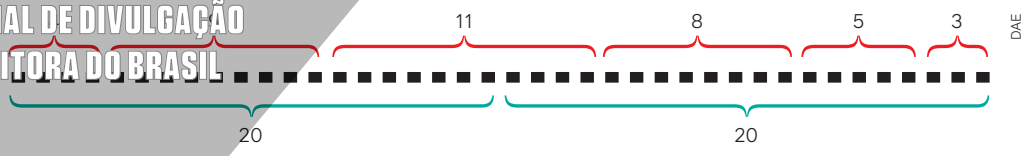
Fonte: Colégio Aprendendo a Fazer (dados fictícios).

Com base nas informações do histograma, podemos construir a seguinte tabela, com as frequências de cada classe de alturas e o valor médio das alturas em cada classe:

Alturas: turma A		
Classes das alturas	**Frequência absoluta**	**Valor médio da classe**
1,39 ⊢ 1,48	4	1,435
1,48 ⊢ 1,57	9	1,525
1,57 ⊢ 1,66	11	1,615
1,66 ⊢ 1,75	8	1,705
1,75 ⊢ 1,84	5	1,795
1,84 ⊢ 1,93	3	1,885
Total	40	–

Observando o total de 40 (número par), os valores que ocupam "posições centrais" na distribuição são os correspondentes ao 20º e ao 21º valores médios. De acordo com as frequências, temos que:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL



Cálculo da mediana:

$$M_e = \frac{(20º \text{ valor}) + (21º \text{ valor})}{2} \Rightarrow M_e = \frac{1{,}615 + 1{,}615}{2} \Rightarrow M_e = 1{,}615$$

Assim, a altura que representa a mediana das alturas é 1,615 m.

Importante!

A mediana é utilizada quando:

- queremos obter o ponto que divide a distribuição de valores em partes iguais;
- numa distribuição, os valores extremos (menor e maior) afetam de maneira acentuada a média aritmética dos valores.
- quando estamos dando uma informação sobre o resultado de uma pesquisa. Observe as frases:
  - 50% dos votos válidos da eleição vão para o candidato *A*;
  - na avaliação em Matemática, metade dos estudantes conseguiu média acima de 6 pontos.

Podemos dizer que a mediana serve para representar um conjunto de valores quando existem valores extremos que acabam afetando em demasia a média aritmética.

Para explorar

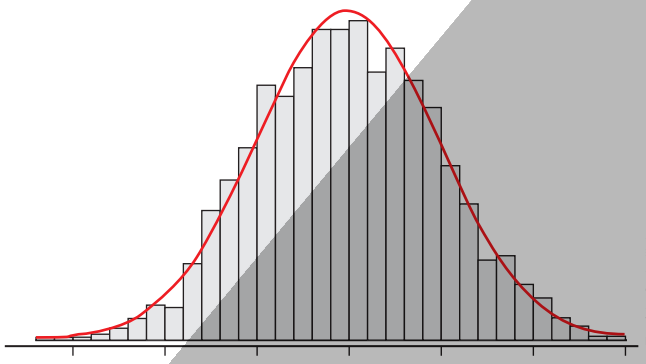
Orientações no Manual do Professor.

Junte-se a mais três colegas para fazer esta atividade.

1ª parte

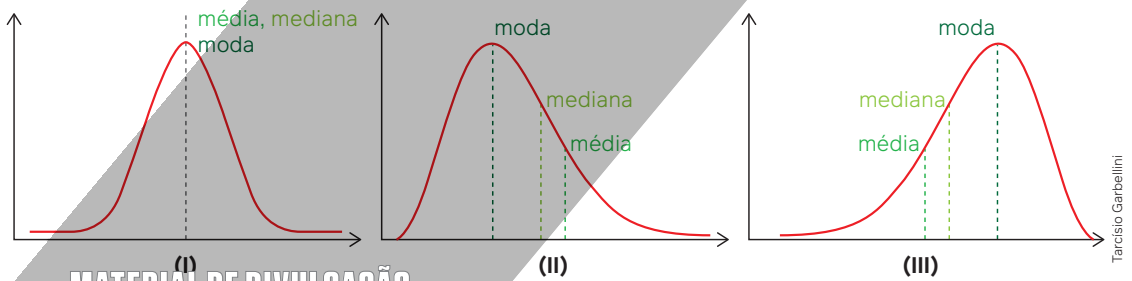
Leiam e interpretem as informações a seguir.

Considerem que vocês estão diante de um histograma que representa a distribuição de um conjunto de valores, como representado abaixo. Da forma que esse histograma está, podemos traçar uma curva como a que está indicada a seguir. Em Estatística, ela é chamada de **curva normal**.



Tarcisio Garbellini

Além de representarem medidas de tendência central, a média aritmética, a mediana e a moda são chamadas de medidas de posição central. Entretanto, dependendo da posição que elas ocupam uma em relação às outras, podemos classificar essa distribuição de valores (no eixo vertical está representada a frequência de valores) em três casos principais:



Tarcisio Garbellini

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

(I) $M_a = M_o = M_e$

As três medidas ocupam a mesma posição: dizemos que a distribuição é perfeitamente simétrica.

(II) $M_o < M_e < M_a$

Distribuição assimétrica, enviesada para à esquerda.

(III) $M_a < M_e < M_o$

Distribuição assimétrica, enviesada para à direita.

2ª parte

Pesquisem em livros de Estatística na biblioteca mais próxima ou mesmo em *sites* de busca um exemplo de distribuição simétrica das medidas de tendência central e façam um histograma com esses valores.

3ª parte

Ainda nessa pesquisa, encontrem um exemplo de distribuição assimétrica enviesada para a esquerda e façam um histograma com esses valores.

4ª parte

Também encontrem um exemplo de distribuição assimétrica enviesada para a direita e façam um histograma com esses valores.

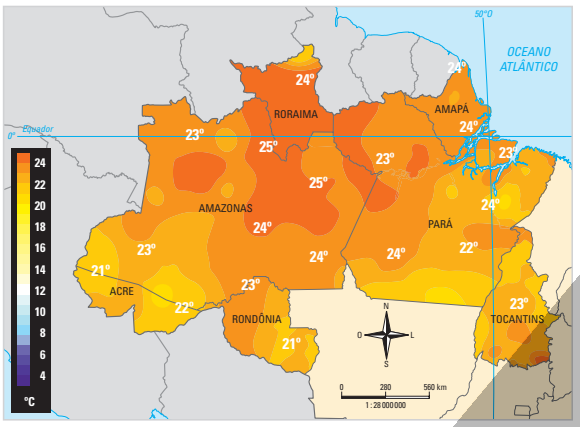
5ª parte

Elaborem um relatório que explique esses três casos e suas conclusões.

Atividades

3. b) Resposta pessoal. Entretanto, como a moda e a mediana é 30 anos, essa é a idade que representa esse grupo de pessoas.

1. Observe no mapa a seguir o levantamento da previsão do tempo para o dia 24 de abril de 2020 quanto às temperaturas mínimas em localidades da Região Norte brasileira.



Tarcisio Garbellini

Fonte: Centro de Previsão do Tempo e Estudos Climáticos. INPE, Cachoeira Paulista, 2020. Disponível em: https://tempo.cptec.inpe.br/sp/sao-paulo. Acesso em 24 abr. 2020.

a) Obtenha a média aritmética dessas temperaturas.

b) Indique a moda dessas temperaturas.

c) Obtenha a mediana dessas temperaturas.

d) Compare essas medidas de tendência central e indique, justificando, qual delas representa o grupo de temperaturas mínimas da Região Norte.

Respostas no Manual do Professor.

2. (Cesgranrio-RJ) Considere o conjunto:

{15; 17; 21; 25; 25; 29; 33; 35}

A média, a mediana e a moda desse conjunto de dados são, respectivamente, iguais a:

Alternativa **d**.

a) 1, 2 e 3.

b) 5, 7 e 9.

c) 7, 9 e 5.

d) 25, 25, e 25.

e) 25, 27 e 29.

3. No quadro a seguir estão indicadas todas as idades e o número de policiais de determinado município.

Idade	Nº de policiais
25	12
28	15
30	25
33	15
35	10
40	8

a) Qual é a quantidade total de policiais desse município? 85 policiais

b) Indique uma medida de tendência central que represente a idade desse grupo de policiais e justifique sua escolha.

4. (Enem) Os estudantes de uma turma escolar foram divididos em dois grupos. Um grupo jogaria basquete enquanto o outro jogaria futebol. Sabe-se que o grupo de basquete é formado pelos estudantes mais altos da classe e tem uma pessoa a mais do que o grupo de futebol. A tabela seguinte apresenta informações sobre as alturas dos estudantes da turma.

Média	Mediana	Moda
1,65	1,67	1,70

Os estudantes *P*, *J*, *F* e *M* medem, respectivamente, 1,65 m, 1,66 m, 1,67 m e 1,68 m, e as suas alturas não são iguais à de nenhum outro colega da sala. Segundo essas informações, argumenta-se que os estudantes *P*, *J*, *F* e *M* jogaram, respectivamente,

Alternativa **c**.

a) basquete, basquete, basquete, basquete.

b) futebol, basquete, basquete, basquete.

c) futebol, futebol, basquete, basquete.

d) futebol, futebol, futebol, basquete.

e) futebol, futebol, futebol, futebol.

5. (TJAP – FCC) O diagrama de ramo e folhas a seguir corresponde às idades dos 40 funcionários de um setor de um órgão público em uma determinada data.

1	8	8	9											
2	0	1	1	2	2	2	7	8	8	9				
3	1	3	3	3	3	4	4	4	5	6	7	8	8	8
4	0	1	2	2	3	4	8	9						
5	1	5	8											
6	2	5												

A soma da mediana e da moda destas idades é igual a:

Alternativa **a**.

a) 67,0. **b)** 66,5. **c)** 66,0. **d)** 65,5. **e)** 65,0.

6. (UFU-MG) Um açougueiro atendeu, nos quatro primeiros dias de uma semana, respectivamente, 20, 17, 16 e 19 pessoas. Considerando-se os atendimentos realizados na sexta-feira e no sábado, a média do número de pessoas atendidas, ao longo de todos esses dias da semana, foi de 21 pessoas. Se a moda referente às quantidades de pessoas atendidas diariamente é maior do que 20, logo, a maior quantidade de pessoas atendidas em um único dia é igual a:

a) 22. **b)** 33. **c)** 27. **d)** 34.

Alternativa **c**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

Medidas de dispersão

Um conjunto de valores pode ser convenientemente sintetizado (representado) por meio dos chamados valores de tendência central: média aritmética, mediana e moda são os mais utilizados. Dizemos que essas medidas podem servir de comparação, dando a posição de qualquer elemento desse conjunto de valores; por exemplo, o valor A está abaixo da média ou o valor B é superior à mediana e diferente da moda.

Mas, quando se trata de interpretar os dados, será que as medidas de tendência central são suficientes?

Pode haver situações em que a média, a moda ou mesmo a mediana não sejam suficientes para caracterizar perfeitamente uma distribuição de valores para a tomada de uma decisão. Um exemplo simples é o que você pode observar quando está diante da previsão do tempo que aparece nas mídias. Observe a imagem ao lado.

Quando você calcula as médias entre as temperaturas mínima e máxima de cada uma dessas cidades, obtém os seguintes valores:

Dom Pedrito: $M_a = \frac{19 + 23}{2} \Rightarrow M_a = 21\ °C$

Uruguaiana: $M_a = \frac{23 + 30}{2} \Rightarrow M_a = 26{,}5\ °C$

Pelotas: $M_a = \frac{16 + 26}{2} \Rightarrow M_a = 21\ °C$

Andrey_Popov/Shutterstock.com

As medidas de dispersão nos auxiliam na interpretação de dados.

Arquivo G1

Temperaturas mínimas e máximas e volume de chuva de acordo com o dia e o local.

Fonte: CAMARGO, Isabela. Previsão do tempo para terça feira, 01/10/2019, Brasil. *G1*, São Paulo, 01 out. 2019. Disponível em: https://g1.globo.com/noticia/2019/10/01/previsao-do-tempo-para-terca-feira-01102019-brasil.ghtml. Acesso em: 16 jun. 2020.

Para pensar juntos

1. Comparando as [illegible] temperaturas, o que você pode concluir?

2. Observando apenas as médias das temperaturas nas cidades Dom Pedrito e Pelotas, o que esses valores "escondem" que é importante considerar quando se fala em temperatura?

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL
Reprodução proibida. Material do Professor.

Quando estamos analisando um grupo de valores além das medidas de tendência central existem também as medidas de dispersão. Entre essas medidas vamos abordar amplitude, variância e desvio-padrão.

Amplitude total

Você já ouviu falar em amplitude térmica? Essa medida nada mais é do que a diferença, por exemplo, em determinado dia numa localidade, entre as temperaturas máxima e mínima.

Quando, por exemplo, você consulta a previsão do tempo para sua cidade utilizando um aplicativo de *smartphone*, normalmente observa os dias da semana, sinais que indicam se vai chover ou não e também encontra as temperaturas mínima e máxima.

Observe, por exemplo, a previsão do tempo para a cidade de Curitiba ao longo de alguns dias obtida em um aplicativo. Com base nesses dados, dia a dia, vamos obter as amplitudes térmicas na ordem em que os dados estão apresentados ao longo dos sete primeiros dias:

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo
Máxima	23 °C	26 °C	27 °C	27 °C	25 °C	24 °C	24 °C
Mínima	14 °C	13 °C	14 °C	14 °C	14 °C	13 °C	13 °C
Amplitude	9 °C	13 °C	13 °C	13 °C	11 °C	11 °C	11 °C

Note que ao longo desses dias a maior amplitude térmica é de 13 °C e a menor é de 9 °C.

Caso queira observar as temperaturas em estados das regiões Norte e Nordeste, verificará que as amplitudes térmicas são baixas devido aos climas tropical e equatorial, que apresentam temperaturas altas praticamente o ano todo.

Para pensar e discutir

Respostas no Manual do Professor.

1. Qual é a amplitude térmica da capital de seu estado prevista para amanhã? Pesquise.
2. Em quais locais do mundo se constata a maior amplitude térmica diária? Pesquise e procure expressar justificativas para essa característica.

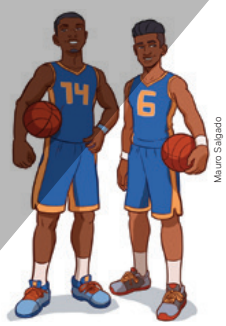
Em Estatística, quando analisamos a amplitude total entre os valores de uma variável, estamos obtendo uma medida de dispersão dos dados dessa variável. Para explicar isso melhor, vamos retomar uma situação vista nesta unidade:

Para retomar

JOGADOR A

Participou o tempo inteiro em 5 jogos e fez a seguinte quantidade de pontos por jogo:

1º jogo: 22 pontos
2º jogo: 23 pontos
3º jogo: 20 pontos
4º jogo: 19 pontos
5º jogo: 21 pontos



Mauro Salgado

JOGADOR B

Participou o tempo inteiro em 6 jogos e fez a seguinte quantidade de pontos por jogo:

1º jogo: 34 pontos
2º jogo: 12 pontos
3º jogo: 10 pontos
4º jogo: 35 pontos
5º jogo: 22 pontos
6º jogo: 13 pontos

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Calculando a média aritmética dos pontos dos dois jogadores para obter a média por jogo, temos:

$$\text{Jogador A} \rightarrow M_{a_A} = \frac{22 + 23 + 20 + 19 + 21}{5} = \frac{105}{5} = 21 \Rightarrow M_{a_A} = 21$$

$$\text{Jogador B} \rightarrow M_{a_B} = \frac{34 + 12 + 10 + 35 + 22 + 13}{6} = \frac{126}{6} = 21 \Rightarrow M_{a_B} = 21$$

Os dois têm a mesma média de pontos por jogo. Entretanto, observe que, mesmo sendo uma quantidade diferente de jogos, o jogador A é mais regular que o jogador B. Essa regularidade pode ser observada pela amplitude total (vamos representar por AT) dos pontos de cada jogador:

Jogador A: $AT_A = 23 - 19 \Rightarrow AT_A = 4$ Jogador B: $AT_B = 34 - 10 \Rightarrow AT_B = 24$

Se você é um técnico que pretende escalar um desses dois jogadores para determinado jogo, a média aritmética pode esconder algo que pode ser considerado importante num jogador: regularidade. E o jogador A tem essa característica. Entretanto, dependendo da situação, da importância do jogo e de seus critérios como técnico, a escolha do jogador B também pode ser interessante.

Isso se deve ao fato de que esse jogador, apesar de não ter a regularidade do outro, pode estar num dia inspirado e de repente fazer um número grande de pontos. De qualquer maneira, a amplitude é uma medida que auxilia na tomada de decisão.

A **amplitude total** de um conjunto de valores é a diferença entre o maior e o menor elemento desse conjunto.

A amplitude total avalia a dispersão dos valores de um conjunto. Quanto maior a amplitude, mais dispersos esses valores se encontram, e quanto menor a amplitude, menor a dispersão entre eles.

Exemplo

Vamos retomar os dados das alturas utilizados anteriormente nesta unidade para observar como podemos determinar a amplitude total desse grupo de valores.

Distribuição das alturas: turma A

Classes das alturas	1,39 ⊢ 1,48	1,48 ⊢ 1,57	1,57 ⊢ 1,66	1,66 ⊢ 1,75	1,75 ⊢ 1,84	1,84 ⊢ 1,93	TOTAL
Frequência absoluta	4	9	11	8	5	3	40

De acordo com o conceito de amplitude total, fazemos a diferença entre a maior e a menor altura do conjunto de alturas, isto é:

$$AT = 1{,}93 - 1{,}39$$

$$AT = 0{,}54 \Rightarrow 0{,}54 \text{ m} = 54 \text{ cm}$$

Há um cuidado quando se utiliza a amplitude total como medida de dispersão. Ela tem o inconveniente de levar em consideração somente os valores extremos do conjunto de dados, sem observar os intermediários. Sendo assim, utilizamos a amplitude total como uma indicação aproximada da dispersão dos dados no conjunto de valores. Nesse sentido, a amplitude representa, como você observou nos exemplos, uma medida de cálculo rápido.

Se a ideia é considerar a totalidade dos valores, outras medidas de dispersão são mais adequadas: **variância** e **desvio-padrão**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Atividades

Respostas pessoais, que dependem das temperaturas previstas e indicadas pelo estudante.

1. Faça um levantamento da previsão do tempo de sua cidade durante sete dias e, depois, responda:

a) Entre as temperaturas máximas, qual é o valor da temperatura média?

b) Entre as temperaturas mínimas, qual é o valor da temperatura média?

c) Em qual dia dessa previsão teremos a maior amplitude térmica?

d) E em qual dia teremos a menor amplitude térmica?

2. Reúna-se com um colega e, juntos, pesquisem as temperaturas mínimas e máximas em determinado dia nas capitais dos estados da região em que vocês moram. Com base nessa pesquisa, façam o que se pede a seguir. Respostas pessoais, que dependem das temperaturas pesquisadas.

a) Calculem as amplitudes das temperaturas que vocês pesquisaram para cada capital.

b) Com base nessas amplitudes, analisem as variações de temperaturas na região.

3. No quadro a seguir estão as idades em anos completos de um grupo de pessoas que praticam esportes regularmente numa quadra poliesportiva.

14-14-16-16-16-16-17-17-17-17-18-19-19-25-30-31-32-33-35-36-37-39-39-40-41

a) Calcule a média das idades desse grupo.

b) Obtenha a moda, mediana e amplitude das idades das pessoas desse grupo.

c) Em sua opinião, a distribuição de frequência das idades desse grupo é homogênea? Justifique.

Respostas no Manual do Professor.

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Junte-se a mais três colegas para fazer esta atividade.

1. Escolham um produto que esteja à venda (carro, bicicleta, aparelho de TV, computador etc.).
2. Delimitem bem o modelo do produto.
3. Pesquisem em pelo menos cinco lugares o preço desse produto à vista.
4. Calculem a amplitude dos preços pesquisados.

Escrevam uma frase sobre a variação dos preços desse mesmo produto e utilizem como argumento a amplitude. Além disso, apontem, em termos percentuais, de quanto pode ser a variação do menor para o maior valor.

Variância e desvio-padrão

Vimos que a amplitude total aponta, de maneira simples e rápida, a dispersão dos valores de um conjunto. Entretanto, analisa apenas os extremos, deixando de lado os demais ou a média dos valores que poderia representar o conjunto.

A variância e o desvio-padrão são medidas que analisam a dispersão dos valores levando em conta a média deles e a dispersão de cada um (desvio) em relação à média dos valores. Vamos analisar o seguinte exemplo:

A empresa Zeta atua no mercado financeiro. Num processo seletivo para a ocupação de um cargo de gerência, acabou aprovando quatro candidatos após algumas etapas exigidas na seleção. Os demais foram desclassificados.

As duas candidatas e os dois candidatos selecionados nas quatro etapas tiveram os nomes omitidos, apenas sendo indicados com letras. Assim, os avaliadores teriam que utilizar apenas os dados da tabela com as notas em cada etapa (tabela a seguir) para decidir quem seria o escolhido.

PROCESSO SELETIVO					
	ETAPA 1	**ETAPA 2**	**ETAPA 3**	**ETAPA 4**	**MÉDIA**
Candidato A	4	6	6	8	6
Candidato B	6	4	9	5	6
Candidato C	5	9	5	5	6
Candidato D	4	5	8	7	6

Fonte: Empresa Zeta (dados fictícios).

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Inicialmente, os avaliadores observaram que, coincidentemente, os quatro candidatos obtiveram a mesma média, não sendo possível classificar o candidato escolhido por esse critério. Decidiram, então, observar a variância *V* das notas atribuídas para cada candidato nas quatro etapas.

Analise como eles calcularam a **variância** (depois iremos conceituar) das notas de cada candidato:

Candidato A:

$$V_A = \frac{(4-6)^2 + (6-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2}{4} = \frac{4+0+0+4}{4} \Rightarrow V_A = 2$$

Candidato B:

$$V_B = \frac{(6-6)^2 + (4-6)^2 + (9-6)^2 + (5-6)^2}{4} = \frac{0+4+9+1}{4} \Rightarrow V_B = 3{,}5$$

Candidato C:

$$V_C = \frac{(5-6)^2 + (9-6)^2 + (5-6)^2 + (5-6)^2}{4} = \frac{1+9+1+1}{4} \Rightarrow V_C = 3$$

Candidato D:

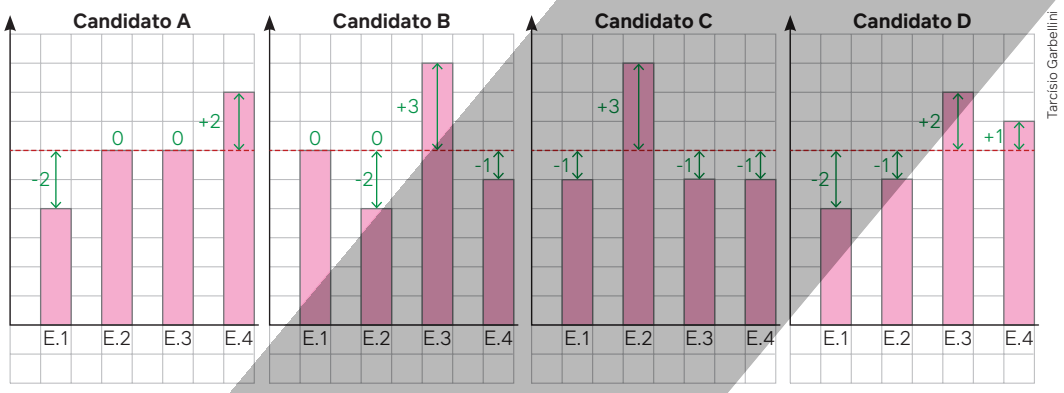
$$V_D = \frac{(4-6)^2 + (5-6)^2 + (8-6)^2 + (7-6)^2}{4} = \frac{4+1+4+1}{4} \Rightarrow V_D = 2{,}5$$

Para pensar e discutir

Respostas no Manual do Professor.

1. Observando os cálculos acima, responda: Como foi calculada a variância das notas de cada candidato? Explique detalhadamente com base na interpretação desses cálculos.
2. Em qual dos candidatos você percebe uma menor amplitude entre as notas obtidas nas quatro etapas?
3. Em qual dos candidatos obteve-se a menor variância? Explique o que significa essa medida.

Agora que você já interpretou a situação, vamos conceituar a variância como medida de dispersão. Antes, precisamos retomar a situação observando a média aritmética das notas de cada candidato e a diferença entre cada nota e a média aritmética. Essa diferença é chamada desvio. Vamos representar os **desvios** (positivos ou negativos) das notas em relação à média:



Tarcísio Garbellini

Note que, se você calcular a soma dos desvios das notas para cada um dos candidatos, essa soma será igual a zero. Elevando ao quadrado as diferenças desses valores em relação à média e, depois, calculando a média aritmética dos resultados obtidos, chegamos à medida variância.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

A **variância** de um conjunto de valores é definida como a média aritmética dos quadrados dos desvios desses valores em relação à média aritmética deles.

Em símbolos, se $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são os valores e Ma é a média aritmética desses valores, a variância V é dada por:

$$V = \frac{(x_1 - M_a)^2 + (x_2 - M_a)^2 + (x_3 - M_a)^2 + \ldots + (x_n - M_a)^2}{n}$$

A variância indica o quão distante está cada valor da média. Quanto menor a variância, mais próximos os valores estão da média, e quanto maior a variância, mais distantes os valores estão da média.

Como a variância é obtida com base nos quadrados dos desvios, ela é um número em unidade quadrada em relação à variável correspondente ao grupo de valores. Assim, se o grupo de valores em questão são as alturas de pessoas dadas em metros, a variância estará em metros quadrados. Por isso, para termos uma medida de dispersão na mesma unidade dos valores do grupo, utilizamos o desvio-padrão:

Desvio-padrão, representado por Dp, é a raiz quadrada da variância V.

Em símbolos:

$$Dp = \sqrt{V}$$

Exemplo 1

Vamos obter o desvio-padrão para o conjunto de notas de cada candidato a uma vaga de gerência na Empresa Zeta com base nas variâncias calculadas.

Candidato A:

$V_A = 2 \Rightarrow Dp_A = \sqrt{2} \cong 1{,}414$

Candidato B:

$V_B = 3{,}5 \Rightarrow Dp_B = \sqrt{3{,}5} \cong 1{,}871$

Candidato C:

$V_C = 3 \Rightarrow Dp_C = \sqrt{3} \cong 1{,}732$

Candidato D:

$V_D = 2{,}5 \Rightarrow Dp_D = \sqrt{2{,}5} \cong 1{,}581$

O candidato A apresenta o conjunto de notas com o menor desvio-padrão. Assim como você observou na variância, esse é o candidato mais regular em relação ao desempenho nas provas. Se, além da média, tivermos a regularidade como um critério de escolha, esse deverá ser o candidato mais bem avaliado.

Exemplo 2

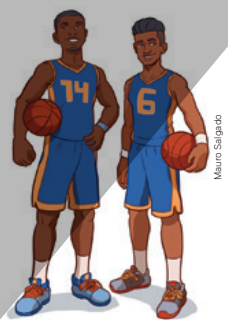
Vamos calcular o desvio-padrão de cada um dos jogadores de basquete que vimos anteriormente.

Para retomar

JOGADOR A

Participou o tempo inteiro em 5 jogos e fez a seguinte quantidade de pontos por jogo:

1º jogo: 22 pontos
2º jogo: 23 pontos
3º jogo: 20 pontos
4º jogo: 19 pontos
5º jogo: 21 pontos



Mauro Salgado

JOGADOR B

Participou o tempo inteiro em 6 jogos e fez a seguinte quantidade de pontos por jogo:

1º jogo: 34 pontos
2º jogo: 12 pontos
3º jogo: 10 pontos
4º jogo: 35 pontos
5º jogo: 22 pontos
6º jogo: 13 pontos

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- A média de pontos dos dois jogadores já tínhamos calculado:

Jogador A: $M_{a_A} = 21$

Jogador B: $M_{a_B} = 21$

- Calculamos a variância:

Jogador A

$$V_A = \frac{(22 - 21)^2 + (23 - 21)^2 + (20 - 21)^2 + (19 - 21)^2 + (21 - 21)^2}{5}$$

$$V_A = \frac{1 + 4 + 1 + 4 + 0}{5}$$

$V_A = 2$

Jogador B

$$V_B = \frac{(34 - 21)^2 + (12 - 21)^2 + (10 - 21)^2 + (35 - 21)^2 + (22 - 21)^2 + (13 - 21)^2}{6}$$

$$V_B = \frac{169 + 81 + 121 + 196 + 1 + 64}{6}$$

$V_B = 105{,}3$

- Cálculo do desvio-padrão:

Jogador A

$$D_{P_A} = \sqrt{2} \cong 1{,}414$$

Jogador B

$$D_{P_B} = \sqrt{105{,}3} \cong 10{,}262$$

O jogador A tem o menor desvio-padrão. Por isso, dizemos que seu desempenho em se tratando do número de pontos por partida é mais regular comparado ao do jogador B.

Para pensar e discutir

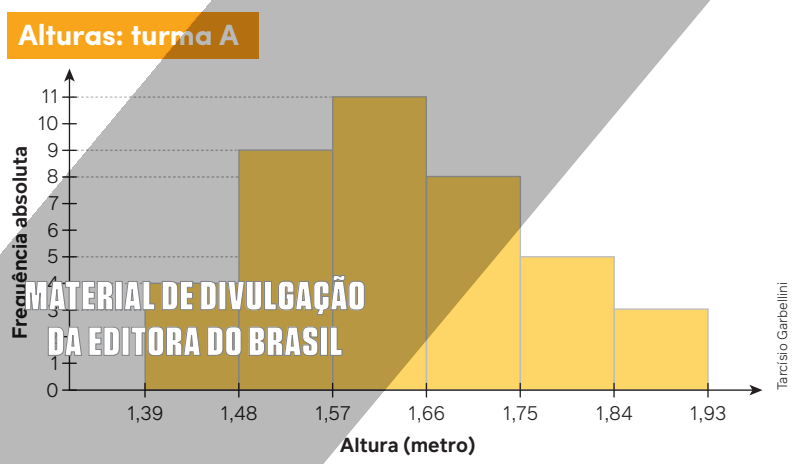
Orientações no Manual do Professor.

1. Apenas com base no conjunto de valores de uma variável, é possível analisar a regularidade sem haver a necessidade de calcular o desvio-padrão? Exemplifique.
2. Se o desvio-padrão for um número muito próximo de zero, qual será a conclusão sobre a distribuição dos valores correspondentes no conjunto de valores?
3. Qual é a diferença entre variância e desvio-padrão?

Exemplo 3

Retomando o exemplo sobre a distribuição das frequências das alturas da turma A do Colégio Aprendendo a Fazer, vamos determinar o desvio-padrão das alturas dos estudantes.

- Com base nas informações do histograma, podemos construir a seguinte tabela, com as frequências de cada classe de alturas e o valor médio das alturas em cada classe:



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Fonte: Colégio Aprendendo a Fazer (dados fictícios).

Alturas: turma A		
Classes das alturas	**Frequência absoluta**	**Valor médio das classes**
1,39 ⊢ 1,48	4	1,435
1,48 ⊢ 1,57	9	1,525
1,57 ⊢ 1,66	11	1,615
1,66 ⊢ 1,75	8	1,705
1,75 ⊢ 1,84	5	1,795
1,84 ⊢ 1,93	3	1,885

- Calculamos a média das alturas:

$$M_a = \frac{4 \cdot 1{,}435 + 9 \cdot 1{,}525 + 11 \cdot 1{,}615 + 8 \cdot 1{,}705 + 5 \cdot 1{,}795 + 3 \cdot 1{,}885}{4 + 9 + 11 + 8 + 5 + 3}$$

$$M_a = \frac{5{,}740 + 13{,}725 + 17{,}765 + 13{,}640 + 8{,}975 + 5{,}655}{40}$$

$$M_a = \frac{65{,}500}{40} \Rightarrow M_a \cong 1{,}638$$

- Cálculo da variância:

$$V \cong \frac{4 \cdot (1{,}435 - 1{,}638)^2 + 9 \cdot (1{,}525 - 1{,}638)^2 + 11 \cdot (1{,}615 - 1{,}638)^2 + 8 \cdot (1{,}705 - 1{,}638)^2 + 5 \cdot (1{,}795 - 1{,}638)^2 + 3 \cdot (1{,}885 - 1{,}638)^2}{40}$$

$$V \cong \frac{0{,}164 + 0{,}117 + 0{,}011 + 0{,}032 + 0{,}125 + 0{,}183}{40}$$

$$V \cong \frac{0{,}632}{40} \Rightarrow V \cong 0{,}158$$

- Cálculo do desvio-padrão:

$$Dp = \sqrt{V}$$

$$Dp \cong \sqrt{0{,}158} \Rightarrow Dp \cong 0{,}397$$

Assim, temos que o desvio-padrão das alturas do grupo de estudantes é de aproximadamente 40 cm, pois 0,397 m = 39,7 cm. Além disso, podemos dizer que a média das alturas dos estudantes da turma *A* é 1,638 m, com erro aproximado de 0,40 m para mais ou para menos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. Quais valores de cada classe foram utilizados para calcular o valor médio?
2. Como foi calculada a média aritmética da distribuição das frequências das alturas dos 40 estudantes?
3. Tendo como referência o desvio-padrão, como você analisa o conjunto formado pelas alturas dos 40 estudantes?

Bem, agora que já estudamos as medidas de dispersão e as medidas de tendência central, podemos fazer uma breve comparação estabelecendo uma relação entre elas. Em relação às medidas de tendência central, as **medidas de dispersão** em Estatística têm as características a seguir.

- Complementam as informações contidas nas medidas de posição central.
- Indicam o afastamento dos dados em relação à medida de posição central.
- Revelam que, quanto maior a dispersão, menor a informação contida na medida de posição central.

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Esta atividade deve ser feita em grupos utilizando planilha eletrônica.

1. Façam um levantamento sobre as alturas de todos os estudantes da turma.
2. Dividam essas alturas em quatro classes.
3. Elaborem uma tabela (utilizando planilha eletrônica) que contenha essas classes de alturas, a frequência e o valor médio de cada classe.
4. Com base nessas informações, construam um histograma com as alturas.
5. Calculem, então, a variância e o desvio-padrão.
6. Com base no desvio-padrão, façam uma análise da distribuição das alturas da turma.
7. Ao final da atividade, escolham um relator para apresentar à turma o texto elaborado pelo grupo.

Atividades

1. O quadro a seguir contém o número de reclamações diárias (de segunda a sexta) resolvidas via telefone por quatro atendentes sobre os produtos de uma grande empresa.

Atendente	Quantidade de reclamações diárias resolvidas				
	Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira
Adriana	8	12	15	9	11
Carlos	11	10	8	11	12
Joana	15	12	16	10	11
Antônio	10	9	11	12	8

a) Observando apenas essas quantidades, é possível afirmar que dois, entre os quatro atendentes, durante a semana, têm maior "regularidade" na quantidade diária de reclamações atendidas? Explique.

b) Entre os dois [illegible] qual é o mais regular? Justifique.

c) Quais são as médias diárias de atendimentos dos quatro funcionários?

d) Obtenha os desvios-padrão das quantidades de reclamações diárias ao longo da semana. Respostas no Manual do professor.

e) Com base no cálculo da média e do desvio-padrão, faça uma análise do número de chamadas em média, apontando o erro para mais e para menos nessa análise.

2. Junte-se a um colega para fazer esta atividade.
   1. Elaborem, como na situação anterior, outra situação para o cálculo não apenas da média como também do desvio padrão.
   2. Com base nas médias e nos desvios-padrão, analisem a distribuição dos valores na situação em questão.
   3. Apresentem essa situação para que outra dupla calcule as médias e os desvios-padrão com base nos valores obtidos na análise da sua dupla. Em caso de discordância, discutam com a turma toda a análise. Orientações no Manual do Professor.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Utilizando quartis e o diagrama *boxplot*

Vimos anteriormente que a mediana caracteriza um conjunto de dados devido à sua posição central em relação à distribuição deles quando colocados em ordem crescente (ou decrescente). A mediana separa esse conjunto de dados em dois grupos com a mesma quantidade. Nesse sentido, existem outras medidas ligadas à mediana que se baseiam na posição em relação ao conjunto de dados. São os **quartis**, os **percentis** e os **decis**.

Vamos aqui observar apenas os quartis.

Denominamos **quartis**, de um conjunto de dados colocados em ordem crescente, os valores que separam esse conjunto em quatro partes iguais.

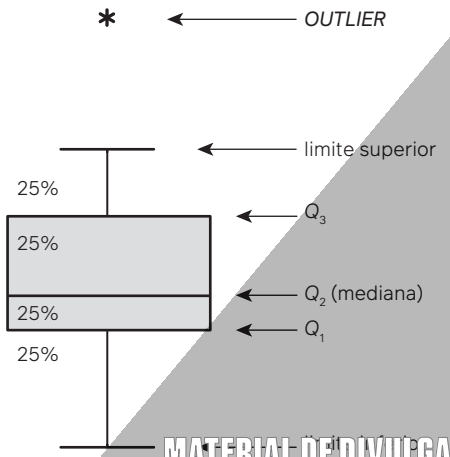
Como o conjunto de valores colocados em ordem crescente será dividido em quatro partes iguais, teremos três quartis, conforme mostra a figura a seguir.

1º quartil (Q_1): valor que separa os 25% menores dados da distribuição.

2º quartil (Q_2): valor que coincide com a mediana.

3º quartil (Q_3): valor que separa os 25% maiores dados da distribuição.

Definidos os quartis, podemos fazer uma representação do conjunto de valores, chamada **diagrama de caixa** ou ***boxplot***.



Tarcísio Garbellini

O *boxplot* é um diagrama formado por um retângulo, também chamado caixa, dentro do qual estão representados 50% dos valores de um conjunto. A mediana é indicada por uma linha que divide esse retângulo.

Os outros 50% dos valores da distribuição são representados por duas hastes, cada uma correspondendo a 25% dos dados. A haste que fica antes da caixa representa os menores dados do conjunto, e a haste que fica depois da caixa, os maiores. Ao final de cada haste ficam indicados os limites inferior e superior, respectivamente.

Os pontos fora desses limites são considerados valores discrepantes, também chamados ***outliers***, que são indicados por asteriscos ou bolinhas.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

O *boxplot* pode ser representado na posição vertical ou horizontal. Veja, na figura acima, um exemplo de *boxplot*.

O principal objetivo do diagrama *boxplot* é evidenciar a dispersão de um conjunto de dados, facilitando a comparação entre dois ou mais conjuntos de valores.

Exemplo

Um grupo de 14 pessoas de uma empresa foi monitorado espontaneamente para saber a quantidade de minutos que cada uma delas em determinada manhã acessou redes sociais no computador. O quadro a seguir apresenta os tempos dessas 14 pessoas em ordem crescente.

5	5	6	8	10	12	**14**	**16**	22	26	32	34	36	80

Vamos construir o diagrama *boxplot* para analisar a distribuição dos tempos de acesso às redes sociais no computador desse conjunto de pessoas.

- Como são 14 termos, a mediana (2º quartil) é calculada como média aritmética entre os "termos centrais":

$$M_e = \frac{14 + 16}{2} = 15$$

- Como são sete termos à esquerda e sete termos à direita da mediana, o 1º quartil corresponderá ao valor 8 minutos (mediana dos termos menores) e o 3º quartil corresponderá ao valor 32 minutos (mediana dos termos maiores): $Q_1 = 8$ e $Q_3 = 32$.
- Marcamos num eixo os cinco valores importantes: menor valor, 1º quartil, 2º quartil, 3º quartil e maior valor.

Quanto às hastes, é importante saber que o comprimento de cada uma é no máximo igual a $1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1)$.

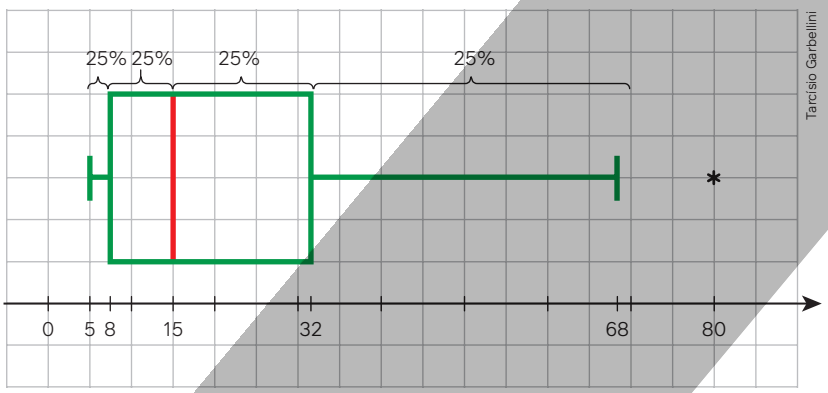
No nosso caso, $Q_3 - Q_1 = 32 - 8 = 24$.

Como $1{,}5 \cdot 24 = 36$, o comprimento máximo de cada haste é igual a **36**.

- O comprimento da haste inferior será dado pela diferença entre o 1º quartil e o menor valor da distribuição: $Q_1 - 5 = 8 - 5 = 3$. Sendo esse comprimento menor que 36, o limite inferior é o menor valor da distribuição, ou seja, 5.

O comprimento da haste superior seria dado pela diferença entre o maior valor da distribuição e o 3º quartil: $80 - Q_3 = 80 - 32 = 48$. Como esse comprimento ultrapassa 36, o limite máximo será dado por: $32 + 36 = 68$.

- Todos os dados acima do limite máximo serão outliers. Este é o caso do valor 80.



Tarcísio Garbellini

Lembrando que um quarto corresponde a 25%, veja como o *boxplot* representa claramente a distribuição dos dados, possibilitando verificar se estão mais concentrados ou mais espalhados em cada quarto do diagrama. A caixa e os comprimentos das hastes fornecem uma leitura rápida de como os dados estão distribuídos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar Resolução no Manual do professor.

1. Analise o *boxplot* acima e redija um texto argumentativo que compare a distribuição dos dados em cada quarto do diagrama: Onde estão mais espalhados? Onde estão mais concentrados? Apresente argumentos para cada afirmação que fizer. Para argumentar, você pode citar os comprimentos das hastes, a distância entre a mediana e o 1º quartil, e a distância entre a mediana e o 3º quartil.
2. Elabore um desafio para um colega resolver oralmente: esboce um *boxplot* sem dados para que ele analise a distribuição dos dados representados em cada quarto, tendo como referência apenas as distâncias entre a mediana e o 1º e 3º quartis e os comprimentos das hastes, além de possíveis *outliers*. Depois, resolva o desafio que seu colega irá elaborar.

Vozes

John Wilder Tukey (1915-2000) foi um estatístico norte-americano que criou o *boxplot* ou gráfico de caixa.

Graduou-se em Ciências em 1936 e, no ano seguinte, em Química pela Brown University. Era Ph.D. em Matemática pela Universidade de Princeton.

A ele é atribuída a seguinte frase:

"Uma resposta aproximada para o problema certo vale muito mais do que uma resposta exata para um problema aproximado".

Alfred Eisenstaedt/The LIFE Picture Collection/Getty Images

John Wilder Tukey (1915-2000).

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Junte-se a mais dois colegas para fazer esta atividade.

Vejam os três diagramas *boxplot* representados a seguir. No primeiro, a distribuição dos dados é homogênea. No segundo, os menores valores, representados pela haste da esquerda, estão muito espalhados em relação aos maiores valores, representados pela haste da direita, que estão mais concentrados. No terceiro diagrama acontece o contrário: os menores valores estão bem concentrados em relação aos maiores valores, que se apresentam bem espalhados.

Tarcísio Garbellini

1ª etapa

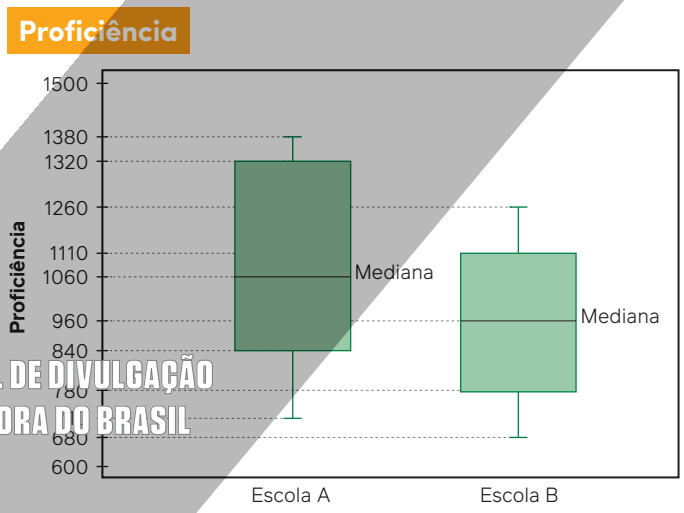
Cada um de vocês deve elaborar individualmente três conjuntos de dados (*A*, *B* e *C*), cada um com 20 valores, de modo que o conjunto *A* seja representado pelo primeiro diagrama, o conjunto *B* pelo segundo diagrama e o conjunto *C* pelo terceiro diagrama. Estejam atentos aos *outliers*!

2ª etapa

Troquem as produções entre vocês para que cada um confira se os conjuntos elaborados pelos colegas atendem às condições solicitadas, discutindo possíveis divergências.

Para pensar e discutir

Em avaliações educacionais, a proficiência é uma medida que representa os resultados de aprendizagem dos estudantes. Analise o *boxplot* a seguir, em que estão representadas as proficiências em Matemática dos estudantes de duas escolas.



Tarcísio Garbellini

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1. Falso. Cada caixa representa as proficiências de 50% dos estudantes de cada escola, sendo 25% abaixo da mediana e 25% acima da mediana.

2. Verdadeiro, pois a barra inferior se encontra representada entre esses dois valores.

3. Verdadeiro, pois 25% dos estudantes da escola A têm proficiência entre 1320 e 1380, valores que são atingidos apenas por 5 estudantes da escola B representados por *outliers*, o que significa que não representam todo o grupo da escola.

De acordo com o gráfico, verifique se cada uma das afirmativas a seguir é verdadeira ou falsa. Justifique as afirmativas verdadeiras e reescreva as afirmativas falsas de modo a torná-las verdadeiras.

1. Cada caixa representa as proficiências de 25% dos estudantes da escola correspondente.
2. Na escola *B*, 25% dos estudantes têm proficiência entre 680 e 780.
3. Na escola *A*, um quarto dos estudantes têm proficiência acima de 1320, valores que não são atingidos pelo grupo que representa a escola *B*.
4. O grupo de estudantes da escola *B* é mais homogêneo do que o grupo de estudantes da escola *A*.

Verdadeiro, pois os dados da escola B estão mais concentrados do que os dados da escola A.

5. Em nenhuma das duas escolas há estudantes cujos resultados são muito discrepantes em relação ao grupo que representa a escola.

Verdadeiro. Orientações no Manual do Professor.

Na discussão anterior, você teve que analisar dois diagramas. As afirmações feitas para verificação de verdadeiro ou falso auxiliam na construção de referenciais para outras análises relacionadas à distribuição de valores. Propomos agora uma atividade em que, com base em um diagrama de ramo e folhas, você e alguns colegas irão construir o diagrama de *boxplot* e analisá-lo.

Para explorar

Junte-se a mais dois colegas para fazer esta atividade.

1ª etapa

Em uma empresa com 40 funcionários, observou-se a quantidade de atrasos maiores que 5 minutos ao longo de um ano inteiro de trabalho. O resultado foi representado no diagrama de ramo e folhas ao lado.

0	0
1	0 1
2	2
3	1
4	0 0 1 2
5	0 0 1 3 6
6	2 4 5 7
7	0 0 2 5 5 8
8	0 0 1 1 1 2 2 8
9	0 1 5 6
10	0 2 4 8

Resposta pessoal. Orientações no Manual do Professor.

2ª etapa

Com base nesses dados, construam o diagrama de *boxplot*.

Caso queiram, existem recursos digitais que auxiliam a elaborá-lo. Vocês deverão pesquisar e compreender como é possível fazê-lo.

3ª etapa

Após a construção do diagrama, analisem a distribuição dos valores elaborando um texto que deve ser discutido com os colegas.

4ª etapa

Em caso de discrepância de dados ou análise incompleta, a turma deverá discutir essas discrepâncias e formular um texto único sobre a análise dos dados com base nos textos elaborados pelos grupos.

Atividades

1. (Dataprev) O *boxplot* é um gráfico construído com base no resumo dos cinco números, constituído por:

a) Valor mínimo, 1º quartil (Q_1), mediana (2º quartil Q_2), 3º quartil (Q_3) e valor máximo.

b) Valor mínimo, média, moda, 1º quartil (Q_1) e desvio médio.

c) Valor mínimo, 1º quartil (Q_1), coeficiente de correlação, mediana e valor máximo.

d) 1º quartil (Q_1), 2º quartil (Q_2), 3º quartil (Q_3), desvio-padrão e valor máximo.

e) Média, moda, mediana, desvio-padrão e valor máximo.

Alternativa **a**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

2. Com base no conjunto de valores abaixo, faça o que se pede:

Respostas no Manual do Professor.

5	6	6	7	7	8	8	8	10	10	10	10	11	11

a) Determine os cinco números necessários para a construção do diagrama *boxplot*.

b) Construa no caderno o diagrama *boxplot* correspondente a esses dados.

3. Junte-se a um colega para fazer esta atividade. Efetuem os cálculos usando uma calculadora.

1ª etapa

Em uma indústria de metais, uma peça metálica deve ter comprimento de 75 cm. Colheu-se uma amostra de 10 peças do fornecedor A e foram obtidas as seguintes medidas:

75,93	73,34
76,95	74,04
75,47	75
73,6	76,18
74,85	75,33

Obtenham as cinco medidas necessárias para a construção do diagrama *boxplot*.

2ª etapa

Outra amostra de 10 peças foi colhida pela mesma indústria do fornecedor B, com as seguintes medidas:

74,94	74,75
75,25	74,65
75,44	74,94
74,62	74,92
75,35	75,46

Obtenham as cinco medidas para a construção do diagrama *boxplot*.

3ª etapa

Façam, a partir de um eixo, os dois diagramas *boxplot*. Com base neles, comparem as distribuições das medidas dos dois fornecedores em relação à distribuição dos dados.

Orientações no Manual do Professor.

Atividades finais

1. f) Calculo a média aritmética desses valores; calculo o quadrado da diferença entre cada valor e a média; calculo a média aritmética dos quadrados dessas diferenças obtidas; extraio a raiz quadrada desse resultado.

1. e) Coloco esses valores em ordem crescente e observo aquele que ocupa a posição central.

1. Sobre os assuntos desta unidade, responda:

a) Quando, numa pesquisa, indicamos num gráfico o número de elementos de determina categoria, isso significa frequência absoluta ou frequência relativa? Frequência absoluta.

b) A utilização de percentual para representar uma categoria numa pesquisa é frequência absoluta ou frequência relativa? Frequência relativa.

c) Quais são as medidas de dispersão mais utilizadas? Amplitude, variância e desvio-padrão.

d) Quais são as medidas de tendência central mais utilizadas? Média, moda e mediana.

e) Como você obtém a mediana de um conjunto ímpar de valores?

f) Como você calcula o desvio-padrão de um conjunto de valores?

g) Quanto maior o desvio-padrão de uma amostra, menor a dispersão desses valores?

h) O que mede a moda de numa distribuição de valores? A moda indica o elemento mais frequente.

i) Quais são os cinco valores utilizados para a construção do diagrama de *boxplot*? Mínimo, máximo, mediana, 1º quartil, 3º quartil.

j) A média aritmética representa adequadamente os dados de um conjunto de valores? Explique.

2. (Unesp) De acordo com levantamento realizado de janeiro a outubro de 2018, o Brasil apareceu em primeiro lugar como o país em que cada habitante mais recebeu chamadas telefônicas *spam*, que incluem ligações indesejadas de telemarketing, trotes e golpes. A tabela apresenta o número médio de chamadas *spam* recebidas mensalmente por usuário no Brasil e em outros países.

Colocação	País	Nº médio de ligações *spam* mensal por usuário
1º	Brasil	37,5
2º	Índia	22,3
3º	Chile	21,9
4º	África do Sul	21,0
5º	México	20,9
6º	Peru	19,8
7º	Costa Rica	18,6
8º	Estados Unidos	16,9
9º	Grécia	13,1
10º	Espanha	12,5

(Mariana Alvim. "Quem me liga? Como ligações telefônicas de robôs se tornaram um problema mundial". www.bbc.com, 13.4.2019. Adaptado.)

A diferença entre o número médio de chamadas *spam* recebidas mensalmente por usuário no Brasil e a média aritmética do número médio de chamadas *spam* recebidas mensalmente por usuário nos demais países da América Latina apresentados na tabela é igual a: Alternativa **a**.

a) 17,2. **b)** 17,4. **c)** 16,7. **d)** 16,6. **e)** 17,9.

3. (Enem) O preparador físico de um time de basquete dispõe de um plantel de 20 jogadores, com média de altura igual a 1,80 m. No último treino antes da estreia em um campeonato, um dos jogadores desfalcou o time em razão de uma séria contusão, forçando o técnico a contratar outro jogador para recompor o grupo. Se o novo jogador é 0,20 m mais baixo que o anterior, qual é a média de altura, em metro, do novo grupo? Alternativa **c**.

a) 1,60 **b)** 1,78 **c)** 1,79 **d)** 1,81 **e)** 1,82

4. (Enem) Um gerente decidiu fazer um estudo financeiro da empresa onde trabalha analisando as receitas anuais dos três últimos anos. Tais receitas são apresentadas no quadro.

Ano	Receita (bilhão de reais)
I	2,2
II	4,2
III	7,4

Estes dados serão utilizados para projetar a receita mínima esperada para o ano atual (ano IV), pois a receita esperada para o ano IV é obtida em função das variações das receitas anuais anteriores, utilizando a seguinte regra: a variação do ano IV para o ano III será igual à variação do ano III para o II adicionada à média aritmética entre essa variação e a variação do ano II para o I.

O valor da receita mínima esperada, em bilhão de reais, será de: Alternativa **c**.

a) 10,0. **c)** 13,2. **e)** 20,6.

b) 12,0. **d)** 16,8.

5. (Enem) O quadro apresenta a quantidade de um pão vendido em uma semana em uma padaria.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

1. j) Nem sempre. Quando há valores muito grandes ou muito pequenos em relação à maioria dos valores do conjunto, a média aritmética não os representa adequadamente.

1. g) Não. Quanto maior o desvio padrão de uma amostra, maior a dispersão desses valores.

Dia da semana	Número de pães vendidos
Domingo	250
Segunda-feira	208
Terça-feira	215
Quarta-feira	251
Quinta-feira	187
Sexta-feira	187
Sábado	186

O dono da padaria decidiu que, na semana seguinte, a produção diária desse tipo de pão seria igual ao número de pães vendidos no dia da semana em que tal quantidade foi a mais próxima da média das quantidades vendidas na semana.
O dia da semana utilizado como referência para a quantidade de pães a serem produzidos diariamente foi: Alternativa **c**.

a) domingo.
b) segunda-feira.
c) terça-feira.
d) quarta-feira.
e) sábado.

6. (Famema-SP) Em uma pesquisa foram utilizadas 50 mudas de determinado tipo de planta com alturas diferentes. A tabela mostra o número de mudas e suas respectivas alturas.

Número de mudas	Altura da muda (em cm)
13	18
7	10
9	8
16	4,5

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Considerando as alturas de todas essas mudas, a média, a moda e a mediana são, respectivamente, Alternativa **c**.

a) 8,5 cm; 18 cm; 8 cm.
b) 8,3 cm; 18 cm; 9 cm.
c) 8,3 cm; 10 cm; 9 cm.
d) 8,3 cm; 18 cm; 8 cm.
e) 8,8 cm; 18 cm; 8 cm.

7. (Enem) Um país decide investir recursos na educação em suas cidades que tenham um alto nível de analfabetismo. Os recursos serão divididos de acordo com a idade média da população que é analfabeta, conforme apresentado no quadro.

Recurso	Idade média da população analfabeta (m)
I	$M \leqslant 22$
II	$22 < M \leqslant 27$
III	$27 < M \leqslant 32$
IV	$32 < M \leqslant 37$
V	$M > 37$

Uma cidade desse país possui 60/100 do total de analfabetos de sua população composto por mulheres. A média de idade das mulheres analfabetas é de 30 anos, e a média de idade dos homens analfabetos é de 35 anos. Considerando a média de idade da população analfabeta dessa cidade, ela receberá o recurso: Alternativa **c**.

a) I. **b)** II. **c)** III. **d)** IV. **e)** V.

8. (Enem) Dois amigos abriram um restaurante. No primeiro ano, o custo total com as despesas do restaurante chegou a 250 mil reais. A receita neste ano foi de 325 mil reais, obtendo assim um lucro de 75 mil reais (diferença entre a receita e o custo total). A tabela representa o custo total e a receita nos cinco primeiros anos.

Ano	Custo total (milhar de real)	Receita (milhar de real)
Primeiro	250	325
Segundo	270	355
Terceiro	290	350
Quarto	280	365
Quinto	260	305

De acordo com a tabela, a média anual do lucro, em milhar de real, ao longo dos cinco anos é: Alternativa **b**.

a) 60. **b)** 70. **c)** 75. **d)** 80. **e)** 85.

9. (UEFS-BA) Conhecidos os percentuais de aprovação, por parte da população, de 10 projetos viáveis para desenvolvimento sustentável em dez cidades de certa região, como 15%, 12%, 15%, 8%, 86%, 13%, 13%, 83%, 11% e 13%, quanto aos valores percentuais da mediana (*Me*) e da moda (*Mo*), é correto afirmar que: Alternativa **c**.

a) $Me < Mo$.
b) $Me \leqslant Mo$.
c) elas são equivalentes.
d) $Me > Mo$.
e) $Me \geqslant Mo$.

UNIDADE 2

Hedzun Vasyl/Shutterstock.com

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Jogo de xadrez.

Nesta unidade, você vai:

- empregar o diagrama da árvore na resolução de problemas de contagem;
- diferenciar problemas de contagem em que a ordem dos elementos influencia no total de possibilidades daqueles problemas em que a ordem dos elementos não influencia;
- calcular o número de possibilidades de ocorrência de um evento utilizando estratégias de arranjo, combinação, permutação simples e permutação com repetição;
- utilizar o princípio aditivo de contagem para resolver problemas;
- utilizar o princípio multiplicativo de contagem para resolver problemas;
- elaborar situações de contagem que possam ser resolvidas pelo princípio aditivo ou princípio multiplicativo.

Situações de contagem

Na elaboração das placas dos automóveis, na análise de possibilidades para o lançamento de um dado consecutivamente, na quantidade de dias que faltam para terminar um ano, nas diferentes possibilidades para a resolução de uma jogada numa disputa de um jogo de xadrez temos exemplos em que a contagem representa algo indispensável. A contagem é a primeira operação com números que fazemos, mesmo antes de ingressarmos na escola.

1. Quantas voltas num relógio analógico o ponteiro dos minutos faz ao longo de um dia? Como você calcula isso?

2. De quantas maneiras diferentes podemos ter a escolha de duas pessoas em nossa turma do Ensino Médio para formar uma comissão?

1. Ao longo de uma hora 60 voltas; ao longo de um dia 60 · 24 voltas. Portanto, o relógio dará 1440 voltas no período de um dia.

2. Resposta pessoal. A questão visa investigar o conhecimento prévio do estudante em relação ao cálculo combinatório. É interessante retomá-la ao final da unidade. A resposta é $n \cdot \frac{(n-1)}{2}$, sendo n o número de estudantes da turma.

1 Princípios de contagem

Na BNCC

Nesta unidade você vai trabalhar as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias 3 e 4 e as habilidades EM13MAT310, EM13MAT315, EM13MAT405.

O relógio digital a seguir registra três momentos diferentes de um mesmo dia. O primeiro momento é zero hora (meia-noite), o segundo momento já é o início da tarde, e o terceiro momento, o final do dia. Note que, da esquerda para a direita, existem quatro algarismos para representar as horas: dezenas das horas, unidades das horas, dezenas dos minutos e unidades dos minutos.

Mauro Salgado

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. Considere o intervalo de uma hora, isto é, por exemplo, de 00h00min até 01h00min. Quantas trocas de algarismos foram feitas na unidade de minuto?
2. E na dezena de minutos?
3. Considere o intervalo de exatamente um dia inteiro: Quantas trocas de algarismos foram feitas na unidade de hora?
4. E na dezena de horas?
5. Em um dia completo, quantas trocas de algarismos ao todo foram feitas nas quatro unidades do mostrador?

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

mmtsai/Adobe Stock.com

A Via Láctea pode ser vista no céu da Ilha de Fernando de Noronha (PE), Brasil, 2017.

Joá Souza/Futura Press

Avenida Luiz Viana, Salvador (BA), 2019.

Essa situação de contagem não é simples de ser resolvida. Exige de você uma organização para analisar o que acontece com cada uma das "leituras" do relógio digital.

Num dos primeiros contatos que temos com a Matemática, somos colocados diante de situações de contagem. As mãos e os dedos constituem nossa primeira máquina de calcular. No início recitamos os números sem, no entanto, saber o que significam. Depois iniciamos contando as pessoas presentes numa sala, avaliamos a quantidade de brinquedos e algumas vezes ensaiamos calcular até as estrelas do céu. Você saberia estimar quantas estrelas existem? É possível contá-las diretamente?

A contagem representa assim a primeira operação matemática feita por uma criança.

As contagens são frequentes na nossa realidade!

Existem situações em que a contagem é utilizada para responder a questões sobre a quantidade de elementos de um conjunto qualquer:

- Qual é a população brasileira atualmente?
- Quantos são os automóveis circulando em nossa cidade num determinado dia?
- Quantas horas passamos estudando numa semana?
- Qual é a lotação máxima de determinado estádio de futebol?
- Quantos estudantes brasileiros estão atualmente no Ensino Médio?

Existem, entretanto, situações relacionadas à contagem de possibilidades na realização de determinada formação de agrupamentos de elementos. Analise individualmente cada questão que apresentamos a seguir. Pense em possíveis estratégias para resolvê-las. Troque ideias com os colegas a respeito disso.

- A turma deverá ser dividida em 4 grupos com 8 estudantes em cada grupo: De quantas maneiras isso poderá ser feito?
- Todos os estudantes da turma se cumprimentam uma única vez com um aperto de mão: Qual será o total de apertos de mãos?
- Em um jogo de cartelas são sorteados 6 números, de 1 a 60. Qual é o número total de maneiras de isso ocorrer?
- Num restaurante há 3 tipos de prato principal e 4 tipos de sobremesas. Escolhendo um prato principal e uma sobremesa, qual é o total de possibilidades de escolha?

Essas situações envolvem contagem e exigem cálculos sobre a formação de agrupamentos: representam exemplos que são de nosso interesse no estudo de análise combinatória. Esse estudo possibilita conhecer certos modelos que resolvem determinados tipos de situações envolvendo contagem. Sugerimos que você, ao longo desta unidade, retome essas questões para resolvê-las usando as estratégias que vamos discutir a partir de agora.

A análise combinatória pode ser considerada um conjunto de procedimentos cujo objetivo maior está relacionado à contagem do número de possibilidades em situações de agrupamentos.

Problemas iniciais de contagem

Existem problemas de contagem que podem ser resolvidos sem a necessidade de desenvolver métodos especiais. Eles podem ser solucionados por meio da contagem direta ou, dependendo do caso, por meio de uma operação aritmética.

Quanto tempo de trabalho?

Uma pessoa trabalhou numa empresa do início de janeiro de 1998 até o início de janeiro de 2020. Quantos anos essa pessoa trabalhou nessa empresa?

- Uma maneira de descobrir a quantidade de anos é fazer uma contagem direta com base nos anos trabalhados:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1998, 1999, 2000, 2001, ..., 2019

→ São 22 anos.

- Podemos também pensar na quantidade n de números inteiros de 1998 até 2019. Sendo assim, temos:

$$n = 2019 - 1998 + 1$$

$$n = 22$$

Portanto, são 22 anos.

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. Por que o ano 2020 não entrou na contagem?
2. Por qual razão no cálculo feito acima acrescentou-se 1 à diferença 2019 − 1998?

Leia o problema a seguir. Você fará uma atividade em grupo.

Numa turma do Ensino Médio foi feita a pesquisa sobre quais idiomas os estudantes estão cursando como matéria complementar aos estudos. Todos os estudantes responderam e obteve-se o resultado a seguir.

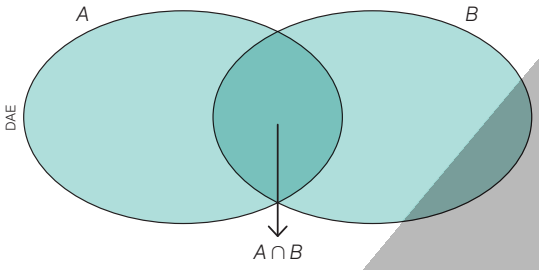
- Estão cursando Inglês: 20 estudantes.
- Estão cursando Espanhol: 12 estudantes.
- Estão cursando Inglês e Espanhol: 6 estudantes.
- Não estão cursando nenhum idioma: 10 estudantes.

Qual é o número total de estudantes dessa turma?

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

1. Resolva individualmente o problema acima usando a estratégia que você quiser. Você pode fazer diagramas, representações em forma de esquema, desenhos ou usar outros recursos.
2. Compare sua estratégia com as que foram usadas pelos colegas de grupo. Encontrem semelhanças e diferenças. Todos chegaram à mesma resposta?



DAE

Para se resolver problemas que envolvam o estudo de conjuntos, normalmente é empregado o chamado diagrama de Venn.

Vamos considerar que temos os conjuntos A e B relacionados por meio do diagrama ao lado, no qual a região comum indica elementos que são dos dois conjuntos simultaneamente. Dizemos que esses elementos estão na interseção dos dois conjuntos, isto é, pertencem ao conjunto $A \cap B$ (lemos: A interseção com B).

A união desses dois conjuntos A e B é o conjunto representado por $A \cup B$ (lemos: conjunto A união com o conjunto B) formado por todos os elementos que pertencem ao conjunto A ou pertencem ao conjunto B. Para calcular o número total de elementos da união, representado por $n(A \cup B)$, fazemos:

$$\mathbf{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

Caso os dois conjuntos não tenham elementos em comum (dizemos que a interseção é o [illegible] do número de elementos pode ser feito adicionando-se o número de elementos de A com o número de elementos de B:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, para $A \cap B = \varnothing$ (representa conjunto vazio)

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Filme ou teatro, qual escolher?

Juliana observou que estavam sendo lançados 4 filmes neste fim de semana e 3 peças de teatro. Ligou para suas amigas e decidiram que iriam assistir a um dos filmes ou a uma das peças de teatro. Qual é o número total de possibilidades para essa escolha?

- Podemos obter o número total de possibilidades listando todas as possíveis escolhas:

filme 1 filme 2 filme 3 filme 4	ou	peça 1 peça 2 peça 3

Assim, o total de possibilidades é dado por 7.

Para pensar e discutir

Respostas no Manual do Professor.

1. Explique por que o número total de possibilidades é 7.
2. Se fosse possível assistir a um filme e a uma peça de teatro, qual seria o número total de possibilidades? Explique indicando todas as possibilidades.
3. Represente o problema proposto no alto da página, sobre o número de estudantes que estão cursando o Ensino Médio, usando o diagrama de Venn.

Atividades

1. Considere a sequência de números naturais de 100 até 500. Responda: Orientações no Manual do Professor.

a) Quantos números naturais há nessa sequência?

b) Quantos desses números naturais têm o algarismo 1 na centena?

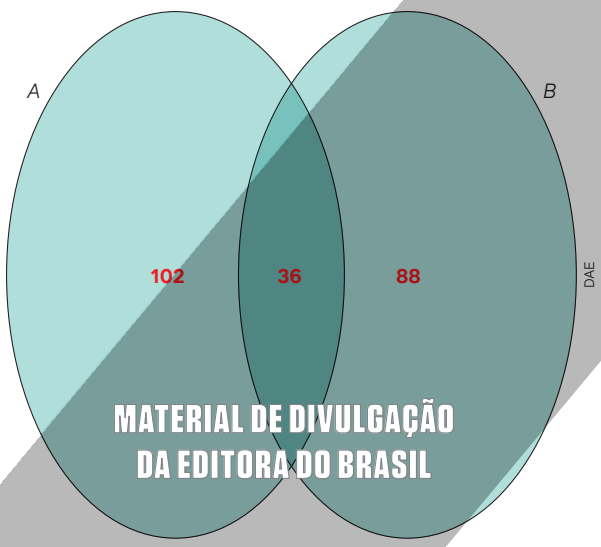
c) Em quantos desses números o algarismo das dezenas é igual a 9?

d) Qual é a quantidade de números pares nessa sequência?

e) E de números ímpares?

2. Tendo como referência a questão anterior, elabore um desafio com quatro itens para um colega resolver. Você resolve o que ele vai elaborar. Depois, juntos, discutam as resoluções. Orientações no Manual do Professor.

3. No diagrama a seguir foram colocadas quantidades de elementos no interior dos conjuntos A e B. Respostas no Manual do Professor.



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Interpretando o diagrama, faça o que se pede.

a) Indique a quantidade de elementos do conjunto A.

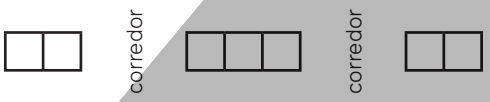
b) Responda: Quantos desses elementos são apenas do conjunto A?

c) Indique a quantidade de elementos do conjunto B.

d) Responda: Quantos desses elementos são apenas do conjunto B?

e) Determine o número de elementos da união desses dois conjuntos, isto é, $n(A \cup B)$.

4. Na figura a seguir está ilustrado o corredor de um avião. Paulo e Roberta irão viajar e ocuparão dois desses lugares.



De quantas maneiras diferentes eles poderão se posicionar de tal modo que não fiquem separados por um corredor? 10 maneiras

5. Num campeonato de futebol de salão entre escolas, 13 times disputam em um único turno, isto é, cada time enfrenta os demais uma vez apenas. Quando vence, o time ganha 3 pontos; quando empata ganha 1 ponto e, caso perca, 0 ponto. O campeão será aquele que somar mais pontos. Respostas no Manual do Professor.

a) Quantas partidas cada time irá jogar?

b) No total, quantas partidas serão disputadas?

c) Qual é o máximo de pontos que um time poderá obter?

6. Considere a sequência de todos os números naturais de 1 até 900. Determine: Respostas no Manual do Professor.

a) a quantidade total de números naturais nessa sequência;

b) a quantidade total de números que são múltiplos de 3;

c) a quantidade total de números que são múltiplos de 5;

d) a quantidade total de números que são múltiplos de 7.

7. Utilizando como referência a atividade anterior elabore uma questão similar para determinar a quantidade de múltiplos de 4, múltiplos de 10 e múltiplos de 11. Depois, resolva a atividade e peça a um colega que a resolva também. Ao final, confronte as respostas. Resposta pessoal.

8. Interprete a sequência descrita a seguir.

> Uma sequência de números naturais, representada por $S(n)$, é formada de modo que, se um número é par, o próximo será sua metade, mas, se for ímpar, o próximo será uma unidade a mais que ele, até se chegar ao número 1. Assim, vamos considerar $S(42)$ como exemplo:
>
> $S(42) = (42; 21; 22; 11; 12; 6; 3; 4; 2; 1)$
>
> O número de termos dessa sequência é igual a 10.

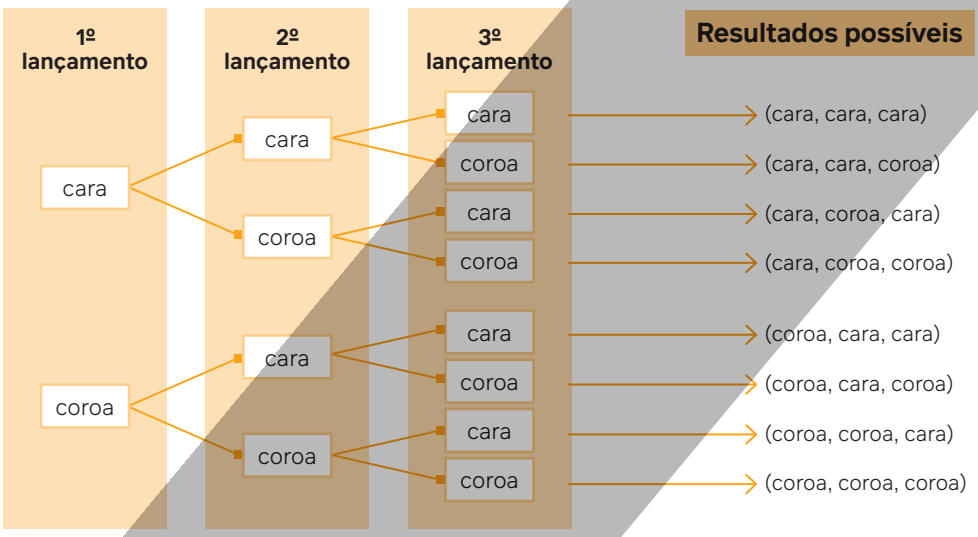
Determine:

a) o número de elementos de $S(44)$;

b) o número de elementos de $S(100)$. Respostas no Manual do Professor.

Princípio multiplicativo

Há um dispositivo bem simples e interessante que você pode utilizar para calcular o número de possibilidades de realização de um evento de contagem: **diagrama de árvore**. Ele consiste numa figura que descreve não apenas as possibilidades em cada etapa mas também todas as possibilidades. Vamos utilizar, como exemplo, o lançamento consecutivo de uma mesma moeda três vezes e a observação das sequências possíveis dos resultados:



Para pensar e discutir

Respostas no Manual do Professor.

1. Quantas são as etapas no evento descrito acima?
2. Qual é o número de possibilidades para a realização de cada lançamento?
3. Qual é o total de possibilidades? Como você o calculou?

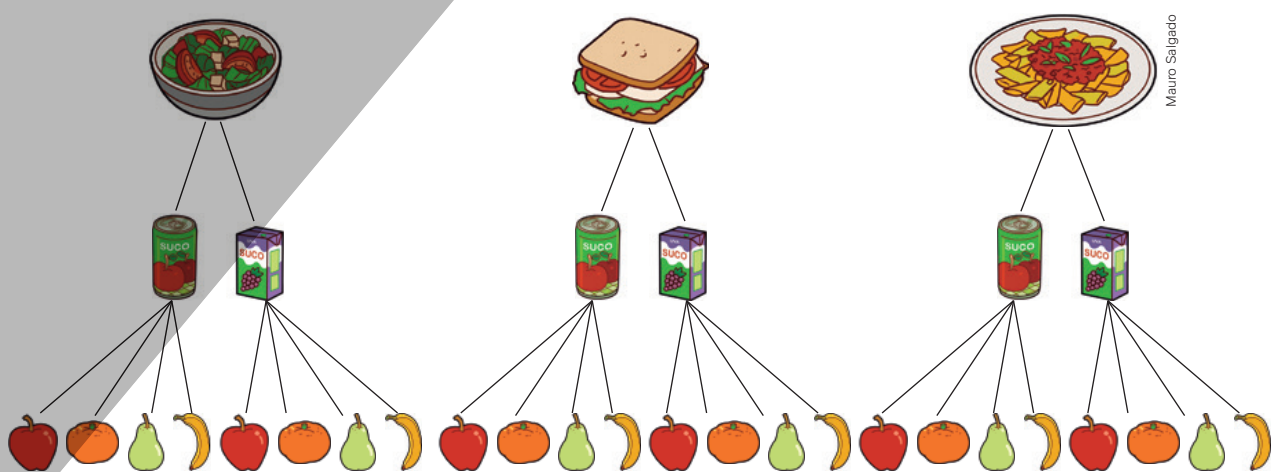
Em problemas de contagem, quando você utiliza o diagrama de árvores, ele não precisa ser [illegible]. O que importa é que as etapas sejam bem claras para que ele possa ser interpretado adequadamente. É esperado que o próprio diagrama possa descrever o que se está analisando.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Exemplo 1

O que você interpreta no diagrama de árvore a seguir? Comente com os colegas.

Orientações no Manual do Professor.



Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Junte-se a mais dois colegas para fazer esta atividade.

1. Escolham 5 letras maiúsculas distintas do nosso alfabeto.
2. Dessas 5 letras, escolham 3 letras distintas para formar uma sigla.
3. Em relação à escolha acima, elaborem uma árvore de possibilidades que descreva todas as possibilidades para formar essa sigla.
4. Utilizem recursos digitais para essa construção (ou uma folha de papel).
5. Indiquem, com base na árvore das possibilidades, a quantidade total de possibilidades para formação dessa sigla.

Agora que você já analisou e construiu o diagrama de árvore das possibilidades, deve ter observado a existência de certa limitação em relação à sua utilização. Quando numa situação de contagem o número de etapas e o total de possibilidades de cada etapa são muito grandes, torna-se trabalhosa a elaboração da árvore de possibilidades. Entretanto, o importante não está exatamente na construção, mas na compreensão, por meio da visualização de algumas árvores construídas e analisadas, de como obter o número total de possibilidades.

Princípio multiplicativo

Se um evento A_1 pode ocorrer de n_1 modos diferentes, e se, para cada uma dessas maneiras, um segundo evento A_2 pode ocorrer de n_2 modos diferentes, então o número de modos em que esses eventos podem ocorrer na ordem indicada é:

$$n_1 \cdot n_2$$

Essa mesma ideia pode ser estendida para mais de dois eventos.

Exemplo 2

Vamos calcular a quantidade de números naturais com três algarismos distintos que podemos formar com os algarismos do nosso sistema decimal.

Centena	Dezena	Unidade

Devemos escolher 3 algarismos para formar o número. O 1º evento (ou acontecimento) é a escolha de um algarismo para a centena; o 2º evento é a escolha de um algarismo para a dezena; e o 3º evento é a escolha de um algarismo para a unidade.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- 1ª escolha (evento 1): **9** possibilidades, pois o zero na situação não implicaria um número com 3 algarismos – podemos escolher qualquer outro algarismo do conjunto {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}.
- 2ª escolha (evento 2): **9** possibilidades, pois, como o algarismo das dezenas deve ser diferente do algarismo escolhido para a centena, sobram assim 8 possibilidades e, como o algarismo 0 pode ocupar a dezena, temos 9 possibilidades.
- 3ª escolha (evento 3): **8** possibilidades, pois o algarismo das unidades deverá ser diferente do algarismo das centenas e das dezenas.

Pelo princípio multiplicativo e considerando que n representa a quantidade total de números que podem ser formados, temos:

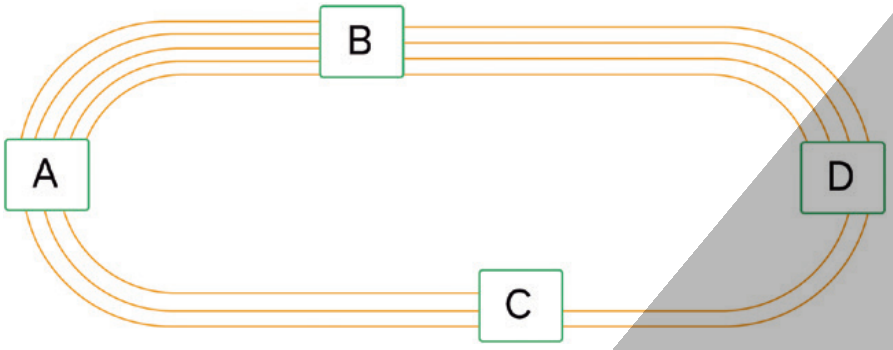
$$n = 9 \cdot 9 \cdot 8 \Rightarrow n = 648$$

Para pensar e discutir

Respostas no Manual do Professor.

1. Você saberia dizer quais dos números do conjunto {100; 101; 102; ...; 998; 999} deveriam ser excluídos no exemplo anterior?
2. Se na situação não houvesse a restrição de que os algarismos devam ser distintos, como você calcularia utilizando o princípio multiplicativo?

3. Na resolução do exemplo 2 iniciamos pela escolha do algarismo das centenas, depois pela escolha do das dezenas e, por último, pela escolha do das unidades. E se você começasse pela escolha do algarismo das unidades, o resultado seria o mesmo? Verifique!



Mauro Salgado

Exemplo 3

Você está na cidade *A* e precisa ir até a cidade *D*. Para isso, ou passa pela cidade *B* ou passa pela cidade *C*. A quantidade de caminhos entre essas cidades está indicada no desenho ao lado. De quantas maneiras diferentes você poderá, de acordo com as condições, ir da cidade *A* até a cidade *D*?

Analisando os trajetos:

- trajeto de *A* até *B* (5 possibilidades) e de *B* até *D* (4 possibilidades): $5 \cdot 4$ maneiras.
- trajeto de *A* até *C* (3 possibilidades) e de *C* até *D* (2 possibilidades): $3 \cdot 2$ maneiras.

Como temos duas escolhas excludentes (passar pela cidade *B* ou passar pela cidade *C*), o número *n* de maneiras diferentes é obtido adicionando-se as quantidades anteriores, isto é:

$$n = (5 \cdot 4) + (3 \cdot 2) \Rightarrow n = 20 + 6 \Rightarrow n = 26$$

Portanto, são 26 maneiras diferentes de ir da cidade *A* até a cidade *D*.

Atividades

1. Para ilustrar a previsão do tempo em determinada localidade, um aplicativo tem a possibilidade de informar a temperatura máxima do dia, ou a temperatura mínima do dia, ou as duas temperaturas: a máxima e a temperatura mínima juntas. Também é possível utilizar uma das seguintes figuras para indicar a situação esperada.

Mauro Salgado

De quantas maneiras diferentes o aplicativo poderá fazer a apresentação da previsão do tempo em determinado dia de acordo com as condições acima?

15 possibilidades

2. Regina lança uma moeda 4 vezes consecutivamente para observar o resultado. Ela obtém a seguinte sequência:

Banco Central do Brasil

Esse é um dos *n* resultados possíveis. Determine *n*.

16

3. Junte-se a um colega para fazer esta atividade.

Formem números com 3 algarismos utilizando os algarismos {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}.

Determinem a quantidade de números:

a) que podem ser formados;

b) que podem ser formados considerando que os algarismos devem ser distintos;

c) pares que podem ser formados;

d) pares que podem ser formados considerando que os algarismos devem ser distintos;

e) ímpares que podem ser formados;

f) ímpares que podem ser formados considerando que os algarismos devem ser distintos.

Respostas no Manual do Professor.

4. Junte-se a um colega para fazer esta atividade.

Elaborem e resolvam uma situação de contagem similar à anterior que contenha 4 itens, mas alterando a formação de números para quatro algarismos.

Em seguida, troquem com outra dupla a atividade elaborada para que ela a resolva também. Ao final, as respostas devem ser confrontadas e discutidas. Orientações no Manual do Professor.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

5. Os números dos telefones celulares de determinada cidade são formados por 9 algarismos todos iniciando pelo algarismo 9 conforme ilustrado a seguir.

9								

Responda: Respostas no Manual do Professor.

a) No máximo, quantos números de telefone essa cidade pode ter?

b) Em quantos desses números os últimos quatro algarismos são 1234?

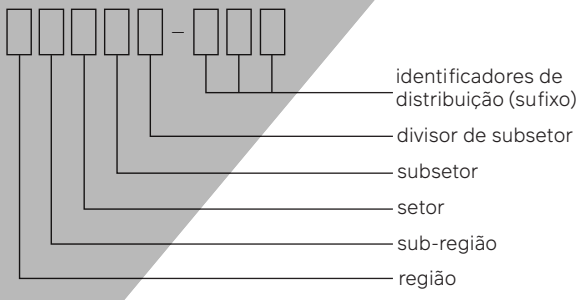
6. Uma avaliação de conceitos relacionados à Matemática é composta de 10 itens. Em cada item, o estudante deveria escrever **V** ou **F** conforme o item fosse verdadeiro ou falso, respectivamente, como ilustrado a seguir.

1	2	3	4	5
[ ] V [ ] F	[ ] V [ ] F	[ ] V [ ] F	[ ] V [ ] F	[ ] V [ ] F

6	7	8	9	10
[ ] V [ ] F	[ ] V [ ] F	[ ] V [ ] F	[ ] V [ ] F	[ ] V [ ] F

Qual é a quantidade de maneiras diferentes de se responder a essa avaliação de forma que só seja assinalada apenas uma alternativa em cada item? 1024

7. (Enem) O Código de Endereçamento Postal (CEP) é um código numérico constituído por oito algarismos. Seu objetivo é orientar e acelerar o encaminhamento, o tratamento e a distribuição de objetos postados nos Correios. Este código é baseado no sistema métrico decimal, sendo que cada um dos algarismos que o compõe codifica região, sub-região, setor, subsetor, divisor de subsetor e identificadores de distribuição conforme apresenta a ilustração.



O Brasil encontra-se dividido em dez regiões postais para fins de codificação. Cada região foi dividida em dez sub-regiões. Cada uma dessas, por sua vez, foi dividida em dez setores. Cada setor, dividido em dez subsetores. Por fim, cada subsetor foi dividido em dez divisores de subsetor. Além disso, sabe-se que os três últimos algarismos após o hífen são denominados de sufixos e destinam-se à identificação individual de localidades, logradouros, códigos especiais e unidades dos Correios. A faixa de sufixos utilizada para codificação dos logradouros brasileiros inicia em 000 e termina em 899.

Disponível em: www.correios.com.br. Acesso em: 22 ago. 2017 (adaptado).

Quantos CEPs podem ser formados para a codificação de logradouros no Brasil? Alternativa **e**.

a) $5 \cdot 0 + 9 \cdot 10^2$

b) $10^5 + 9 \cdot 10^2$

c) $2 \cdot 9 \cdot 10^7$

d) $9 \cdot 10^2$

e) $9 \cdot 10^7$

8. (Enem) O código de barras, contido na maior parte dos produtos industrializados, consiste num conjunto de várias barras que podem estar preenchidas com cor escura ou não. Quando um leitor óptico passa sobre suas barras, a leitura de uma barra clara é convertida no número 0 e a de uma barra escura, no número 1. Observe a seguir um exemplo simplificado de um código em um sistema de código com 20 barras.

Mauro Salgado

- Se o leitor óptico for passado da esquerda para a direita irá ler: 01011010111010110001.
- Se o leitor óptico for passado da direita para a esquerda irá ler: 10001101011101011010.

No sistema de código de barras, para se organizar o processo de leitura óptica de cada código, deve-se levar em consideração que alguns códigos podem ter leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, como o código 00000000111100000000, no sistema descrito acima.

Em um sistema de códigos que utilize apenas cinco barras, a quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita igual à da direita para esquerda, desconsiderando-se todas as barras claras ou todas as escuras, é: Alternativa **d**.

a) 14.

b) 12.

c) 8.

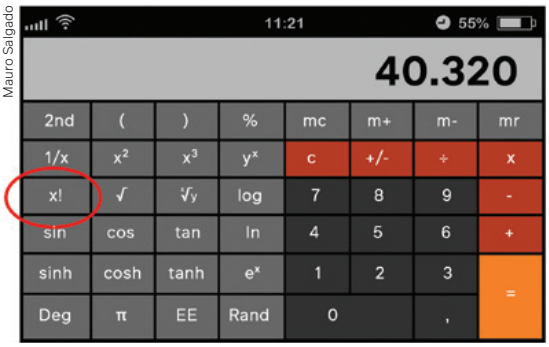
d) 6.

e) 4.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Fatorial de um número natural

Mauro Salgado



A ilustração ao lado representa uma calculadora que pode ser encontrada em aparelhos *smartphone*. O número que está no visor foi obtido por meio da multiplicação do número natural 8 por todos os seus antecessores até chegar à unidade 1, isto é:

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$$

Esse mesmo resultado poderia ser obtido por meio da tecla destacada ao lado na calculadora. Experimente digitar o número 8 e então apertar a tecla para ver o que acontece! Faça isso com outros números.

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. Qual resultado se obtém para 10!, 9! e 2!?
2. E qual resultado se obtêm utilizando essa mesma tecla quando se tenta fazer esse cálculo para um número negativo ou um número qualquer que não seja natural?

Existem situações de contagem em que, ao utilizarmos o princípio fundamental da contagem, acabamos recaindo em produtos de números naturais e consecutivos. Observe o exemplo a seguir.

Mauro Salgado

Exemplo 1

Na quadra esportiva, 7 crianças foram colocadas em fila reta, uma depois da outra. Vamos determinar o número de maneiras diferentes de posicionarmos essas crianças nessa fila.

Podemos considerar os retângulos a seguir como as posições que as crianças irão ocupar:

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- 7 maneiras para a escolha da criança que ocupará a 1ª posição;
- 6 maneiras para a escolha da criança que ocupará a 2ª posição;
- 5 maneiras para a escolha da criança que ocupará a 3ª posição;

⋮

- 1 maneira para a escolha da criança que ocupará a 7ª posição.

Pelo princípio multiplicativo, sendo n o total de possibilidades, temos:

$n = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$n = 7!$ (lemos: fatorial de sete)

$n = 5670$

Portanto, o número de resultados possíveis é 5670.

Para simplificar o cálculo que envolve o produto de números naturais consecutivos, utilizamos o chamado fatorial de um número natural:

Seja n um número natural, com $n \geqslant 2$. Define-se o fatorial de n (ou n fatorial), que é representado por $\boldsymbol{n!}$, como o produto dos números naturais consecutivos n, $n - 1$, $n - 2$, ..., 1. Isto é:

$$\boldsymbol{n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \ldots 2 \cdot 1}$$

Exemplo 2

Vamos calcular o fatorial dos seguintes números:

- $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
- $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Utilizando os fatoriais acima, observe como podemos reescrevê-los:

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$6! = 6 \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{5!}$$

$$6! = 6 \cdot 5!$$

Podemos expressar o fatorial de um número natural n, $n \geqslant 3$, em função do fatorial de seu antecedente, isto é:

$$\underbrace{n! = n \cdot (n-1)!}_{\text{propriedade do fatorial de um número natural } n \geqslant 3}$$

Faremos uma extensão do conceito de fatorial de um número natural definindo fatorial do número zero e fatorial do número 1. Partimos da propriedade mencionada anteriormente, que por enquanto é válida apenas para números naturais n tais que $n \geqslant 3$:

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

- Vamos definir 1! de tal modo que essa propriedade seja válida para $n = 2$, isto é:

$$2! = 2 \cdot (2-1)! = 2 \cdot 1!$$

$$\text{Como } 2! = 2 \cdot 1 \Rightarrow 2 \cdot 1 = 2 \cdot 1! \Rightarrow 1 = 1!$$

Assim, a propriedade acima poderá ser considerada para $n = 2$ se definirmos **1! = 1**.

- Vamos definir 0! de tal modo que essa mesma propriedade seja válida para $n = 1$, isto é:

$$1! = 1 \cdot (1-1)! = 1 \cdot 0!$$

$$\text{Como } 1! = 1 \Rightarrow 1 = 1 \cdot 0! \Rightarrow 1 = 0!$$

Assim, a propriedade acima poderá ser considerada para $n = 1$ se definirmos **0! = 1**.

Definindo então **1! = 1** e **0! = 1**, admitimos que a propriedade $n! = n \cdot (n-1)!$ pode ser aplicada para qualquer número natural não nulo n.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Exemplo 3

Utilizando o conceito de fatorial de um número natural n, vamos resolver a equação $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 20$.

- Observe que podemos reescrever o numerador da fração em função do denominador utilizando o conceito e a propriedade de fatorial:

$$\frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = 20 \Rightarrow (n+1) \cdot n = 20 \Rightarrow n^2 + n - 20 = 0$$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow n = \frac{-1 \pm 9}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = 4 \\ n = -5 \end{cases}$$

Como n é um número natural, temos que $n = 4$.

Nesse tópico propomos apenas atividades que envolvem fatorial de um número natural, assim depois poderemos utilizar isso como uma ferramenta para o cálculo de contagens em outras situações de agrupamentos.

Atividades

1. Responda: Respostas no Manual do professor.

a) Qual é o número natural cujo fatorial é igual ao próprio número?

b) Para quantos números naturais n tem-se $n! < 1000$? Quais são os valores de n?

2. Classifique cada afirmação a seguir como verdadeira ou falsa.

a) $4! + 5! = 9!$ Falsa.

b) $(4!) \cdot (3!) = 12!$ Falsa.

c) $5! + 5! = 2 \cdot 5!$ Verdadeira.

d) $\frac{8!}{4!} = 2!$ Falsa.

3. Calcule o valor da expressão numérica a seguir utilizando o conceito de fatorial de um número natural.

$$E = (3!)^2 + 2 \cdot 4! + (4 - 2!) + (2!)^{3!}$$ 150

4. Represente utilizando a notação de fatorial: Respostas no Manual do Professor.

a) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

b) $14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!$

c) $(k + 1) \cdot k \cdot (k - 1)!$, sendo k um número natural maior que 2.

5. Simplifique e calcule os resultados de cada expressão numérica: Respostas no Manual do Professor.

a) $\frac{8!}{5!}$ **b)** $\frac{10!}{4! \cdot (10 - 4)!}$ **c)** $\frac{15!}{(15 - 3)!}$

6. Considere as expressões algébricas a seguir, em que os fatoriais são de números naturais representados em função de n. Simplifique cada expressão: Respostas no Manual do Professor.

a) $\frac{n!}{(n - 2)!}$

b) $\frac{(n - 1)!}{(n - 3)!}$

c) $\frac{(n - 1)!}{(n + 1)!}$

7. Considere que a expressão E, dada por $E = \frac{(n + 2)! + (n + 1)!}{(n + 1)!}$, pode ser simplificada de tal forma que o resultado não contém o símbolo fatorial. Simplifique essa expressão. $E = n + 3$

8. Utilizando o conceito de fatorial de um número natural determine o valor de x para que seja verificada cada equação a seguir. Respostas no Manual do Professor.

a) $\frac{x!}{(x - 1)!} = 5!$

b) $\frac{(x + 1)! - x!}{(x - 1)!} = 81$

Agrupamentos

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Ao reunir alguns talheres numa gaveta, ao colocar livros em certa ordem numa estante, ao reunir algumas pessoas para uma atividade qualquer, estamos fazendo agrupamentos. O estudo da Análise Combinatória aborda a questão de contagem na formação de agrupamentos. Existem agrupamentos em que a ordem dos elementos não é relevante; entretanto, há aqueles em que a ordem é fundamental.

Observe atentamente as imagens a seguir.

Wavebreakmedia/iStockphoto.com

Pessoas fazem piquenique em um parque.

andresr/E+/iStockphoto.com

Pessoas alcançam a linha de chegada de uma maratona.

mediaphotos/E+/iStockphoto.com

Fila de pessoas para autoatendimento em caixa eletrônico.

Ivanko80/Shutterstock.com

Pessoas em reunião de trabalho.

Para pensar e discutir Orientações no Manual do Professor.

1. O que há em comum nessas imagens?
2. Você constata alguma característica em que os agrupamentos de pessoas se diferenciam entre si?

No estudo de análise combinatória nos deparamos com situações de contagem relacionadas a agrupamentos. Nesse caso, podemos nos deparar com a necessidade de efetuar cálculos apenas envolvendo o número de escolhas de elementos para a formação de um grupo.

Podemos, entretanto, encontrar situações de cálculo em que, além de envolver escolhas de elementos, também é necessário ordená-los (misturá-los).

Nessas situações que passaremos a enfrentar, algumas vezes escolhemos parte dos elementos de um grupo; em outras, o grupo todo pode ser escolhido.

Permutação simples

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Um grupo de seis amigos se encontra para uma atividade de pesquisa. Como nunca participaram juntos de uma foto, resolvem posar para uma fotografia colocando-se um ao lado do outro, como sugere a ilustração a seguir.

Mauro Salgado

Existem 720 maneiras diferentes de posicionar esses amigos um ao lado do outro para fazer uma foto, considerando que uma maneira difere da outra apenas na "posição" ocupada.

Como podemos chegar ao resultado de 720?

Que tal se alguns estudantes da turma simularem essa situação e outras que vamos sugerir a seguir?

Não entra em jogo aqui a escolha dos amigos para as fotos. Considere que 2 amigos, ou 3 amigos, ou 4 amigos ou ainda 5 amigos estejam perfilados para a foto.

Mauro Salgado

Nas perguntas seguintes, o que interessa é o número de maneiras de posicionar os amigos em cada grupo formado para a foto, isto é, uma foto se difere da outra apenas pelo posicionamento das pessoas.

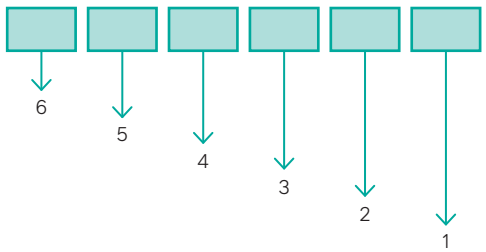
Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

De acordo com as condições acima, responda:

1. Quantas posições diferentes existem para 2 amigos? Explique como calculou.
2. Quantas posições diferentes existem para 3 amigos? Explique como calculou.
3. Quantas posições diferentes existem para 4 amigos? Explique como calculou.
4. Quantas posições diferentes existem para 5 amigos? Explique como calculou.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Vamos retornar ao grupo dos seis amigos que se encontraram para a atividade de pesquisa. Considere que os retângulos a seguir representam as posições que serão ocupadas pelas pessoas. Temos 6 possibilidades para a posição mais da esquerda (poderíamos começar pela direita). Uma pessoa ocupa essa posição, logo, sobram 5 possibilidades para a segunda posição. Uma pessoa ocupa essa posição, sobrando apenas 4 para possibilidades para a próxima, e assim sucessivamente.



Pelo princípio multiplicativo, temos que o número total n de possibilidades é:

$n = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

ou

$n = 6!$

$n = 720$

Portanto, são 720 maneiras diferentes.

Em problemas de contagem, quando todos os elementos do grupo participam do evento e, além disso, um agrupamento se diferencia do outro apenas pela ordem que ocupam no agrupamento, temos uma situação de **permutação**.

> Dado um conjunto com ***n*** elementos distintos chama-se permutação desses ***n*** elementos todo agrupamento ordenado (sequência) formado por esses ***n*** elementos.

Para calcular o número total de permutações possíveis desses ***n*** elementos, que indicaremos por P_n, procedemos da seguinte maneira:

$\underbrace{(_; _; _; _; \ldots; _)}$ → sequência com n elementos

- Temos ***n*** possibilidades para a escolha do 1º elemento da sequência.
- Temos (***n*** − **1**) possibilidades para a escolha do 2º elemento da sequência, dado que o 1º já foi escolhido.
- Temos (***n*** − **2**) possibilidades para a escolha do 3º elemento da sequência, dado que os 2 primeiros já foram escolhidos.

⋮

- Temos **2** possibilidades de escolha para o (***n*** − **1**)º elemento da sequência, dado que os (***n*** − **2**) primeiros já foram escolhidos.
- Temos **1** possibilidade de escolha para o *n*º elemento da sequência, dado que os (***n*** − **1**) primeiros já foram escolhidos.

Assim, pelo princípio fundamental da contagem, o total de permutações pode ser dado por:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 2 \cdot 1 \Rightarrow P_n = n!$$

Chamamos de permutação simples dos *n* elementos. A denominação "simples" se dá pelo fato de não haver repetição de elementos, como veremos mais adiante.

Exemplo 1

Quando trocamos apenas a ordem das letras de uma palavra qualquer, estamos formando anagramas. No quadro ao lado estão todos os anagramas possíveis de serem formados com as letras da palavra TIME.

TIME	TIEM	TEIM	TEMI	TMEI	TMIE
ITME	ITEM	IMET	IMTE	IETM	IEMT
METI	MEIT	MITE	MIET	MTEI	MTIE
EITM	EIMT	EMTI	EMIT	ETMI	ETIM

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- Temos as trocas de posições entre as letras, isto é, temos permutações simples de 4 elementos, cujo total de possibilidades é: $P_4 = 4! \Rightarrow P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow P_4 = 24$

Após esse exemplo cabe uma reflexão!

Você provavelmente deve estar pensando que não precisaríamos ter abordado o tópico permutação, pois essas situações poderiam ser resolvidas por meio do princípio multiplicativo. Você está correto, porém, à medida que o número de elementos utilizados aumenta, fica mais direto dizer que basta considerar que estamos diante da permutação de 10 elementos, de 25 elementos etc. Além disso, não é necessário descrever ou analisar cada etapa indicando as possibilidades de realização.

Há situações nas quais algumas exigências dificultam o cálculo, mas a utilização de permutação como foi apresentada acima acaba auxiliando bastante. Vamos exemplificar!

Exemplo 2

Quantos são os anagramas da palavra ALUNO que se iniciam por vogal?

- Precisamos escolher uma vogal para ocupar a 1ª posição. Dispomos de 3 possibilidades:

A				
U				
E				

• O número n total de possibilidades é calculado por:

$n = 3 \cdot P_4$

Explicação
Escolhemos 1 vogal para ocupar a posição inicial: são 3 possibilidades para essa escolha. As 4 letras que sobram simplesmente são permutadas nas 4 posições.

Para pensar e discutir
Respostas no Manual do Professor.

1. No total, quantos anagramas podem ser formados no exemplo anterior?
2. E qual seria o total de anagramas como as mesmas letras, porém iniciando por consoante? Explique utilizando permutação.
3. E qual seria o total de anagramas começando e terminando por uma vogal? Explique.

Exemplo 3

Considere 6 estudantes em sua turma com as seguintes condições: 3 que usam bonés e 3 que não usam bonés. Se colocarmos essas 6 pessoas uma ao lado da outra, de quantas maneiras elas podem ser permutadas de lugares considerando que as pessoas que utilizam bonés sempre devem ficar juntas, uma do lado da outra?

• A condição importante é que as pessoas que usam boné deverão ficar juntas. Vamos utilizar o artifício de considerar que essas três sejam "uma pessoa". Assim, cada quadro abaixo representa "uma pessoa".

Permutamos essas "4 pessoas".

• Assim, garantimos que os três que usem bonés fiquem juntos. Entretanto, eles podem ficar juntos, mas também podem trocar de posições entre eles (permutamos os 3 de bonés). Assim, o total é n, tal que:

$n = (P_4) \cdot (P_3) \Rightarrow n = (4!) \cdot (3!) \Rightarrow n = 24 \cdot 6 = 144$

Portanto, são 144 possibilidades.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir
Respostas no Manual do Professor.

1. Em quantas dessas permutações das 6 pessoas não teríamos juntas as 3 que usam boné? Explique utilizando permutação.
2. Considere que devemos alternar pessoas com e sem bonés. De quantas maneiras isso poderia ocorrer? Explique utilizando permutação.
3. Escreva um algoritmo para calcular o número de permutações de n elementos, sendo n um número natural. Em seguida, represente esse algoritmo por meio de um **fluxograma**.

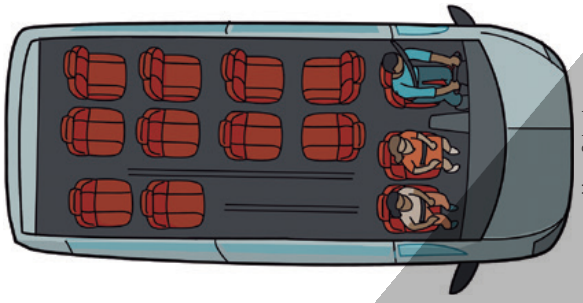
A atitude que deve ser valorizada quando você estiver diante de um problema de análise combinatória é se colocar de tal maneira que você faça parte da situação, manipulando, observando, enfim, buscando a compreensão do que exatamente está em jogo, o que difere um agrupamento do outro.

Para entender melhor o conceito destacado, consulte o tópico **Algoritmos e fluxogramas** na **Caixa de ferramentas**.

Atividades

1. Considere que você esqueceu os 4 últimos algarismos do celular de sua nova amiga. Entretanto, você sabe quais são os algarismos, só não se lembra da ordem deles. Quantas são as possibilidades? 24

2. Na ilustração abaixo estão os 3 bancos dianteiros de uma *van* e os 10 bancos destinados aos passageiros. Os bancos da frente já estão ocupados, e, ao iniciar uma pequena viagem turística, 10 pessoas entram na *van* para ocupar os 10 bancos.



Mauro Salgado

a) De quantas maneiras essas 10 pessoas podem se distribuir nos 10 bancos?

b) Marta e Pedro são 2 dos 10 passageiros. De quantas maneiras é possível distribuir as 10 pessoas nos bancos considerando que Marta e Pedro irão ocupar os dois lugares de costas para os três bancos dianteiros?

Respostas no Manual do Professor.

3. Junte-se a um colega para fazer esta atividade.

1ª parte: Escrevam uma palavra com 7 letras distintas.

2ª parte: Elaborem e resolvam 4 situações que envolvam os anagramas das 7 letras da palavra escolhida na 1ª parte.

Orientações no Manual do Professor.

3ª parte: Apresentem as situações elaboradas para que outra dupla as resolva. Ao final, confrontem as respostas e resolvam possíveis discrepâncias.

4. Em sua turma vamos considerar um grupo de 15 estudantes: 5 vestem camisetas amarelas, 5 vestem camisetas vermelhas e 5 vestem camisetas verdes. Deseja-se formar um fila com essas 15 pessoas de tal maneira que as três primeiras vistam camisetas de cores diferentes e as seguintes mantenham a sequência de cores dadas pelas três primeiras. Qual é o total de maneiras distintas de formar essa fila? $(5!)^3 \cdot (3!)$

5. Considere todos os números naturais de seis algarismos distintos obtidos permutando-se os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Utilizando essas condições faça o que se pede. Respostas no Manual do Professor.

a) Escreva o maior número que se pode formar.

b) Escreva o menor número que se pode formar.

c) Quantos dos possíveis números que se podem formar iniciam pelo algarismo 1?

d) Quantos dos possíveis números que se podem formar iniciam pelo algarismo 4?

e) Quantos dos possíveis números que se podem formar são maiores que 452 316?

f) E quantos são menores que 345 612?

6. Um restaurante "por quilo" coloca os alimentos ao longo de uma fila. São 3 diferentes pratos com salada, 5 diferentes pratos com salgados e 4 diferentes pratos de sobremesa. Respostas no Manual do Professor. Considerando que os pratos de salada devem ficar juntos, os pratos quentes devem ficar juntos e também os pratos de sobremesa, responda:

a) Em quantas dessas disposições dos pratos poderemos ter a ordem "salada, prato quente, sobremesa"?

b) Qual é o número total de possibilidades de dispor os pratos?

7. Considere todos os anagramas que podem ser formados com as letras da palavra ELOGIAR. Responda:

a) Em quantos desses anagramas as letras A e R aparecem juntas? Respostas no Manual do Professor.

b) Em quantos desses anagramas as letras A e R aparecem juntas nessa ordem?

c) Em quantos desses anagramas as letras A, R e G aparecem juntas?

d) Em quantos desses anagramas as letras A, R e G aparecem juntas nessa ordem?

8. Em uma reunião internacional de representantes de ONGs estão presentes: 3 brasileiros, 4 americanos e 5 mexicanos. Essas pessoas vão posar para uma fotografia em fila de tal modo que os de mesma nacionalidade fiquem juntos. De quantas maneiras distintas isso pode ocorrer? $P_3 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot P_5 = 103\,680$

9. (UFJF-MG) Em três sofás de dois lugares cada, dispostos em uma fila, deverão se assentar 3 rapazes e 3 moças. Uma expressão que permite calcular a quantidade de maneiras que essas pessoas podem se sentar nesses sofás, de modo que em cada sofá fiquem sentados um rapaz e uma moça, é: Alternativa **a**.

a) $6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3!$

b) $2! \cdot 2! \cdot 2!$

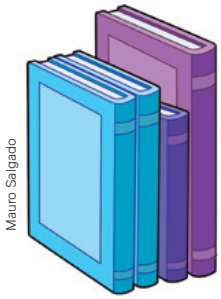
c) $3 \cdot 2!$

d) $6!$

e) $\frac{6!}{3}$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Permutação com repetição


Mauro Salgado

Já foi aqui comentado que a utilização da relação de permutação facilita o cálculo associado à contagem de determinados agrupamentos. Vimos exemplos como a disposição de pessoas em filas ou de objetos em determinada ordem. Citamos exemplos que envolviam a formação de anagramas. Tais situações se referiam a elementos não repetidos. E o que ocorre quando temos elementos que são iguais e precisamos determinar a quantidade de maneiras distintas de ordená-los?

Por exemplo, de quantas maneiras diferentes podemos dispor na vertical os 4 livros ilustrados ao lado? Nesta situação, o que interessa é colocar um livro ao lado do outro considerando que um agrupamento irá se diferenciar do outro pela ordem dos elementos.

Como temos 4 livros e dois deles são iguais, podemos representá-los por letras ***A***, ***B***, ***C*** e ***c***. Note que estamos utilizando uma letra maiúscula ***C*** e uma minúscula ***c*** para representar dois livros iguais. Como são 4 elementos, vamos permutá-los obtendo as seguintes possibilidades:

ABCc	*ABcC*	*ACBc*	*ACcB*	*AcCB*	*AcBC*
BACc	*BAcC*	*BcAC*	*BcCA*	*BCcA*	*BCAc*
CABc	*CAcB*	*CBAc*	*CBcA*	*CcAB*	*CcBA*
cABC	*cACB*	*cBAC*	*cBCA*	*cCAB*	*cCBA*

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. Considerando ***c*** diferente de ***C***, quantas são as permutações possíveis?
2. Considerando que ***c*** é igual a ***C*** nas representações, quais delas precisam ser descartadas?
3. Por meio da permutação de 4 elementos, como podemos obter o resultado que indica a permutação dos 4 elementos sendo 2 deles iguais? Escreva em função de permutação.

Ao permutarmos dois ou mais elementos que são exatamente iguais, isto é, que são indistinguíveis, não obtemos uma nova permutação. Estamos, nesses casos, diante de **permutação com repetição**. Um exemplo em que isso fica evidente é a formação de anagramas das letras de palavras com letras repetidas.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Exemplo 1

Abaixo estão todos os anagramas que podem ser formados com as letras da palavra OSSOS.

OOSSS	OSOSS	OSSOS	OSSSO	SOOSS
SOSOS	SOSSO	SSOOS	SSOSO	SSSOO

Se você olhar para esse quadro a fim de verificar os anagramas apresentados, é bem provável que faça pelo menos uma das seguintes perguntas:

- Será que todas as possibilidades estão descritas no quadro?
- Não há repetição de anagramas?

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. Se fossem consideradas todas as letras distintas, quantos seriam os anagramas? Escreva como permutação.
2. Desse total, quantas permutações podem ser consideradas idênticas apenas pelas posições das letras S? Expresse como permutação.
3. E quantas delas podem ser consideradas idênticas apenas pelas posições das letras O? Expresse como permutação.
4. Como você calcularia todos os anagramas das letras da palavra OSSOS? Bate com a quantidade indicada no quadro?

Esses dois exemplos apresentados e discutidos são casos de permutação com repetição de elementos, isto é, permutação em que aparecem elementos iguais.

Dados n elementos, dos quais $\boldsymbol{n_1}$ são iguais a A_1, n_2 são iguais a A_2, n_3 são iguais a A_3, ..., n_r são iguais a A_r, com $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_r = n$, o número de permutações possíveis desses $\boldsymbol{n}$ elementos é dado por:

$$P_n^{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_r} = \frac{n!}{(n_1!) \cdot (n_2!) \cdot (n_3!) \cdot \ldots \cdot (n_r!)}$$

Para calcular o número total de permutações desses elementos, temos que posicioná-los em sequência:

$$\left(\underbrace{A_1, A_1, \ldots, A_1}_{n_1}, \underbrace{A_2, A_2, \ldots, A_2}_{n_2}, \underbrace{A_3, A_3, \ldots, A_3}_{n_3}, \ldots, \underbrace{A_r, A_r, \ldots, A_r}_{n_r} \right)$$

n_1 elementos são iguais a A_1
n_2 elementos são iguais a A_2
n_3 elementos são iguais a A_3
⋮
n_r elementos são iguais a A_r

Se todos os elementos fossem distintos, o resultado de todas as permutações seria P_n. Porém, cada vez que mudamos a ordem dos n_1 elementos iguais a A_1 entre si, dos n_2 elementos iguais a A_2 entre si, dos n_3 elementos iguais a A_3 entre si, ..., e dos n_r elementos iguais a A_r entre si, temos as mesmas permutações. Logo:

$$P_n^{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_r} = \frac{P_n}{(P_{n_1}) \cdot (P_{n_2}) \cdot (P_{n_3}) \cdot \ldots \cdot (P_{n_r})}$$

$$P_n^{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_r} = \frac{n!}{(n_1!) \cdot (n_2!) \cdot (n_3!) \cdot \ldots \cdot (n_r!)} \qquad (n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_r = n)$$

Vamos agora considerar uma situação um pouco diferente de posicionar livros ou de formar anagramas.

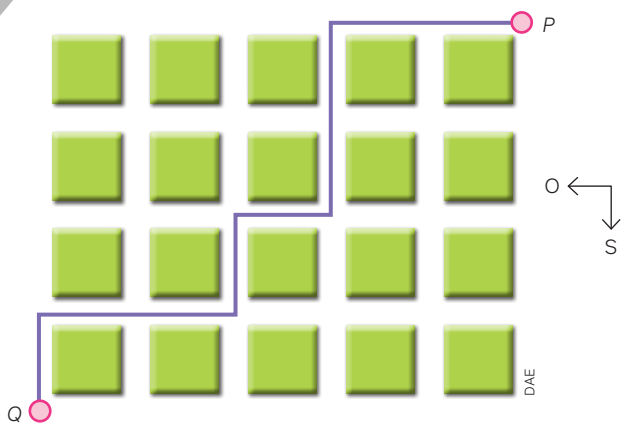
Exemplo 2

A ilustração ao lado representa quadras e ruas de uma localidade. Imagine que você está no ponto P e deseja ir até o ponto Q, caminhando sempre para leste (L) ou para oeste (O) ou para o sul (S).

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Observe que na ilustração já está indicado um trajeto, que vamos representar pela seguinte sequência:

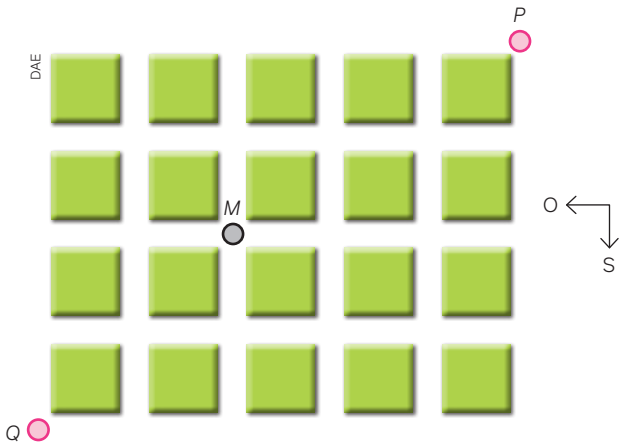
(O, O, S, S, O, S, O, O, S)



Para pensar e discutir

Respostas no Manual do Professor.

1. Quantas quadras foram percorridas no trajeto exemplificado? Quantas vezes para oeste? Quantas vezes para o sul?
2. Qual trajeto você faria? Descreva!
3. Em que o trajeto que você descreveu diferencia-se do trajeto exemplificado? O que tem em comum?
4. Quantos trajetos diferentes é possível fazer considerando-se condições estabelecidas?



Aproveitando esse exemplo, vamos imaginar outro com as mesmas condições, porém observando que há um ponto intermediário *M*. Assim, a pessoa deve sair do ponto *P* passar pelo ponto *M* e, então, ir até o ponto *Q*. Quantos caminhos diferentes podem ser feitos?

- Note que, para ir de *P* a *M*, deve-se andar 3 quadras para oeste e 2 para o sul, não necessariamente nesta ordem:

(O, O, O, S, S)

Como podemos mudar essa ordem, temos permutação de 5 com 3 e 2 repetições: $P_5^{3,2}$.

- Para ir de *M* a *Q*, deve-se andar 2 quadras para oeste e 2 para o sul, não necessariamente nessa ordem:

(O, O, S, S)

Como podemos mudar essa ordem, temos permutação de 4 com 2 e 2 repetições: $P_4^{2,2}$

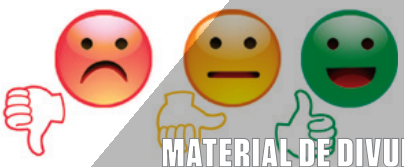
- Como a condição estabelece que se deve percorrer de *P* a *M* e de *M* a *Q*, pelo princípio multiplicativo o total *n* de possíveis caminhos que podem ser feitos é:

$$n = P_5^{3,2} \cdot P_4^{2,2} \Rightarrow n = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$$

$$n = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2 \cdot 1} \Rightarrow n = 10 \cdot 6 \Rightarrow n = 60$$

São 60 caminhos diferentes.

Atividades



Mauro Salgado

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1. Numa avaliação de um *site* utilizam-se "carinhas" que externam a opinião das pessoas. Considere que as possibilidades sejam as seguintes:
Numa avaliação com 5 quesitos (numerados de 1 até 5) apareceram 3 "carinhas tristes", 1 "carinha alegre" e 1 "carinha regular". De quantas maneiras essas "carinhas" poderiam ter sido ordenadas?
Permutação de 5 com 3 repetições: 20 maneiras.

2. Com as letras de ASAS faça o que se pede a seguir.

a) Obtenha todos os anagramas que podem ser formados com as letras de ASAS.

b) Como você calcularia o número total desses anagramas? Respostas no Manual do Professor.

3. Ao fazer os anagramas das letras da palavra ASAS provavelmente não houve muita dificuldade. Entretanto, à medida que o número de letras aumenta, a dificuldade também tende a aumentar. Daí a necessidade de se organizar. Construa todos os anagramas da palavra ARARA e, somente depois, faça o cálculo utilizando permutação com repetição para verificar se não faltou nenhum anagrama.
São 10 anagramas: AAARR, AARRA, ARRAA, RRAAA, RARAA, RAARA, RAAAR, ARARA, ARAAR, ARRAA.

4. Seis bolas novas de voleibol estão colocadas lado a lado numa estante na sala de Educação Física.

Mauro Salgado

Colocando-as em fila, qual é o total de possibilidades para ordená-las considerando que trocar posições em duas bolas iguais não altera a disposição?
30 maneiras diferentes (permutação de 6 com 4 repetições)

5. Junte-se a mais um colega para fazer esta atividade.

1ª parte

Elaborem uma situação que envolva contagem relacionada à permutação com repetição.

2ª parte

Resolvam a situação que vocês elaboraram.

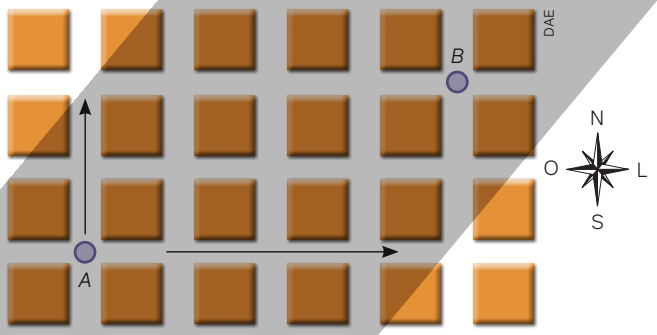
3ª parte

Apresentem a situação para que outra dupla a resolva.

4ª parte

Confrontem as respostas obtidas e, em caso de discordância, troquem ideias com a turma toda. Resposta pessoal.

6. A figura ao lado representa um conjunto de quadras de uma cidade planejada. Admita que uma pessoa se encontra no ponto *A* e precisa ir até o ponto *B*, porém seguindo apenas para norte ou para leste. Respostas no Manual do Professor.



a) Indique um caminho que essa pessoa pode fazer e escreva sentidos que ela pode seguir.

b) Quantos caminhos diferentes ao todo ela pode percorrer?

7. Utilize a situação anterior para elaborar outra acrescentando o seguinte: Orientações no Manual do Professor.

- Insira um ponto *P* numa esquina situada no trajeto entre *A* e *B*.
- Estabeleça que se deva sair de *A* até *B*, porém passando pelo ponto *P*.

Após a elaboração, calcule o total de caminhos que podem ser feitos. Apresente a situação e a solução para que um colega também a resolva, confrontando os resultados.

8. (Unesp) A figura mostra a planta de um bairro de uma cidade. Uma pessoa quer caminhar do ponto *A* ao ponto *B* por um dos percursos mais curtos. Assim, ela caminhará sempre nos sentidos "de baixo para cima" ou "da esquerda para a direita". O número de percursos diferentes que essa pessoa poderá fazer de *A* até *B* é: Alternativa **d**.

a) 95 040.

b) 40 635.

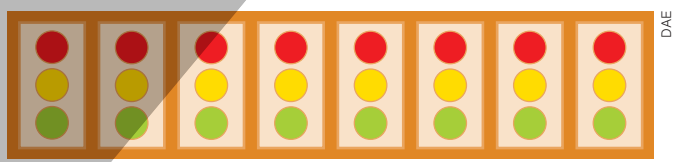
c) 924.

d) 792.

e) 35.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

9. (Uerj) Um sistema luminoso, constituído de oito módulos idênticos, foi montado para emitir mensagens em código. Cada módulo possui três lâmpadas de cores diferentes – vermelha, amarela e verde. Observe a figura:



Considere as seguintes informações:

- Cada módulo pode acender apenas uma lâmpada por vez;
- Qualquer mensagem é configurada pelo acendimento simultâneo de três lâmpadas vermelhas, duas verdes e uma amarela, permanecendo dois módulos com as três lâmpadas apagadas;
- Duas mensagens são diferentes quando pelo menos uma das posições dessas cores acesas é diferente.

Calcule o número de mensagens distintas que esse sistema pode emitir. 1680

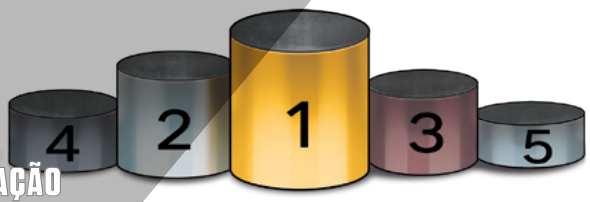
Arranjos simples

Nas situações de contagem apresentadas e discutidas anteriormente nos tópicos "Permutação simples" e "Permutação com repetição", **todos os elementos** participavam dos agrupamentos. Nelas, um agrupamento se diferenciava do outro pela ordem em que os elementos eram considerados. Podemos ter, entretanto, problemas de contagem em que, além de os agrupamentos se diferenciarem pela ordem de seus elementos, nem todos os elementos precisam participar.

A ilustração abaixo envolve 11 pilotos em posição de largada para iniciar uma corrida de *kart*. Quem vai ganhar?

Reinaldo Vignati

Ao final da corrida, os cinco primeiros colocados ocupam suas posições no pódio para receber as premiações correspondentes. Quem serão os cinco primeiros colocados? Não podemos saber antes de terminar a corrida, mas podemos determinar a quantidade de maneiras de isso ocorrer: é a análise combinatória!



Mauro Salgado

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. Qual é o número de possibilidades para o 1º lugar na corrida? Justifique.
2. Sabendo quem é o 1º colocado, quantas possibilidades teríamos para o 2º lugar? Justifique.
3. Como você calcula o número total de possibilidades para os cinco primeiros colocados dessa corrida? Qual é o total de possibilidades?

Dan Mullan/Getty Images

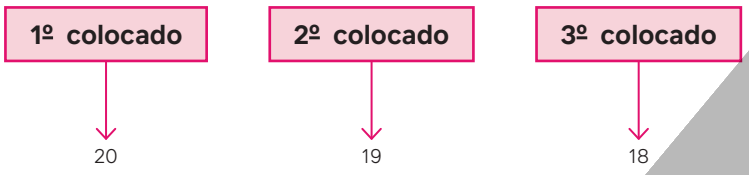
Largada do Grand Prix da Alemanha de Fórmula1 em Hockenheimring, 28 de julho de 2019.

Vamos considerar outro exemplo também de corrida. Que tal Fórmula 1?

A foto ao lado é do *grid* de largada de uma corrida de Fórmula 1. É claro que hoje sabemos qual foi a colocação final, isto é, a ordem em que os pilotos chegaram ao final da corrida.

Considere que 20 pilotos iniciaram a corrida. De quantas maneiras diferentes poderíamos ter os 3 primeiros colocados ocupando o pódio?

- Podemos iniciar pensando em quantas possibilidades temos para o 1º colocado. A partir daí, pensamos no número de possibilidades para o 2º colocado e, somente então, consideramos o número de possibilidades para o 3º colocado.



- Utilizando o princípio multiplicativo da contagem e sendo n o número total de possibilidades, temos:

$$n = 20 \cdot 19 \cdot 18$$

$$n = 6\,840$$

Portanto, são 6840 possibilidades de termos o 1º, o 2º e o 3º colocados na corrida com 20 pilotos competindo.

Observe, com base nesse exemplo, que poderíamos utilizar no cálculo o conceito de fatorial de um número natural para chegarmos à resposta:

$$n = 20 \cdot 19 \cdot 18$$

(Multiplicamos e dividimos pelo fatorial de 17.)

$$n = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \frac{17!}{17!}$$

(Utilizamos o conceito de fatorial e consideramos que $17 = 20 - 3$.)

$$n = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{(20 - 3)!}$$

$$n = \frac{20!}{(20 - 3)!}$$

Interpretamos:
Arranjo de 20 elementos tomados de 3 em 3.
Representamos:
$A_{20,\,3}$ ou A_{20}^{3}

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. Qual é o significado da palavra **arranjo**?
2. Como você representaria, utilizando arranjo, as possibilidades dos 5 primeiros colocados no exemplo inicial do *kart*?

Nas situações que envolvem o que chamamos de arranjos simples (simples por não haver repetição de elementos no mesmo agrupamento), os elementos são colocados em ordem. São exemplos de arranjos simples:

- escolhas de quem será o presidente e o vice-presidente que representará a turma;
- resultados possíveis dos 4 primeiros times num campeonato de futebol em que participam 20 times.

Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se arranjo desses n elementos, tomados k a k ($k \leqslant n$), qualquer agrupamento ordenado de k elementos distintos escolhidos entre os n existentes.

Para calcular o número total de arranjos possíveis desses n elementos, que indicaremos por $A_{n,k}$, procedemos da seguinte maneira:

$\underbrace{(_;\ _;\ _;\ _;\ ...;\ _)}$ → sequência com k elementos

- Para o **1º** elemento da sequência temos $\boldsymbol{n}$ possibilidades de escolha.
- Para o **2º** elemento da sequência temos $(\boldsymbol{n - 1})$ possibilidades de escolha, dado que o 1º já foi escolhido e não pode haver repetições de elementos.
- Para o **3º** elemento da sequência temos $(\boldsymbol{n - 2})$ possibilidades de escolha, dado que os 2 primeiros já foram escolhidos e não pode haver repetições de elementos.

(...)

- Para o $\boldsymbol{k}$º elemento da sequência temos $\boldsymbol{n - (k - 1) = (n - k + 1)}$ possibilidades de escolha, dado que os $(\boldsymbol{k - 1})$ primeiros já foram escolhidos.

Assim, pelo princípio fundamental da contagem, o total de arranjos pode ser dado por:

$$A_{n,k} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \ldots (n - k + 1)$$

multiplicando e dividindo o 2º membro por $(n - k) \cdot (n - k - 1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$

$$A_{n,k} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1) \cdot \frac{(n - k) \cdot (n - k - 1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n - k) \cdot (n - k - 1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \Rightarrow A_{n,k} = \frac{n!}{(n - k)!}$$

A relação acima também pode ser escrita como: $A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}$.

Para pensar e discutir

Respostas no Manual do Professor.

1. O que obtemos nessa fórmula quando consideramos que $n = k$?
2. Ao substituir n por k nessa fórmula, surge 0!, que foi definido como sendo 1. Assim, como você define permutação simples em função de arranjos simples?

Atividades

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1. Calcule os valores a seguir, relacionados à formação de arranjos simples.

Respostas no Manual do Professor.

a) A_{10}^2 **b)** A_8^3

2. Resolva cada uma das seguintes equações: Respostas no Manual do Professor.

a) $A_n^3 = 120$ **b)** $A_n^2 = 3 \cdot n + 5$

3. Na fotografia a seguir, três cadeiras são colocadas em linha. Considere ainda que 7 pessoas estão em pé, e 3 delas ocuparão esses lugares. Respostas no Manual do Professor.

kibri_ho/Shutterstock.com

a) Utilizando o princípio multiplicativo, determine o número de maneiras de essas 7 pessoas ocuparem os três lugares.

b) Esse problema poderia ser resolvido utilizando arranjos simples? Explique.

4. Responda: Respostas no Manual do Professor.

a) Em problemas de arranjos, a mudança de ordem dos elementos no agrupamento altera o agrupamento? Explique.

b) O cálculo de P_5 (permutação simples de 5 elementos) pode ser feito por meio de arranjos simples? Justifique.

5. Junte-se a um colega para fazer esta atividade.

1ª parte

Elaborem uma situação que envolva o número de estudantes de sua turma e 4 cadeiras colocadas uma ao lado da outra.

2ª parte

Resolvam a situação utilizando o princípio multiplicativo e também a relação de arranjos simples.

3ª parte

Apresentem a situação elaborada para que outra dupla a resolva.

4ª parte

Confrontem os resultados obtidos. Caso não sejam iguais, discutam com essa dupla os procedimentos utilizados. Orientações no Manual do Professor.

6. Na aula de Educação Física, o professor resolveu verificar, entre 10 estudantes que ele selecionou, quais são os três mais rápidos numa corrida de 100 m. Entre eles, um era o Ricardo.

a) De quantas maneiras diferentes podemos ter os 3 primeiros colocados?

b) Em quantas dessas maneiras Ricardo não está entre os 3 primeiros colocados?

c) Em quantas dessas maneiras Ricardo está entre os 3 primeiros colocados?

Respostas no Manual do Professor.

7. (Enem) O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito no computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares. Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é: Alternativa **e**.

a) 24. **b)** 31. **c)** 32. **d)** 88. **e)** 89.

8. Considere que no emplacamento dos carros sejam utilizadas 4 letras (entre 26 letras disponíveis) e 3 algarismos (entre 10 algarismos disponíveis), como indicado na figura abaixo.

Cesar Diniz/Pulsar Imagens

De quantas maneiras diferentes pode-se escolher 4 letras distintas para uma placa desse tipo? $A_{26,4} = 358\,800$

Para explorar

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Manual do Professor.

Junte-se a um colega para fazer esta atividade.

1ª etapa

A primeira foto ao lado mostra um modelo de emplacamento de automóveis formado por 3 letras e 4 algarismos. Descubram quantas possíveis placas podem ser formadas nesse sistema.

Iara Venanzi/Pulsar Imagens

2ª etapa

A segunda foto mostra um modelo de placa em implantação no Brasil.

Pesquisem:

a) Quais as posições dos algarismos e das letras nesse sistema de emplacamento?

b) Qual o total de placas que podem ser produzidas nesse sistema?

Daniel Cymbalista/Pulsar Imagens

3ª etapa

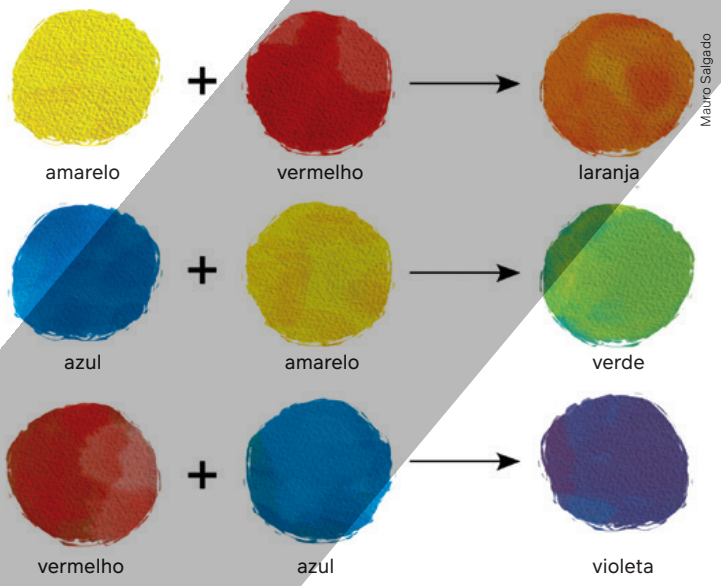
Comparem os dois sistemas, elaborem e apresentem um pequeno texto comentando as semelhanças, as diferenças e comparando as quantidades dos possíveis emplacamentos.

Combinação simples

Já formamos agrupamentos em que a ordem dos elementos era importante. Assim procedemos com as situações que foram resolvidas por meio do princípio multiplicativo, da ideia de permutação simples (quando os elementos não se repetem), da permutação com repetição (quando há elementos iguais) e com agrupamentos que denominamos de arranjos simples.

E quando precisarmos **apenas escolher** determinado número de elementos para formar um agrupamento, isto é, quando a ordem dos elementos não diferenciar um agrupamento do outro? Como proceder?

Considere, por exemplo, a questão da formação das cores. As três principais cores no círculo cromático são: amarelo, vermelho e azul. São as chamadas cores primárias. Combinando essas cores entre si, por exemplo, de duas em duas, podemos obter outras três cores secundárias: laranja, verde e violeta. Observe a ilustração a seguir.



Mauro Salgado

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1. Se você fizesse o arranjo dessas 3 cores primárias de 2 em 2, quantos resultados obteria?
2. Quantas cores secundárias resultariam?
3. Ao "misturar" as cores primárias entre si, a ordem delas altera a cor secundária resultante?

Esses agrupamentos em que a ordem dos elementos não "altera" o resultado são conhecidos como **combinações**. Aqui vamos considerar situações ideais e não entraremos no mérito, por exemplo, de situações subjetivas, como "O que é melhor: arroz em cima do feijão ou o feijão em cima do arroz?".

Prato com arroz em cima do feijão.

Prato com feijão em cima do arroz.

Fernando Favoretto/Criar Imagem

As combinações que vamos resolver e calcular estão relacionadas com a ideia de formação de conjuntos. São agrupamentos em que a ordem de seus elementos não os difere um do outro. Os seguintes conjuntos são iguais:

{2; 3; 4}, {2; 4; 3}, {3; 2; 4}, {3; 4; 2}, {4; 2; 3}, {4; 3; 2}

representações do mesmo conjunto

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Essa é uma atividade para ser feita em grupos de 3 ou 4 estudantes. Cada grupo deverá fazer o que se pede a seguir.

1. Em uma folha de papel, escreva os nomes de 10 estudantes de sua turma.
2. A partir desses 10 nomes, você fará grupos discriminando os nomes, em cada caso, de 3 grupos assim formados:
   - cada grupo deverá ter 2 nomes;
   - cada grupo deverá ter 3 nomes;
   - cada grupo deverá ter 4 nomes;
   - cada grupo deverá ter 5 nomes.
3. Determine a quantidade total de grupos que podem ser formados a partir de 10 elementos, agrupando-os:
   - de 2 em 2 (grupos com 2 elementos);
   - de 3 em 3 (grupos com 3 elementos);
   - de 4 em 4 (grupos com 4 elementos);
   - de 5 em 5 (grupos com 5 elementos).
4. Apresente os resultados à turma.

Vamos considerar também uma situação em sua turma!

Exemplo 1

Você e os colegas de grupo poderão até encenar essa situação. Considerem 10 estudantes em pé. De 2 em 2, os estudantes vão apertar as mãos, entretanto, cada um deverá apertar a mão do outro. Qual é o total de apertos de mãos registrados?

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- Podemos utilizar a ideia de arranjo para formar grupos com 2 elementos a partir de 10:

$$A_{10}^{2} = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90$$

- Se dois desses estudantes forem Maria e Antônio, nesse cálculo os apertos de mãos entre eles está sendo considerado duas vezes, pois, em arranjos, Maria e Antônio é diferente de Antônio e Maria. Dessa forma, o número total n de apertos de mãos poderia ser calculado por:

$$n = \frac{A_{10}^{2}}{2!} = \frac{90}{2} = 45$$

Na discussão a seguir, propomos que você pense numa outra forma de resolver.

Para pensar e discutir

Respostas no Manual do Professor.

1. Cada um dos 10 estudantes apertará a mão de quantos outros?
2. Multiplicando o número de estudantes (10) pelo número de apertos de mãos de cada um, qual é o resultado?
3. Esse resultado fornece o total de apertos de mãos? Justifique.

Exemplo 2

Utilizando ainda os 10 estudantes, vamos agora escolher 3 deles para formar uma comissão que representará a turma. Essa comissão não terá cargos, isto é, cada um dos três estudantes terá a mesma função. Quantas são as possíveis comissões?

- Vamos calcular o número de arranjos desses 10 estudantes tomados 3 a 3:

$$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

- Lembre-se de que, no cálculo envolvendo arranjo, a ordem dos elementos na formação do grupo era importante. Aqui não nos interessa a ordem. Assim, para exemplificar, se 3 desses estudantes são *A*, *B* e *C*, os arranjos *ABC*, *ACB*, *BAC*, *BCA*, *CBA* e *CAB* correspondem ao mesmo grupo {*A*, *B*, *C*}. Portanto, sendo *n* o número total de maneiras de formarmos comissão com 3 elementos a partir de 10, temos:

$$n = \frac{A_{10}^{3}}{3!} \Rightarrow n = \frac{720}{6} \Rightarrow n = 120$$

Agora observe como podemos reescrever esses cálculos:

$$n = \frac{\frac{10!}{(10-3)!}}{3!}$$

$$n = \frac{10!}{3!(10-3)!} = C_{10,3}$$

Interpretamos:
combinação de 10 elementos tomados de 3 em 3.
Representamos:
$C_{10,3}$ ou C_{10}^{3}

Dados *n* elementos distintos, chama-se combinação desses *n* elementos tomados *k* a *k* ($k \leqslant n$) qualquer subconjunto formado por *k* elementos distintos, escolhidos entre os *n*.

Para calcular o número total de combinações desses *n* elementos tomados *k* a *k* ($k \leqslant n$), que indicaremos por $C_{n,k}$, procedemos da maneira descrita a seguir.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- Utilizamos o princípio multiplicativo para obtermos a quantidade de agrupamentos ordenados (arranjos) formados por ***k* elementos distintos**, escolhidos entre os *n* elementos, isto é:

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots [n-(k-1)]}_{A_{n,k}}$$

- Novamente utilizamos o princípio multiplicativo para obtermos a quantidade de sequências distintas que podem ser formadas com os *k* elementos escolhidos acima:

$$\underbrace{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}_{P_k}$$

- Observando que qualquer uma das permutações desses *k* elementos dá origem a uma única combinação com *k* elementos, temos que o total de combinações dos *n* elementos tomados *k* a *k* é:

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k} \Rightarrow C_{n,k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} \Rightarrow \boldsymbol{C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$$

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. Compare os resultados de $C_{n,k}$ com $C_{n,n-k}$. Qual é a conclusão?
2. Ao calcular, por exemplo, $C_{10,3}$ estamos determinando o total de subconjuntos que podemos formar a partir de 10 elementos disponíveis. Qual é o motivo desse resultado ser igual a $C_{10,7}$? Justifique com base na formação de conjuntos.

O cálculo envolvendo combinações está relacionado com a formação de grupos em que a ordem dos elementos não altera o agrupamento. É a ideia de formar conjunto em que a ordem na qual escrevemos os elementos não interessa.

Exemplo 3

Dado o conjunto $A = \{a; b; c; d; e\}$, qual o número total de subconjuntos de A que podem ser formados?

Um subconjunto de A é um conjunto formado com elementos do conjunto A. Temos as seguintes possibilidades para a formação dos subconjuntos de A:

- Subconjunto com 0 elemento: 1 possibilidade
  $\varnothing$
- Subconjunto com 1 elemento: 5 possibilidades
  $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}$
- Subconjunto com 2 elementos: 10 possibilidades
  $\{a; b\}, \{a; c\}, \{a; d\}, \{a; e\}, \{b; c\}, \{b; d\}, \{b; e\}, \{c; d\}, \{c; e\}, \{d; e\}$
- Subconjunto com 3 elementos: 10 possibilidades
  $\{a; b; c\}, \{a; b; d\}, \{a; b; e\}, \{a; c; d\}, \{a; c; e\}, \{a; d; e\}, \{b; c; d\}, \{b; c; e\}, \{b; d; e\}, \{c; d; e\}$
- Subconjunto com 4 elementos: 5 possibilidades
  $\{a; b; c; d\}, \{a; b; c; e\}, \{a; b; d; e\}, \{a; c; d; e\}, \{b; c; d; e\}$
- Subconjunto com 5 elementos: 1 possibilidade
  $\{a; b; c; d; e\} = A$

Sendo n o total de subconjuntos que podemos formar a partir de 5 elementos, temos:

$$n = C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$$

$$n = \frac{5!}{0!(5-0)!} + \frac{5!}{1!(5-1)!} + \frac{5!}{2!(5-2)!} + \frac{5!}{3!(5-3)!} + \frac{5!}{4!(5-4)!} + \frac{5!}{5!(5-5)!}$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

$$n = \frac{5!}{1 \cdot 5!} + \frac{5 \cdot 4!}{1 \cdot 4!} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} + \frac{5 \cdot 4!}{4! \cdot 1} + \frac{5!}{5! \cdot 1}$$

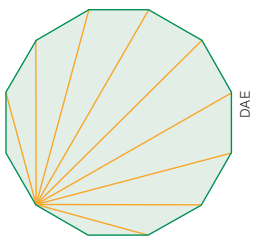
$$n = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 \Rightarrow n = 32$$

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. Utilizando como argumentos os subconjuntos formados, explique o motivo de C_5^2 ser igual a C_5^3.
2. Qual é o total de subconjuntos que podemos formar com os elementos de um conjunto que contenha 6 elementos?

Exemplo 4

Ao lado está representado um dodecágono, ou seja, um polígono formado por 12 lados (e 12 vértices). Para determinar o número de diagonais que ele admite, podemos escolher um vértice e traçar todas as diagonais com extremidade nele, como sugerido ao lado.


DAE

1ª maneira

- Como de cada vértice partem 9 diagonais e o polígono é formado por 12 vértices, o número d de diagonais é:

$$d = \frac{12 \cdot 9}{2} \Rightarrow d = 6 \cdot 9 \Rightarrow d = 54$$

São, portanto, 54 diagonais.

2ª maneira

- Outra forma de pensar é utilizar a ideia de combinação, uma vez que há 12 elementos (12 vértices) e devemos ligá-los 2 a 2, sem importar a ordem, ou seja:

$$d = C_{12}^{2} - 12 \Rightarrow d = \frac{12!}{2!(12-2)!} - 12 \Rightarrow d = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{2 \cdot 1 \cdot 10!} - 12 \Rightarrow d = 54$$

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. Na 1ª maneira, por que dividir por 2 o produto 12 · 9?
2. Na 2ª maneira, qual é o motivo de subtrair 12 de C_{12}^{2}?

Atividades

1. Considere o conjunto $A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13\}$. Você formará subconjuntos com elementos desse conjunto A.
   a) Escreva todos os subconjuntos de A com exatamente 1 elemento em cada subconjunto.
   b) Escreva todos os subconjuntos de A com exatamente 2 elementos em cada subconjunto.
   c) Calcule o número de subconjuntos de A que podem ser formados com exatamente 3 elementos.
   d) Calcule o número de subconjuntos de A que podem ser formados com exatamente 4 elementos.

Respostas no Manual do Professor.

2. Dos 12 jogadores [illegible] disponíveis para uma partida de voleibol, apenas 6 entrarão no início do jogo. Sabendo que há apenas um líbero e que o técnico vai começar a partida com ele, determine o número de maneiras de formar o time inicial considerando que os demais atuam em qualquer posição. $C_{11,5} = 462$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

3. Junte-se a um colega para fazer esta atividade.

1ª parte

Utilizando os dados de sua turma, elaborem 4 situações de escolha de estudantes em que a mudança de ordem deles não altere o agrupamento.

2ª parte

Resolvam cada uma das situações elaboradas.

3ª parte

Apresentem as situações a outra dupla para que ela as resolva.

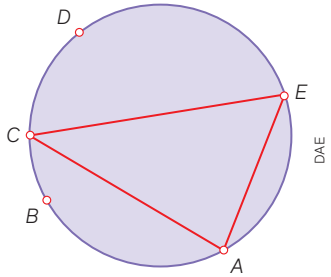
4ª parte

Confrontem as respostas. Em caso de divergências ou dificuldades, exponham as situações para que a turma discuta. Orientações no Manual do Professor.

4. Você é uma das 20 pessoas presentes em determinado encontro. Duas pessoas são sorteadas aleatoriamente. Calcule:
   a) O número de possibilidades de essas duas pessoas serem sorteadas.
   b) O número de possibilidades de essas duas pessoas serem sorteadas, sendo que você não é uma delas.
   c) O número de possibilidades de essas duas pessoas serem sorteadas, sendo que você é uma delas.

Respostas no Manual do Professor.

5. Ligando pontos de uma circunferência em certa ordem, podemos formar polígonos convexos (pesquise o significado de "convexo" antes de prosseguir). Observe, no exemplo ao lado, que 5 pontos foram marcados na circunferência. Ao ligar os pontos A, C e E, formamos um triângulo (polígono com 3 lados).



DAE

   a) Calcule o número total de triângulos que podem ser formados com vértices nos pontos indicados na figura.
   b) Calcule o número total de quadriláteros convexos que podem ser formados ligando esses pontos de 4 em 4.
   c) Determine o número de pentágonos convexos que podem ser formados ligando esses pontos de 5 em 5. Respostas no Manual do Professor.

6. Em um sorteio, 6 números são sorteados no intervalo de 1 a 60, como mostra a ilustração. Ganha o prêmio máximo quem acertar as 6 dezenas. Responda:

Mauro Salgado

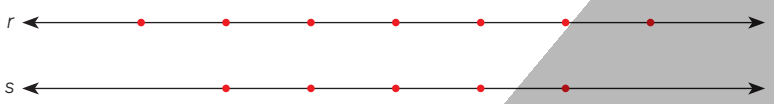
a) Qual é o número de possiblidades para um sorteio?

b) Alguém que aposta em 7 dezenas está competindo com quantas possíveis senas?

c) Alguém que aposta em 8 dezenas está competindo com quantas possíveis senas?

Respostas no Manual do Professor.

7. Na figura a seguir há duas retas paralelas *r* e *s*. Na primeira, estão indicados 7 pontos, e, na segunda, 5 pontos.



a) Explique como você pode formar triângulos com vértices somente nesses 12 pontos.

b) Quantos triângulos ao todo podem ser formados unindo-se 3 pontos quaisquer dos 12 pontos indicados? Respostas no Manual do Professor.

8. (UFPB) Um sorveteiro vende sorvetes de três bolas, de sabores escolhidos dentre os de coco, manga, graviola, cajá, acerola, maracujá e pitanga. Calcule o número de possibilidades de escolha de três sabores distintos que devem compor um sorvete, de modo que uma das bolas seja, necessariamente, de coco. 15

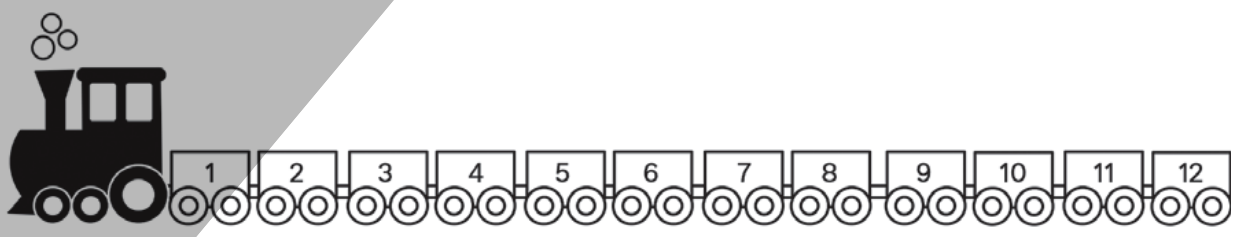
9. (Enem) A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caractere é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra *A* é representada por Alternativa **d**.

O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é

a) 12. **b)** 31. **c)** 36. **d)** 63. **e)** 720.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

10. (Enem) Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 12 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 12. Dos 12 vagões, 4 são pintados na cor vermelha, 3 na cor azul, 3 na cor verde e 2 na cor amarela. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 12 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.



Mauro Salgado

De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por: Alternativa **e**.

a) $C_{12}^4 \times C_{12}^3 \times C_{12}^3 \times C_{12}^2$

b) $C_{12}^4 + C_8^3 + C_5^3 + C_2^2$

c) $C_{12}^4 \times 2 \times C_8^3 \times C_5^2$

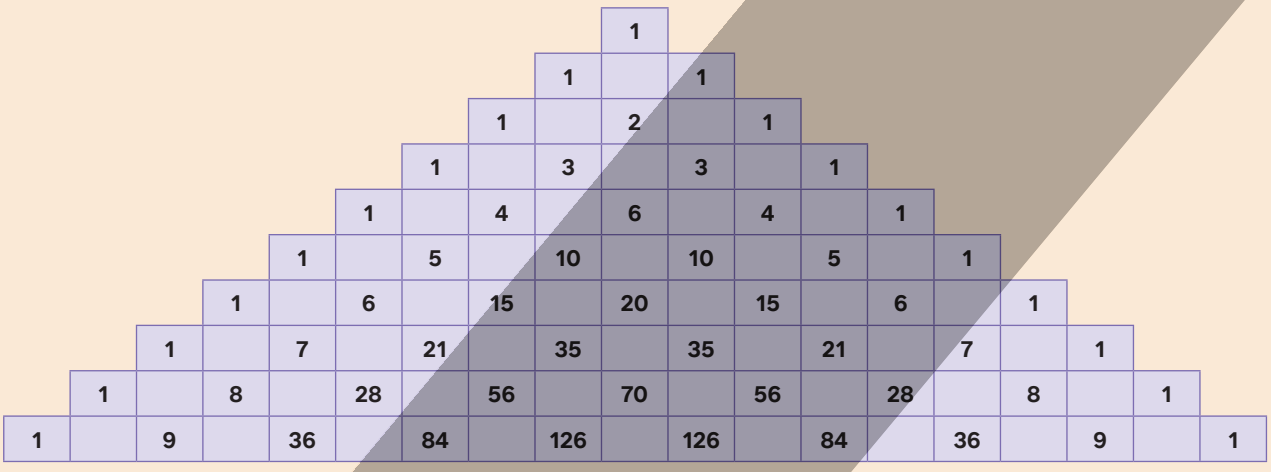
d) $C_{12}^4 + 2 \times C_{12}^3 + C_{12}^2$

e) $C_{12}^4 \times C_8^3 \times C_5^3 \times C_2^2$

O triângulo de Pascal e os números binomiais

Existem padrões numéricos interessantes que são obtidos e explicados de diversas maneiras. Podemos compor tabelas com números, também podemos dispor pontos em configurações triangulares, pentagonais etc., mas seguindo certa regra. Alguns desafios numéricos intrigantes são feitos no sentido de descobrir qual é o próximo número de uma sequência ou como determinada sequência é formada.

O que dizer, por exemplo, dos números dispostos na figura abaixo?



Sugerimos algumas investigações a seguir.

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. Como as linhas são formadas?
2. A soma dos elementos de cada linha tem alguma característica comum? Qual?
3. Em cada linha, há um padrão numérico envolvendo termos extremos ou termos equidistantes dos extremos. Você sabe qual é esse padrão?

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Uma curiosidade a respeito desses números é que eles estão relacionados com o desenvolvimento de potências naturais de binômios. Observe, nos exemplos a seguir, os coeficientes destacados do desenvolvimento de cada uma das potências:

$(x + a)^0 = 1$

$(x + a)^1 = 1x^1a^0 + 1x^0a^1$

$(x + a)^2 = 1x^2a^0 + 2x^1a^1 + 1x^0a^2$

$(x + a)^3 = 1x^3a^0 + 3x^2a^1 + 3x^1a^2 + 1x^0a^3$

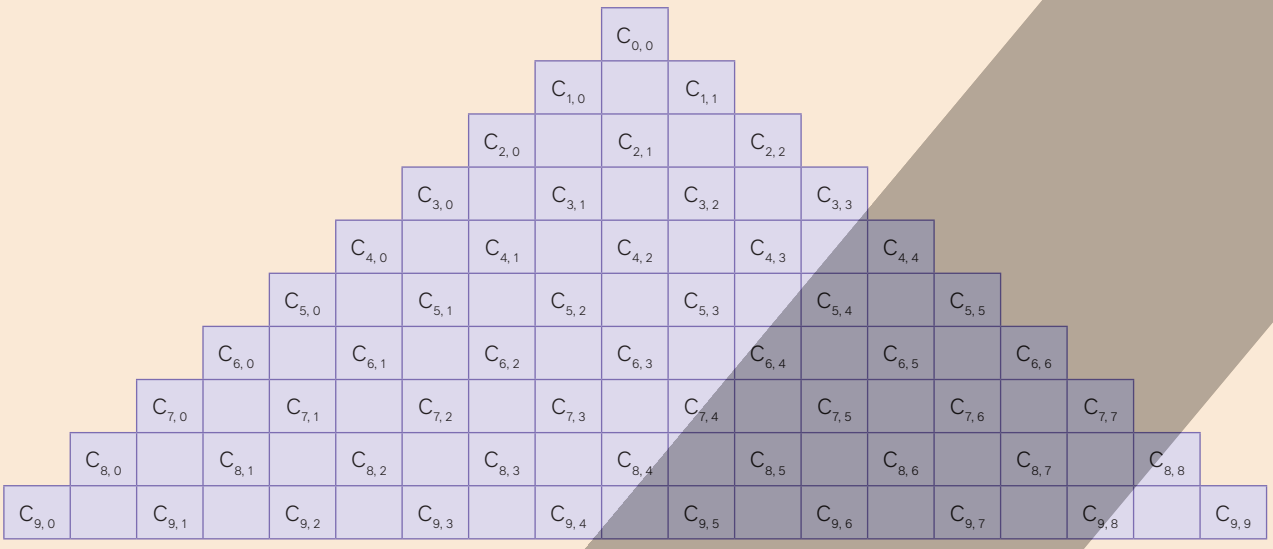
$(x + a)^4 = 1x^4a^0 + 4x^3a^1 + 6x^2a^2 + 4x^1a^3 + 1x^0a^4$

$(x + a)^5 = 1x^5a^0 + 5x^4a^1 + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5x^1a^4 + 1x^0a^5$

⋮

É claro que cada um dos desenvolvimentos dos binômios podem ser obtidos algebricamente. Entretanto, o padrão que relaciona os expoentes e os coeficientes nos permite obter esses desenvolvimentos apoiados no triângulo numérico apresentado acima.

Esse triângulo (ou seja, essa disposição em forma de triângulo) é conhecido como o triângulo de **Pascal** ou triângulo de **Tartaglia** e tem tudo a ver com as combinações que você calculou. Observe a seguir o mesmo triângulo, porém com os elementos representados por meio de combinações simples.



Essas combinações também são chamadas de **números binomiais**. Assim, por exemplo, sendo n e k números naturais tais que $n \geqslant k$, tem-se que:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_{n,k}$$

Nessa forma binomial, n é chamado de **numerador** e k é chamado de **denominador** ou **classe**. Existem algumas propriedades que você até já observou na própria construção do triângulo ou quando fez o cálculo envolvendo combinações:

$$C_{n,k} = C_{n,n-k}$$

- **Propriedade 1**

  Dois binomiais complementares são iguais: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ou $C_{n,k} = C_{n,n-k}$

- **Propriedade 2**

  Relação de Stifel: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ ou $C_{n,k} + C_{n,k+1} = C_{n+1,k+1}$

- **Propriedade 3**

  A soma dos elementos de uma mesma linha é uma potência de base 2, cujo expoente é o numerador dos números binomiais:

  $$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n \text{ ou } C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \ldots + C_{n,n} = 2^n$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Você pode verificar essas propriedades atribuindo valores a n e a k ou mesmo observando exemplos no triângulo de Pascal.

Atividades

1. No triângulo de Pascal ilustrado no início desta seção, mostramos os valores correspondentes até a linha que contém $C_{9,0}$, $C_{9,1}$, $C_{9,2}$, ..., $C_{9,9}$. A partir desses valores, informe:

a) os valores correspondentes a $C_{10,0}$, $C_{10,1}$, $C_{10,2}$, ..., $C_{10,10}$;

b) o valor da soma $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \ldots + \binom{10}{10}$. Respostas no Manual do Professor.

2. Considerando o desenvolvimento do binômio $(x + a)^5$, temos: Orientações no Manual do Professor.

$$(x + a)^5 = 1x^5a^0 + 5x^4a^1 + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5x^1a^4 + 1x^0a^5$$

Utilizando o triângulo de Pascal, indique qual o desenvolvimento do binômio $(x + a)^6$.

Atividades finais

1. Sobre os assuntos abordados nesta unidade, responda:

a) Quantos minutos e quantos segundos há em um dia completo? 1140 minutos e 86 400 segundos

b) Existem 2 empresas aéreas e 3 linhas de ônibus que fazem o percurso de Curitiba a São Paulo. De quantas maneiras diferentes posso ir de Curitiba a São Paulo e de São Paulo a Curitiba utilizando empresa aérea ou linha de ônibus? 10 maneiras

c) Lança-se uma mesma moeda 10 vezes consecutivamente e observa-se a sequência de resultados. Qual é o total de sequências possíveis? 1024

d) Qual é o valor da soma $0! + 1! + 2!$? 4

e) Qual é o significado de **permutar**? Permutar é trocar.

f) Quantos são os números de três algarismos distintos que podem ser formados utilizando-se apenas os algarismos do conjunto {2; 3; 4; 5; 6}? 60

g) Quantos são os conjuntos de três elementos distintos que podem ser formados utilizando-se apenas os elementos do conjunto {2; 3; 4; 5; 6}? 20

h) O que diferencia um arranjo de uma combinação? Resposta no Manual do Professor.

2. (Enem) Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que L e D representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções. A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes. A opção que mais se adéqua às condições da empresa é Alternativa **e**.

a) I. **b)** II. **c)** III. **d)** IV. **e)** V.

3. (Uece) Quantos são os números inteiros positivos com três dígitos distintos nos quais o algarismo 5 aparece? Alternativa **b**.

a) 136 **b)** 200 **c)** 176 **d)** 194

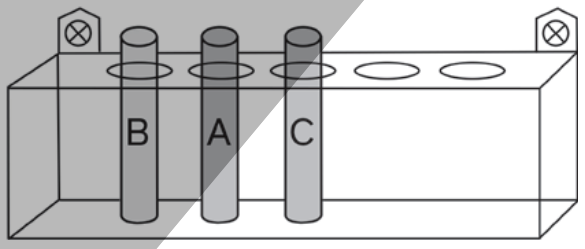
4. (UFRGS) Uma caixa contém 32 esferas numeradas de 1 a 32. O número de maneiras distintas de retirar 3 esferas da caixa, ordenadas como primeira, segunda e terceira, em que a esfera com o número 8 seja pelo menos a terceira a ser retirada é: Alternativa **e**.

a) 27 **d)** 2018

b) 96 **e)** 2790

c) 2000

5. (Famema) Três tubos de ensaio, com rótulos *A*, *B* e *C*, serão colocados em um suporte que possui cinco lugares alinhados e encontra-se fixado em uma parede. A figura a seguir mostra uma das possíveis disposições dos tubos.



Mauro Salgado

Sabendo que o tubo com o rótulo *A* não pode ocupar as extremidades do suporte, o número de maneiras distintas de esses tubos serem colocados nesse suporte é: Alternativa **c**.

a) 12. **c)** 36. **e)** 30.

b) 24. **d)** 18.

6. (PUC-SP) A secretária de um médico precisa agendar quatro pacientes, *A*, *B*, *C* e *D*, para um mesmo dia. Os pacientes *A* e *B* não podem ser agendados no período da manhã e o paciente *C* não pode ser agendado no período da tarde. Sabendo que para esse dia estão disponíveis 3 horários no período da manhã e 4 no período da tarde, o número de maneiras distintas de a secretária agendar esses pacientes é: Alternativa **d**.

a) 72. **c)** 138.

b) 126. **d)** 144.

7. (Uego) Uma comissão será composta pelo presidente, tesoureiro e secretário. Cinco candidatos se inscrevem para essa comissão, na qual o mais votado será o presidente, o segundo mais votado o tesoureiro e o menos votado o secretário. Dessa forma, de quantas maneiras possíveis essa comissão poderá ser formada? Alternativa **b**.

a) 120 **c)** 40 **e)** 10

b) 60 **d)** 20

8. (Fuvest-SP) Vinte times de futebol disputam a Série A do Campeonato Brasileiro, sendo seis deles paulistas. Cada time joga duas vezes contra cada um dos seus adversários. A porcentagem de jogos nos quais os dois oponentes são paulistas é: Alternativa **b**.

a) menor que 7%.

b) maior que 7%, mas menor que 10%.

c) maior que 13%, mas menor que 16%.

d) maior que 16%.

9. (Puccamp-SP) Admita que certa cidade brasileira tenha 8 canais de TV aberta, todos com transmissões diárias. Se uma pessoa pretende assistir a três dos oito canais em um mesmo dia, ela pode fazer isso de x maneiras diferentes sem levar em consideração a ordem em que assiste aos canais, e pode fazer de y maneiras diferentes levando em consideração a ordem em que assiste aos canais. Sendo assim, $y - x$ é igual a: Alternativa **b**.

a) 112. **c)** 224. **e)** 140.

b) 280. **d)** 56.

10. (Uerj) Seis times de futebol disputaram um torneio no qual cada time jogou apenas uma vez contra cada adversário. A regra de pontuação consistia em marcar 0 ponto para o time perdedor, 3 pontos para o vencedor e, no caso de empate, 1 ponto para cada time. A tabela mostra a pontuação final do torneio.

Times	A	B	C	D	E	F
Pontos	9	6	4	2	6	13

O número de empates nesse torneio foi igual a: Alternativa **b**.

a) 4. **c)** 6

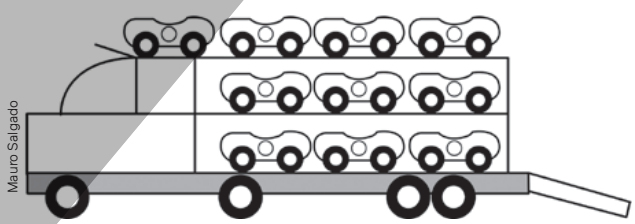
b) 5. **d)** 7

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

11. (Ifal) Certa lanchonete possui 5 funcionários para atender os clientes durante os dias de semana. Em cada dia, pode trabalhar, no mínimo, 1 funcionário até todos os funcionários. Dentro desse princípio, quantos grupos de trabalho diário podem ser formados? Alternativa **d**.

a) 5 **b)** 15 **c)** 16 **d)** 31 **e)** 32

12. (Enem) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



Mauro Salgado

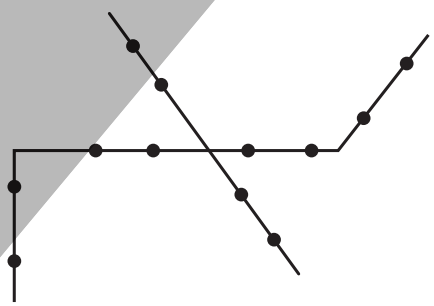
No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir? Alternativa **b**.

a) $C_{6,4}$ **c)** $C_{10,4}$ **e)** 4^6

b) $C_{9,3}$ **d)** 6^4

13. (Fuvest-SP) Doze pontos são assinalados sobre quatro segmentos de reta de forma que três pontos sobre três segmentos distintos nunca são colineares, como na figura.



DAE

O número de triângulos distintos que podem ser desenhados com os vértices nos pontos assinalados é: Alternativa **d**.

a) 200. **c)** 208. **e)** 220.

b) 204. **d)** 212.

14. (Enem) Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando *videogame*. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas? Alternativa **e**.

a) 64 **c)** 49 **e)** 28

b) 56 **d)** 36

UNIDADE 3

Jose Gil/Shutterstock.com

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Avião em manobra de pouso.

Milos Muller/Shutterstock.com

PROBABILIDADES

Ônibus de viagem em uma rodovia.

Nesta unidade, você vai:

- identificar no cotidiano situações de uso de probabilidades;
- reconhecer diferentes tipos de espaços amostrais (discretos ou não);
- calcular a probabilidade condicional de dois eventos simultâneos;
- identificar e descrever o espaço amostral em diferentes experimentos aleatórios;
- elaborar e resolver situações relacionadas com o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios;
- reconhecer eventos independentes em situações relacionadas a eventos equiprováveis consecutivos;
- diferenciar eventos dependentes de eventos independentes em experimentos aleatórios;
- calcular quantidade de elementos do evento e do espaço amostral utilizando contagem das possibilidades relacionadas à análise combinatória.

Acidentes e probabilidades

Você sabe como é calculado o seguro-viagem? As seguradoras analisam o perfil do cliente, o destino da viagem, a quantidade de dias que o cliente vai ficar hospedado e o risco de ocorrência de acidentes. Esse risco é baseado em dados estatísticos, ou seja, no número de acidentes que já ocorreram naquele destino e na probabilidade de acontecerem.

1. Em sua opinião, o que é mais provável: um acidente de ônibus ou um acidente de avião? Resposta pessoal.

2. Se você tem olhos castanhos, qual é a probabilidade de ter um filho também com olhos castanhos? Orientações no Manual do Professor.

1 Probabilidade

Na BNCC

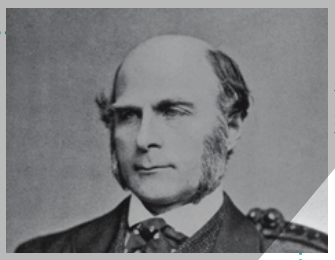
Neste tópico você vai trabalhar as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias 1, 3 e 5 e as habilidades EM13MAT106, EM13MAT311, EM13MAT312, EM13MAT511.

Vozes

Você já ouviu falar em tabuleiro de Galton?

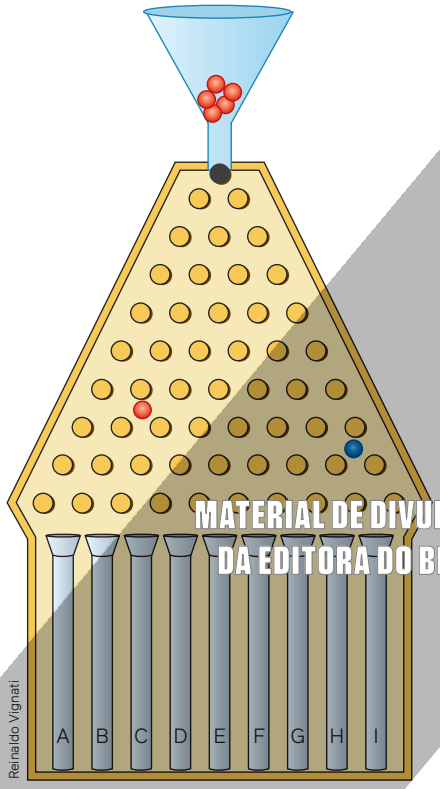
É um dispositivo criado por Francis Galton, cuja estrutura consiste em um tabuleiro, com várias linhas separadas uniformemente. Em cada linha há pinos também separados de maneira uniforme. Do topo são abandonadas diversas bolinhas de mesmo tamanho que, ao colidirem com o primeiro pino, se distribuem. Na parte inferior do tabuleiro são colocados tubos.

A ilustração a seguir não é o tabuleiro original de Galton, mas nos dá uma boa ideia dele. Observe que o tabuleiro deve ser posicionado na vertical e, quando uma bolinha é solta, ela não cai pelas laterais de madeira, pois não há espaço suficiente para isso.



Karl Pearson/ SSPL/Getty Images

Francis Galton (1822-1911) nasceu em Birminghan, no Reino Unido, estudou Antropologia, Matemática, Estatística e atuou como meteorologista.



Reinaldo Vignati

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Três bolinhas foram soltas: uma azul, uma vermelha e a outra preta, nessa ordem.

Para pensar e discutir

1. É muito provável que a bolinha azul caia em qual tubo?
2. Em qual tubo cairá a bolinha vermelha?
3. É possível ter certeza de que há algum tubo em que a bolinha preta não cairá? Em qual deles é mais provável que caia?

Voltaremos a essa experiência idealizada por Galton mais adiante porque está intimamente relacionada não apenas ao estudo de probabilidades mas à distribuição estatística.

mexrix/Shutterstock.com

Dado e pinos de jogos de tabuleiro.

O assunto **probabilidade** não é totalmente novidade, você já teve contato com ele no Ensino Fundamental e em momentos diferentes do cotidiano, mesmo sem saber.

Quem nunca brincou de par ou ímpar? Em uma partida de futebol, para escolher quem começa ou quem escolhe o lado do campo, qual é o procedimento? Quantas pessoas jogam, semanalmente, nas loterias federais? E as brincadeiras com o famoso dado? O que é mais provável: sair a face com 6 pontinhos ou a face com 2 pontinhos?

Foi no contexto de disputas de jogos e apostas que o assunto probabilidade ganhou corpo. Sua história, porém, iniciou muito antes...

1. É provável que a bolinha azul caia no tubo H ou no tubo I.

2. Orientações no Manual do Professor.

3. A bolinha preta poderá cair em qualquer um dos tubos. Porém, devido às posições que eles ocupam na distribuição no tabuleiro, é mais provável que caia nos tubos centrais do que nos tubos laterais.

Leia o texto a seguir para conhecer um pouco mais a fascinante história de um conhecimento amplamente utilizado atualmente em Biologia, Química, por seguradoras, investidores econômicos e tantas outras áreas onde decisões são tomadas com base no "mais provável".

Não é de hoje que o acaso é objeto de fascínio. Desde a Pré-História os seres humanos observaram a infinidade de fenômenos sem explicação, irregulares, sem causas aparentes, que lhe eram oferecidos pela natureza. Numa primeira etapa, a culpa era atribuída aos deuses. Eclipses, arco-íris, terremotos, epidemias, cometas ou enchentes excepcionais dos rios eram manifestações interpretadas como mensagens divinas endereçadas a quem fosse capaz de decifrá-las. Da missão foram incumbidos feiticeiros, oráculos, sacerdotes e xamãs que, diante da necessidade de ganhar a vida, aproveitaram para desenvolver todo um repertório de rituais destinados a interrogar os deuses, para não precisar esperar que eles se prestassem a se manifestar por livre e espontânea vontade. Em outras palavras, os homens começaram a imaginar meios de criar o aleatório de acordo com a demanda.

A belomancia, arte da adivinhação pelas flechas, é um dos exemplos mais antigos. Inscreva em flechas as diferentes alternativas do questionário endereçado ao seu deus, junte-as na aljava, sacuda e tire uma ao acaso: aí está a resposta. Era assim, por exemplo, que Nabucodonosor II, rei da Babilônia, escolhia os inimigos aos quais declarava guerra, no século VI antes da nossa era. Além das flechas, os objetos tirados podiam assumir diferentes formas: seixos, tabuletas, bastões ou bolas coloridas. Os romanos deram a esses objetos o nome de *sors*. Dessa palavra vem a nossa expressão "sortear", assim como o termo "sortilégio", que designa originalmente o adivinho que interroga os deuses ou o veredito do próprio deus.

Aos poucos, os mecanismos de extração aleatória se multiplicam, encontrando numerosas aplicações. Eles seriam utilizados por vários sistemas políticos, como, por exemplo, em Atenas, para designar os quinhentos cidadãos que tinham assento na Bulé, ou, alguns séculos depois, em Veneza, nos processos de escolha do doge. O acaso também se revelaria importante fonte de inspiração para os criadores de jogos. É a invenção do cara ou coroa, dos dados numerados, que viriam a assumir as formas dos sólidos de Platão, ou ainda dos jogos de cartas.

Justamente por meio dos jogos de azar é que as decisões dos deuses acabariam atraindo a atenção de alguns matemáticos. Eles teriam a estranha ideia de bancar medidores do destino, estudando por meio da lógica e do cálculo as propriedades do futuro, antes da sua chegada.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Tudo tem início em meados do século XVII, durante uma reunião da Academia Parisiense, ancestral da Academia de Ciências, fundada em 1635 pelo matemático e filósofo Marin Mersenne. Durante um debate entre cientistas de diversos horizontes, o escritor Antoine Gombaud, amante da matemática nas horas vagas, apresenta à assembleia um problema que havia encontrado. Suponham, diz ele, que dois jogadores tenham apostado uma soma em dinheiro num jogo de azar a ser dado por encerrado quando um dos jogadores vencer três vezes, mas que a partida seja interrompida quando o primeiro jogador estiver vencendo por duas rodadas a uma. Como os dois jogadores terão de dividir a aposta?

Entre os cientistas presentes nesse dia, o problema atrai particularmente a atenção de dois franceses: Pierre de Fermat e Blaise Pascal. Depois de algumas trocas epistolares, os dois acabam concluindo que três quartos da aposta devem ser atribuídos ao primeiro jogador, e o quarto restante, ao segundo.

LAUNAY, Mikaël. *A fascinante história da Matemática*. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2019. p. 203-204.

Para pensar e discutir

1. Você concorda com a solução citada no texto para o problema proposto? Justifique. Resposta pessoal.
2. Como Fermat e Pascal podem ter chegado à solução apresentada? Simule a situação para verificar. Resposta pessoal.

Voltaremos ao assunto para detalhar como Fermat e Blaise Pascal chegaram à resposta do modo que os jogadores deveriam proceder para dividir a quantia apostada. As ideias precisam ser muito bem compreendidas inicialmente, para então se avaliar o cálculo envolvendo probabilidades.

Um exemplo é a ideia de **experimento aleatório**. Talvez o caso mais simples que você conheça de experimento aleatório seja o lançamento de uma moeda ou de um dado.

Moedas de 1 real.

Banco Central do Brasil

Saran_Poroong /Shutterstock.com

Dados de 6 faces.

Mesmo que você lance a moeda inúmeras vezes para cima, em condições idênticas, não é possível saber qual resultado entre os possíveis (cara ou coroa) irá ocorrer. Isso também acontece com um dado não viciado, isto é, um dado no qual todas as faces tenham iguais condições de ficarem voltadas para cima. Não podemos saber qual será o resultado (1, 2, 3, 4, 5 ou 6).

Esses dois exemplos referem-se a **experimentos aleatórios** que, embora possam ser repetidos muitas vezes e sob condições idênticas, não apresentam os mesmos índices de ocorrência entre os resultados possíveis.

Steven Coling /Shutterstock.com

Vasilha de vidro com água fervendo.

Entretanto, há os **experimentos determinísticos**, que, quando realizados nas mesmas condições, se repetem. O experimento de ferver a água, por exemplo, representado na figura ao lado é determinístico. É claro que você pode dizer que a água não ferve sempre à mesma temperatura, por isso é importante entender o que significa "nas mesmas condições".

A água ferve a 100 °C apenas quando é pura e está à pressão atmosférica de 1 atm (que é a pressão atmosférica ao nível da água do mar).

Esse tipo de experimento não será objeto de estudo aqui.

Para explorar

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Vamos organizar um sorteio na turma.

1ª etapa – Preparação e sorteio

- Você e os colegas devem escrever o próprio nome em um pedaço de papel. Todos os pedaços de papel devem ser do mesmo tamanho.
- Dobrem os pedaços de papel com o nome de todos da turma, e coloquem-nos dentro de um recipiente (pode ser uma sacola).
- Três desses pedaços serão escolhidos aleatoriamente e consecutivamente (o nome sorteado não volta para o recipiente): tira-se um papel e anuncia-se o nome; tira-se um segundo papel e anuncia-se o nome; tira-se um terceiro papel e anuncia-se o nome.
- A turma pode combinar que haverá três prêmios (que tal três maçãs para os vencedores?).

2ª etapa – Conclusões

A turma deve elaborar coletivamente respostas para as questões a seguir e justificá-las.

1. O experimento é aleatório? Sim.
2. Todos os estudantes têm, antes de iniciar o sorteio, iguais condições de serem sorteados? Sim.
3. Um estudante qualquer da turma tem mais chance de ser sorteado no primeiro ou no segundo sorteio?
   No segundo, pois diminui-se o número de possíveis resultados após o 1º sorteio.
4. Quantos são os possíveis resultados para o primeiro sorteio? E para o segundo sorteio? E para o terceiro sorteio?
   Se o número de estudantes da turma é n, temos: n possibilidades para o 1º sorteio, $n - 1$ possibilidades para o 2º sorteio e $n - 2$ possibilidades para o 3º sorteio.

Alguns dos jogos de loterias podem ser interpretados como experimentos aleatórios. Veja ao lado a representação de um jogo de loteria, que chamaremos de Hiper Milhão. Como existem vários jogos de loteria, os cartões podem ter formatos diferentes, e a frequência dos sorteios também pode mudar.

Mauro Salgado

Vamos considerar para o Hiper Milhão as mesmas condições de um dos jogos mais populares de loteria, que traz cartões com 60 números e tem sorteios duas vezes por semana, nos quais 6 dezenas são aleatoriamente sorteadas. Quando uma pessoa escolhe 6 números entre os 60 disponíveis, não sabe antecipadamente se os números irão ou não ser sorteados. Ela sabe, entretanto, que tem chance de que seus 6 números sejam sorteados, assim como outros 6 números quaisquer.

Surge, então, o interesse de avaliar qual é a probabilidade de que seus 6 números sejam sorteados.

A teoria das probabilidades é um ramo da Matemática.

Espaço amostral e evento

Algumas iniciativas promovem sorteios para arrecadar fundos para instituições necessitadas, estimulando assim que os participantes façam contribuições. Entre esses sorteios há o jogo "bingo".

Mauro Salgado

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Mike Flippo/Shutterstock.com

Urna esférica com bolinhas numeradas, muito comum em "bingos".

Na ilustração acima há duas cartelas e uma urna esférica contendo bolinhas numeradas de 1 a 75. A pessoa responsável pelo sorteio da bola faz a urna girar frequentemente para que as bolinhas sejam sorteadas consecutivamente. Vamos considerar que será ganhador quem tiver todos os números da cartela sorteados.

Para pensar e discutir

1. Você sabe com certeza que bolinha será sorteada inicialmente? Justifique.
2. Quantas são as possibilidades no sorteio da primeira bolinha?
3. As cartelas A e B têm iguais condições de ganharem o prêmio? Justifique.

1. Não é possível saber qual será a bola retirada. A justificativa é que estamos diante de um experimento aleatório.

2. São 75 resultados possíveis no sorteio da 1ª bolinha.

3. Sim. As duas cartelas têm a mesma quantidade de números.

Nesse exemplo você determinou a quantidade de possíveis resultados de ocorrência para a 1ª bolinha. Ao fazer isso, obteve o número de elementos do espaço amostral, isto é, a quantidade de elementos de um conjunto formado por todos os resultados possíveis do experimento aleatório.

Em um experimento aleatório, o conjunto formado por todos os resultados possíveis é chamado de **espaço amostral** e representado por Ω (lê-se "ômega").

Representamos por $n(\Omega)$ o número de elementos do conjunto Ω.

Para representar o espaço amostral do exemplo do "bingo", fazemos:

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; ...; 75\}$$

Já para representar a quantidade de elementos de Ω, isto é, o número de possíveis resultados do experimento aleatório, escrevemos: $n(\Omega) = 75$.

Observe a seguir alguns exemplos de espaço amostral.

Exemplo 1

Espaço amostral formado pelo experimento: lançamento de um dado e registro do resultado.

Saran_Poroong /Shutterstock.com

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$n(\Omega) = 6$$

Exemplo 2

Espaço amostral formado pelo experimento: número sorteado ao se girar a roleta representada ao lado.

Mauro Salgado

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; ...; 20\}$$

$$n(\Omega) = 20$$

Exemplo 3

Espaço amostral formado pelo experimento: lançamento de 2 moedas perfeitamente distinguíveis [illegible] obtida.

Banco Central do Brasil

[illegible] indicar o resultado cara e K para o resultado coroa, temos:

$$\Omega = \{(C; C); (C; K); (K; K); (K; C)\}$$

$$n(\Omega) = 4$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Ao verificar os elementos que farão parte do conjunto correspondente ao espaço amostral, é necessário refletir sobre o que o experimento pretende determinar. Pense no experimento do Hiper Milhão.

Mauro Salgado

Para pensar e discutir

1. Seis números serão sorteados nesse experimento. Como é formado o espaço amostral? Resposta pessoal.
2. Indique dois elementos desse espaço amostral. Resposta pessoal.
3. Qual é o número total de elementos do espaço amostral? Orientações no Manual do Professor.

Valendo um suco de laranja!

Vamos considerar que no experimento aleatório "lançamento de um dado e registro do resultado" você apostou um suco de laranja com um colega. Se cair um número par, você ganha; caso seja um número ímpar, perde (e o colega ganha o suco). Além disso, vamos supor que o dado é "honesto", isto é, tem a mesma chance de cair com qualquer uma de suas faces para cima.

- Resultados que interessam a você: {2; 4; 6}.
- Resultados que interessam ao colega: {1; 3; 5}.

Tanto você quanto o colega têm a mesma quantidade de resultados favoráveis, pois os dois conjuntos têm o mesmo número de elementos. Podemos dizer que os dois têm iguais chances de sair com um suco de laranja no final, pois cada face tem a mesma chance de cair virada para cima. Você concorda?

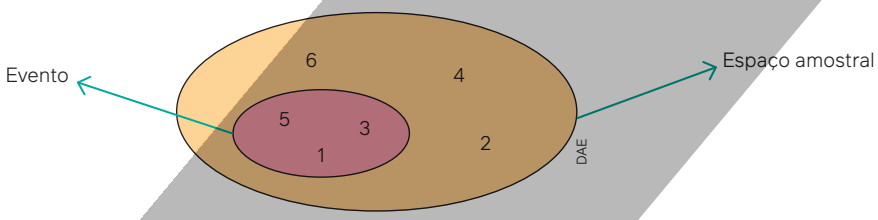
Nesse exemplo, dois **eventos** são indicados: o conjunto formado pelos números pares e o conjunto formado pelos números ímpares.

Africa Studio/Shutterstock.com

Copo com suco de laranja.

Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de **evento**.

O subconjunto de um espaço amostral é "um conjunto dentro de um conjunto". Veja na imagem a seguir a representação de conjunto conhecida como diagrama de Venn. Este diagrama representa o espaço amostral (lançamento de um dado e registro do resultado) e o evento "sair um número ímpar".



Esse tipo de representação facilita a observação de que todo elemento do conjunto Evento é também elemento do conjunto Espaço amostral. Por isso o evento será um subconjunto do espaço amostral.

Exemplo 4

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

No lançamento simultâneo de dois dados (um vermelho e outro azul), e pela observação das faces voltadas para cima, vamos descrever o espaço amostral e o evento no qual os resultados obtidos sejam iguais.

O quadro ao lado mostra os resultados possíveis; em cada par ordenado o primeiro valor é do dado vermelho e o segundo, do dado azul. Os pares ordenados coloridos representam os elementos do evento "resultados obtidos iguais".

banu sevim/Shutterstock.com

(1;1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)
(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)
(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)
(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)
(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)
(6; 1)	(6; 2)	(6; 3)	(6; 4)	(6; 5)	(6; 6)

Para pensar e discutir

1. Qual é o número total de elementos do espaço amostral? O espaço amostral é formado por 36 elementos.
2. Quantos são os elementos do evento? O evento é formado por 6 elementos.
3. Observando ainda esse quadro, responda: Considerando a soma dos resultados, qual é a soma mais provável? E qual é a soma menos provável? A soma mais provável é 7 e a soma menos provável é 2 ou 12.

Em experimentos aleatórios podemos pensar em eventos que jamais vão acontecer (eventos impossíveis), mas podemos também elaborar eventos que sempre irão acontecer (eventos certos). Se pensarmos um pouco mais, podemos encontrar eventos que, quando considerados juntos, formam o próprio espaço amostral. Veja este exemplo.

Exemplo 5 – Brincando com o espaço amostral!

Pedro, André, Rose e Cláudia confeccionaram 20 fichas de mesmo tamanho em cartolina, utilizando duas cores. Numeraram as fichas de 1 a 18, como ilustrado a seguir.

DAE

Depois colocaram as 18 fichas em uma caixa e fecharam-na, de modo que ninguém pudesse ver o número nem a cor. O espaço amostral estava pronto para a brincadeira. Cada um deles elaborou um evento para a retirada de uma das 18 fichas.

- Pedro – Evento *A*: a ficha retirada deve ser da cor preta.
- André – Evento *B*: a ficha retirada deve ser da cor laranja.
- Rose – Evento *C*: a ficha retirada deve ser um número maior que 19.
- Cláudia – Evento *D*: a ficha retirada deve ser um número menor que 19.

1. O evento *C* é impossível, pois ao se retirar uma ficha o número resultante não poderá ser maior ou igual a 19, já que todas as fichas têm números menores que 19.

2. O evento *D* é certo, pois ao se retirar uma ficha o número resultante será menor que 19.

3. Os eventos possíveis *A* e *B* formam o espaço amostral.

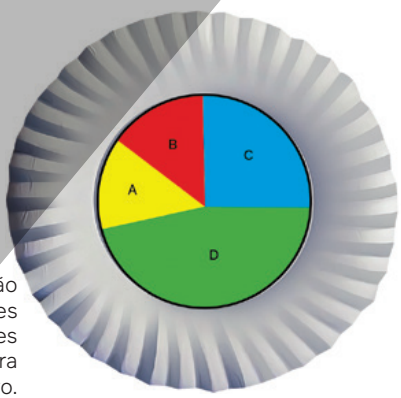
Para pensar e discutir

1. Um desses quatro eventos é impossível, isto é, nunca irá acontecer. Qual deles? Justifique.
2. Um desses quatro eventos é certo, isto é, irá acontecer com certeza. Qual deles? Justifique.
3. Juntando dois eventos possíveis entre esses quatro, obtemos o próprio espaço amostral. Quais são esses eventos?

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Existem eventos em espaço amostral que são certos, mas existem eventos em um espaço amostral que são impossíveis.

> Quando um evento coincide com o próprio espaço amostral, é chamado de **evento certo**.
> Quando um evento é vazio, é chamado de **evento impossível**.



Mauro Salgado

Prato de papelão com setores circulares utilizado para jogo de alvo.

Vamos considerar uma situação em que o espaço amostral não é discreto, ou seja, o espaço amostral é contínuo.

Exemplo 6 – Acertando o alvo!

Esta brincadeira foi inventada por uma turma do Ensino Médio. A região circular interna de um prato de papelão foi dividida em 4 partes. Cada estudante, na sua vez, lança um grão de milho dentro do prato, que cairá em uma das quatro regiões (setores circulares). Caso o grão não caia no prato ou fique metade num setor e metade em outro setor, o estudante lança o milho novamente até que ele ocupe claramente um dos setores ou a maior parte dele fique em um dos setores.

Para pensar e discutir

1. Em qual setor é mais provável que o grão de milho caia? Justifique!
2. É menos provável que o grão de milho caia no setor A do que no setor C. Isso é correto? Justifique.
3. O que representa o espaço amostral desse experimento?
4. Como você pode determinar o espaço amostral e também os eventos: *A* (cair no setor A), *B* (cair no setor B), *C* (cair no setor C) e *D* (cair no setor D)?

1. É mais provável que caia no setor D, porque ele ocupa a área maior na região colorida (o círculo com os quatro setores).
2. Correto, pois o setor A ocupa área menor do que o setor C.
3. A união dos quatro setores (o círculo).
4. Resposta pessoal.

Atividades

1. Um estudante será escolhido aleatoriamente em sua turma para hastear a bandeira do Brasil na semana que vem, quando todos estiverem cantando o Hino Nacional. Responda:

a) Nesse espaço amostral, qual é a quantidade de elementos? Respostas pessoais.

b) Considere que o evento seja "escolher um estudante que tenha o nome começado por vogal". Qual é o número de elementos desse evento?

c) Considere que o evento seja "escolher um estudante que tenha o primeiro nome começado por consoante". Qual é o número de elementos desse evento?

d) Qual dos dois eventos é mais provável de ocorrer?

Cameramannz/Shutterstock.com

Dado comum com 6 faces.

2. Sobre o experimento "lançamento de um dado perfeito", faça o que se pede.

a) Escreva todos os elementos do espaço amostral Ω. {1; 2; 3; 4; 5; 6}

b) Escreva todos os elementos do evento *A*: "sair número maior que 3". $A = \{4; 5; 6\}$

c) Escreva todos os elementos do evento *B*: "sair número primo". $B = \{2; 3; 5\}$

d) Escreva todos os elementos do evento *C*: "sair número quadrado perfeito". $C = \{1; 4\}$

e) Escreva todos os elementos do evento *D*: "sair número maior que 6". $D = \{\ \}$

f) Escreva todos os elementos do evento *E*: "sair número menor que 7". $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

lifentsova Olga/Shutterstock.com

Dado com 12 faces (dodecaedro).

3. Em relação ao experimento da atividade anterior e aos eventos *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, responda:

a) Quais são igualmente prováveis de acontecer? Os eventos *A* e *B*.

b) Qual é o evento impossível? O evento *D*.

c) Qual é o evento certo? O evento *E*.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

lifentsova Olga/Shutterstock.com

Dado com 20 faces (icosaedro).

4. Além do tradicional dado em forma de cubo, existem outros tipos. Na figura ao lado, estão representados um dado com 12 faces (dodecaedro) e outro com 20 faces (icosaedro).

a) Elabore um experimento e um evento usando o dodecaedro. Depois descreva os elementos desse espaço amostral e também os elementos do experimento.
A resposta depende do experimento e do evento elaborados.

b) Elabore um experimento e um evento usando o icosaedro. Depois descreva os elementos desse espaço amostral e também os elementos do experimento.
A resposta depende do experimento e do evento elaborados.

5. Observe a ilustração de uma roleta com os números de 0 a 36, que é um exemplo de experimento aleatório. O ponteiro é girado até que pare em uma das casas indicadas.

Mauro Salgado

a) Determine o número de elementos do espaço amostral.
São 37 elementos.

b) Considere o evento *A*: sair um número múltiplo de 3. Qual o número de elementos desse evento? n(*A*) = 13 (Lembre-se de que zero é múltiplo de 3.)

c) Considere o evento *B*: sair um número múltiplo de 5. Qual é o número de elementos desse evento? n(*B*) = 8 (Lembre-se de que zero é múltiplo de 5.)

d) Considere o evento *C*: sair um número que seja múltiplo de 3 e de 5. Qual é o número de elementos desse evento?
n(C) = 3 (Lembre-se de que zero é múltiplo de 15.)

Mauro Salgado

Cartas de baralho.

6. Considere no experimento "retirar uma carta, ao acaso, de um baralho de 52 cartas" os eventos a seguir.

- Evento *A*: ocorrência de uma carta com o naipe espadas.
  Será formado por 13 cartas com o naipe espadas.
- Evento *B*: ocorrência de uma carta com o número 3.
  Será formado por 4 cartas com o número 3, uma de cada naipe.
- Evento *C*: ocorrência de uma carta com o rei de ouros.
  Será formado por 1 carta com o rei de ouros.
- Evento *D*: ocorrência de uma carta com o ás.
  Será formado por 4 cartas com o ás, uma de cada naipe.

Descreva cada um desses eventos e informe qual é o mais provável de acontecer e qual é o menos provável de acontecer no experimento. O evento *A* é o mais provável, pois são 13 resultados entre 52 possíveis de ocorrer. O evento *C* é o menos provável, pois há 1 resultado entre 52 possíveis de ocorrer.

7. Rubens escreveu as letras de seu nome em 6 cartões de mesmo tamanho, como a seguir.

DAE

Depois ele embaralhou os cartões e colocou-os, um do lado do outro, com a face virada para baixo. Logo em seguida desvirou as cartas. Nesse experimento, faça o que se pede.

a) Determine o número de elementos do espaço amostral, isto é, a quantidade de possíveis maneiras de formar sequências com essas seis letras. O espaço amostral é formado por todas as sequências possíveis de 6 letras, isto é, permutação de 6 elementos: $6! = 720$.

b) Considere o evento "resultar a ordem das letras que formam o nome **Rubens**". Qual é o número de elementos desse evento? 1

8. Junte-se a um colega para investigar esta situação: Carlos pratica tiro ao alvo com flechas, profissionalmente. Nos fundos de sua casa ele elaborou um alvo na parede usando dois quadrados de tamanhos diferentes: o maior com medida de lado 2 m e o menor com medida de lado 1 m. Veja a ilustração.

DAE

Considere o experimento "lançamento da flecha no alvo" e também que Carlos **sempre acerta o alvo**, às vezes na região amarela, às vezes na região preta. Nesse experimento, considere os eventos a seguir.

- Evento *A*: Carlos acerta a flecha na região amarela.
- Evento *B*: Carlos acerta a flecha na região preta.

Avalie qual dos dois eventos é mais provável; justifique e informe o que seria o espaço amostral do experimento. Resposta pessoal.

Mauro Salgado

Probabilidade

Pedro, mais uma vez, acordou atrasado para ir à escola! Meio sonolento ainda, foi ao armário de roupas, abriu a gaveta de meias, pegou um pé de meia sem olhar e calçou em um dos pés; depois, pegou outro pé de meia sem olhar e calçou no outro pé. Detalhe: na gaveta das meias havia inicialmente 6 pares de meias diferentes, totalmente espalhadas, isto é, 12 pés de meia misturados. Qual é a probabilidade de Pedro ter calçado os 2 pés com o mesmo par de meias?

Para pensar e discutir

3. O espaço amostral é formado pelo número de maneiras de escolher 2 de 12 meias. Assim, o número de elementos desse espaço amostral é calculado por $C_{12,2} = 66$.

1. É mais provável que Pedro acerte ou erre as meias de um mesmo par? Explique como pensou.
É mais provável que Pedro erre.

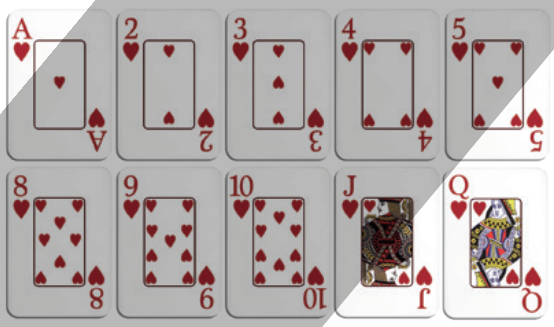
2. Nesse experimento, as meias são diferentes apenas na estampa. É um experimento aleatório? Sim.

3. Qual é o espaço amostral desse experimento? Quantos são os elementos do espaço amostral?

4. Qual é o evento? Quantos são os elementos do evento? 6

Note que na discussão proposta anteriormente não pedimos ainda para você calcular a probabilidade, embora você já tenha noções de probabilidades adquiridas ao longo do Ensino Fundamental. Pense não apenas numa resposta mas também em um procedimento para calcular a probabilidade. Depois retomaremos essa situação.

Quando estamos diante de um experimento aleatório em que o espaço amostral é finito, consideramos que todo **evento elementar** tem a mesma chance de ocorrer, em outras palavras: o **espaço amostral é equiprovável**. Por exemplo, se sortearmos aleatoriamente uma carta entre as cartas seguintes, cada uma delas tem igual condição de ser a escolhida.


Mauro Salgado

De acordo com esse exemplo, temos que:

- espaço amostral
  $\Omega = \{A, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, J, Q\}$ e $n(\Omega) = 10$
- eventos elementares (eventos com 1 elemento)
  $\{A\}; \{2\}; \{3\}; \{4\};\{5\}; \{8\}; \{9\}; \{10\}; \{J\}; \{Q\}$ e
  $n(\{A\}) = n(\{2\}) = n(\{3\}) = n(\{4\}) = n(\{5\}) = n(\{8\}) = n(\{9\}) = n(\{10\}) = n(\{J\}) = n(\{Q\}) = 1$

Para cada um desses eventos elementares podemos dizer que existe 1 situação favorável em 10 situações possíveis de ele ser escolhido, ou seja, a probabilidade é de 1/10.

A probabilidade $P(E)$ de ocorrer um evento E de um espaço amostral equiprovável Ω é dada por:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{\text{número de elementos de } E}{\text{número de elementos de } \Omega}$$

ou

$$P(E) = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número total de situações possíveis}}$$

Existem situações em que o espaço amostral é **contínuo**, não é um conjunto de elementos, mas uma área, um comprimento, por exemplo. Vamos retomar uma situação em que você intuitivamente analisou a probabilidade associada a um espaço amostral contínuo.

Para retomar

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Carlos pratica tiro com arco profissionalmente. Nos fundos de sua casa ele elaborou um alvo na parede usando dois quadrados de tamanhos diferentes: o maior com medida de lado 2 m e o menor com medida de lado 1 m. Veja a ilustração.

DAE

Considere o experimento "lançamento da flecha no alvo" e também que Carlos **sempre acerta o alvo**, às vezes na região amarela, às vezes na região preta. Nesse experimento, considere os eventos a seguir.

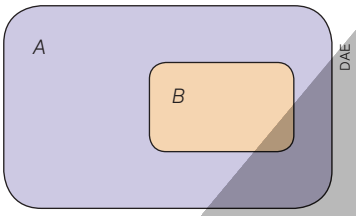
- Evento A: Carlos acerta a flecha na região amarela.
- Evento B: Carlos acerta a flecha na região preta.

Para pensar e discutir Orientações no Manual do Professor.

Como calcular a probabilidade de ocorrer o evento A e a probabilidade de ocorrer o evento B?

Nesse caso, a probabilidade é proporcional à área. Considerando que Carlos sempre acerta o alvo, a área do quadrado maior representa o espaço amostral (100%): assim, quanto maior a área, mais provável; quanto menor a área, menos provável. Que tal calcular a probabilidade dos dois eventos? Troque ideia com os colegas a respeito.

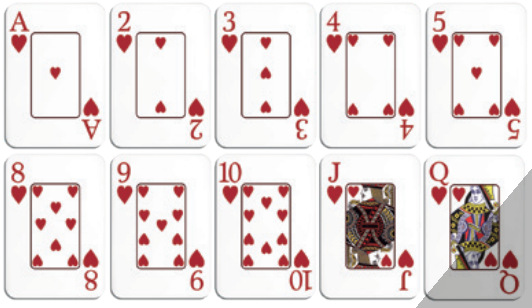
De modo geral, se há uma região B de um plano que está contida numa região A, a probabilidade de um ponto P também pertencer à região B é proporcional à área de B e não depende da posição que P ocupa na região A.



DAE

Em símbolos:

$$P = \frac{\text{área de } B}{\text{área de } A}$$


Mauro Salgado

Voltando às cartas, considere que iremos escolher aleatoriamente uma das 10 cartas e queremos saber qual é a probabilidade de a carta escolhida ter uma letra.

O evento E é formado por 3 elementos (A, J e Q), isto é, há 3 situações favoráveis. Portanto, a probabilidade é:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

$$P(E) = \frac{3}{10} = 0{,}3 = 0{,}30 = 30\%$$

Podemos expressar a probabilidade na forma fracionária, decimal ou mesmo em porcentagem.

Um pouco mais adiante você conhecerá as propriedades da probabilidade. Vamos examinar a seguir alguns exemplos.

Exemplo 1 – Quero o salgado com azeitona

Foram feitos 15 salgados especiais para um grupo de pessoas. Somente em 2 deles há uma azeitona dentro. Você escolhe um salgado aleatoriamente. Qual é a probabilidade de você escolher um salgado em que há azeitona?

E qual é a probabilidade de escolher um salgado que não tem azeitona?

ribeiro/Shutterstock.com

Recipiente com 15 salgados.

- O espaço amostral é formado por 15 elementos (são 15 salgados).
- Escolher o salgado com azeitona: evento formado por 2 elementos (são 2 salgados que têm azeitona).

Representando a probabilidade pela letra P, temos:

$$P = \frac{\text{número de situações favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

$$P = \frac{2}{15}$$

- Escolher o salgado sem azeitona: evento formado por 13 elementos (são 13 salgados que não têm azeitona).

Representando a probabilidade por $\overline{P}$ (não P), temos:

$$\overline{P} = \frac{\text{número de situações favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

$$\overline{P} = \frac{13}{15}$$

Calculando a probabilidade de escolher um salgado com azeitona, você pode dizer como calcular a probabilidade de escolher um salgado sem azeitona? Explique aos colegas como pensou. Essa é a ideia de probabilidades complementares, que veremos mais adiante.

Exemplo 2 – Encontrando a chave certa

Mauro Salgado

As três chaves são idênticas, porém somente uma delas abre a porta da casa de Renato, que está chegando em casa e precisa ir rapidamente ao banheiro. Ele pega uma das três chaves e consegue, numa única tentativa, abrir a porta. Era mais provável ele acertar na primeira tentativa ou errar na primeira tentativa?

Sendo P a probabilidade de ele acertar na 1ª tentativa e $\overline{P}$ a probabilidade de ele não acertar, temos:

$$P = \frac{1}{3} \text{ e } \overline{P} = \frac{2}{3}$$

Exemplo 3 – Fila em ordem alfabética

Mauro Salgado

As amigas Andreia, Bruna, Carla, Daniela e Eliane estão numa fila para entrar no cinema; Andreia é a 1ª da fila. Ao olhar para trás, Andreia percebe que as cinco estão na fila com os nomes em ordem alfabética do começo para o fim. Qual é a probabilidade de as cinco amigas, aleatoriamente, formarem uma fila e ficarem em ordem alfabética como Andreia constatou?

- Primeiro vamos determinar o número total de situações possíveis para as amigas estarem em fila.

- Somente em uma dessas sequências possíveis elas estarão em ordem alfabética do começo para o fim da fila. Sendo P a probabilidade de isso acontecer, temos:

$$P = \frac{1}{P_5} = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} \Rightarrow P = \frac{1}{120}$$

Para pensar e discutir

Qual seria a probabilidade de as amigas estarem posicionadas em ordem alfabética do começo para o fim da fila ou do fim para o começo? A probabilidade seria $\frac{2}{120}$, isto é, o dobro da calculada no exemplo.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Você notou que, para calcular algumas probabilidades utilizamos também cálculo combinatório. Por isso é importante compreender bem qual é o espaço amostral da situação da qual se calcula a probabilidade. Para ampliar essas ideias, retome o caso das meias e os exemplos relacionados com o Hiper Milhão.

Exemplo 4 – Dado viciado!

A soma das faces opostas de um dado é igual a 7. Um fabricante inescrupuloso fez um dado de forma que, ao lançá-lo muitas vezes, a face 1 sai o triplo de vezes de qualquer outra face e as demais têm igual probabilidade de sair de um dado normal.

Qual é a probabilidade de sair cada uma dessas faces?

Mauro Salgado

Vamos representar por $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$ e $P(6)$ as probabilidades de sair, respectivamente as faces 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Então:

$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$

Fazemos: $P(1) = 3x$ e $P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = x$

$3x + x + x + x + x + x = 1$

$8x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{8}$

Portanto, a probabilidade de sair a face 1 é $\frac{3}{8}$ e cada uma das demais é $\frac{1}{8}$.

Para pensar e discutir

1. Não, pois a face 1 tem o triplo de probabilidade de ocorrer do que qualquer outra face.
2. Resposta esperada: $P(1) = \frac{1}{21}$, $P(2) = \frac{2}{21}$, $P(3) = \frac{3}{21}$, $P(4) = \frac{4}{21}$, $P(5) = \frac{5}{21}$ e $P(6) = \frac{6}{21}$.

1. Nesse exemplo, as faces dos dados são equiprováveis? Justifique.
2. E qual é a probabilidade de ocorrer cada face de um dado viciado considerando que a probabilidade de sair cada face é diretamente proporcional ao número que indica a face? Explique como calculou.

Para retomar

Mauro Salgado

- O espaço amostral é formado por todas as possíveis "duplas" de meias que podemos escolher para formar um par. Temos de fazer escolhas de 12 meias, de 2 em 2. Logo, o número total dessas escolhas é calculado por: C_{12}^{2}.
- O evento é escolher duas meias do mesmo par. Ora, existem apenas 6 possibilidades de isso acontecer, pois podemos formar 6 pares de meias do mesmo tipo.
- Probabilidade:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

$$P(E) = \frac{6}{C_{12}^{2}} = \frac{6}{\frac{12!}{2!(12-2)!}} = \frac{6}{\frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1}} = \frac{6}{6 \cdot 11} \Rightarrow P(E) = \frac{1}{11}$$

Importante!

Nesse caso, você não precisaria fazer todo esse cálculo. O raciocínio é o seguinte: o primeiro pé de meia escolhida por Pedro não importa (pode ser qualquer um dos 12 pés de meias da gaveta). Assim, ele escolhe qualquer uma e dentro da gaveta ficam 11 pés de meias. Somente 1 pé dentre esses 11 que ficaram na gaveta faz par com o pé de meia que ele escolheu inicialmente. Logo, a probabilidade é $\frac{1}{11}$. Concorda?

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Aposta de Laura.

Aposta de Andreia.

Ilustrações: Mauro Salgado

Quem tem maior probabilidade de ganhar?

Cuidado: intuição não faz parte do cálculo de probabilidade.

Ao lado estão as apostas do Hiper Milhão feitas por Laura e Andreia.

As duas têm a mesma probabilidade de ganhar.

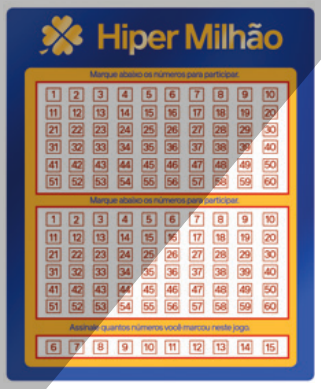
Para pensar e discutir

1. Qual delas tem maior probabilidade de ter feito a aposta que será sorteada? Justifique.
2. Qual é a probabilidade de cada uma delas ganhar no Hiper Milhão? Explique como calculou.

Orientações no Manual do Professor.

No Brasil há um jogo similar ao do Hiper Milhão, e os cartões correspondentes costumam trazer no verso várias observações interessantes sobre a aposta, inclusive a probabilidade que você calculou anteriormente. Outra curiosidade é que, ao fazer uma aposta, pode-se escolher 6 dezenas, 7 dezenas, 8 dezenas..., até 15 dezenas. Isso está indicado no cartão. É claro que o valor que você paga em cada uma dessas possibilidades é diferente, pois poderá competir com mais ou com menos dezenas.

Para explorar



Mauro Salgado

Junte-se a 3 colegas para esta atividade. Vocês precisarão de um cartão do jogo similar ao do Hiper Milhão que é praticado no Brasil e de uma calculadora. Faça o que se pede a seguir.

1. Pesquise os valores das apostas para a escolha de 6 dezenas, 7 dezenas, 8 dezenas... até 15 dezenas. A resposta depende dos valores atuais cobrados.
2. Elabore uma tabela com o número de dezenas e o valor que é pago para cada tipo de aposta. A resposta depende dos valores atuais cobrados.
3. Calcule, para cada uma dessas possibilidades de escolhas de dezenas, as probabilidades de se ganhar.
4. Investigue o motivo dos valores cobrados em cada tipo de aposta e apresente as conclusões. Orientações no Manual do Professor.

3. As probabilidades são dadas como a seguir. 6 dezenas: $\frac{C_{6,6}}{C_{60,6}}$; 7 dezenas: $\frac{C_{7,6}}{C_{60,6}}$; ...; $\frac{C_{15,6}}{C_{60,6}}$.

Atividades

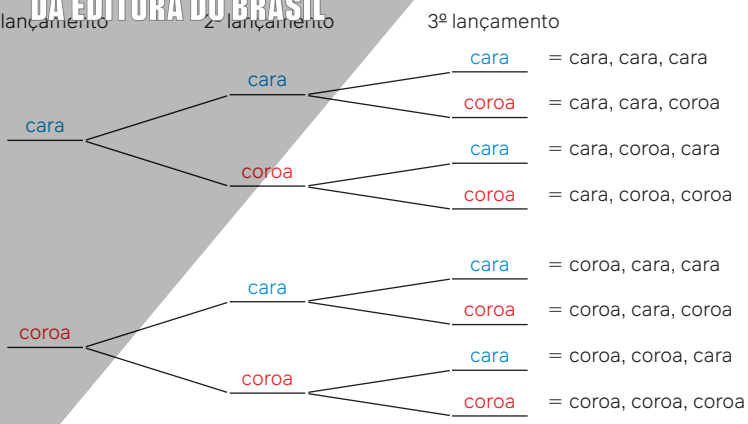
1. Considere 15 bolas numeradas, todas de mesmo tamanho, colocadas dentro de uma urna sem que seja possível observar o número. Uma bola é extraída aleatoriamente. Utilizando o conceito de probabilidade, avalie qual dos três eventos a seguir é mais provável e qual é o menos provável de acontecer.
Evento *A*: a bola retirada tem um número par.
Evento *B*: a bola retirada tem um número ímpar.
Evento *C*: a bola retirada não tem um número múltiplo de 3.

Mauro Salgado

1. Para analisar os eventos é necessário calcular as correspondentes probabilidades de ocorrência: $P(A) = \frac{7}{15}$, $P(B) = \frac{8}{15}$, $P(C) = \frac{10}{15}$.
Assim, o mais provável é o evento *C* e o menos provável é o evento *A*.

2. A seguir está representada a árvore das possibilidades dos lançamentos consecutivos de uma mesma moeda três vezes e a observação da sequência desses resultados.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL



De acordo com essas informações, faça o que se pede.

a) Responda: Qual é a probabilidade de obtermos pelo menos duas caras nesse experimento? $\frac{4}{8}$

b) Qual é a probabilidade, nesse experimento, de obtermos três resultados iguais? $\frac{2}{8}$

c) Elabore uma situação para o cálculo da probabilidade de um evento desse espaço amostral e apresente a probabilidade correspondente. Resposta pessoal.

4. a) $P = \frac{1}{C_{n,2}}$, sendo n o número de estudantes da turma.

3. Esse cadeado de três segredos só é aberto com uma senha de três algarismos colocados na mesma ordem. Considere que você não sabe qual é o segredo e, aleatoriamente, tenta descobrir. Qual é a probabilidade de acertar o segredo na primeira tentativa e abrir o cadeado? $P = \frac{1}{1000}$

waller66 /Shutterstock.com

4. Junte-se a um colega para resolver esta atividade. Imagine que o nome de todos os estudantes de sua turma foram escritos em pedaços de papel iguais e colocados dentro de uma sacola. Aleatoriamente, extraem-se dois nomes da sacola. Responda:

a) Qual é a probabilidade de você e seu par da dupla serem escolhidos?

b) Qual é a probabilidade de que nem você nem esse colega sejam escolhidos?

5. Uma pessoa percebeu que ao lançar muitas vezes um dado viciado, a face 6 saía com o dobro de frequência da face 1 (essas faces são opostas no dado), e as outras faces saíam com a frequência esperada em um dado não viciado. Determine a probabilidade de, lançando-se esse dado, sair:

a) a face 2; $\frac{1}{6}$

b) a face 1; $\frac{1}{9}$

c) a face 6. $\frac{2}{9}$

O experimento a seguir é aleatório e os elementos do espaço amostral não são equiprováveis.

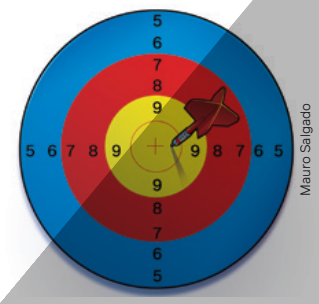
6. Esta é uma roleta diferente. Ao acionar um painel eletrônico, um dos 10 setores (todos do mesmo tamanho) se ilumina: é o número sorteado. Sabe-se que todos os setores pares têm a mesma probabilidade de ocorrer, e o mesmo acontece com os setores ímpares. Entretanto, o fabricante dessa roleta construiu-a de maneira que a probabilidade de ocorrer um número ímpar é o dobro da probabilidade de ocorrer um número par. Calcule a probabilidade de ocorrer, numa jogada, o número 7 e explique como você pensou. $P(7) = \frac{2}{15}$. Orientações no Manual do Professor.

DAE

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

7. Em uma brincadeira de tiro ao alvo, cada ponto da região do alvo tem iguais condições de ser atingido. Assim, atingir uma região do alvo é proporcional à área dessa região. Com isso em mente, use a fórmula para o cálculo da área de um círculo de raio R, isto é, πR^2, para calcular a probabilidade de um atirador profissional acertar cada região colorida do alvo a seguir, considerando que ele sempre acerta o alvo, isto é, sempre acerta uma das regiões.

4. b) $P = \frac{C_{n-2,2}}{C_{n,2}}$, sendo n o número de estudantes da turma.

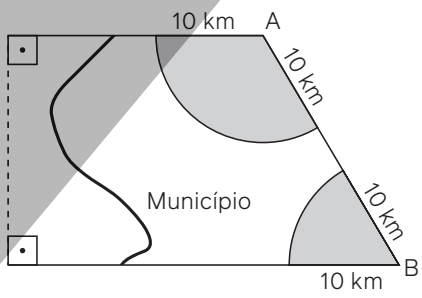

Mauro Salgado

Dados:

- a circunferência azul de maior raio mede 50 cm;
- a circunferência vermelha de maior raio mede 30 cm;
- a circunferência amarela de maior raio mede 10 cm.

$P(\text{azul}) = 0{,}64$, $P(\text{vermelho}) = 0{,}32$, $P(\text{amarelo}) = 0{,}04$

8. (Enem) Um município de 628 km² é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas A e B alcançam um raio de 10 km do município, conforme mostra a figura.



Tarcísio Garbellini

Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras. Alternativa **b**.

Essa probabilidade é de, aproximadamente:

a) 20%.

b) 25%.

c) 30%.

d) 35%.

e) 40%.

9. Novamente em dupla, procure resolver a situação a seguir, que envolve uma investigação de possibilidades.

Carla pergunta a Laura se ela pode trocar uma cédula de R$ 100,00 por duas cédulas de R$ 50,00. Laura examina sua carteira e resolve brincar com Carla dizendo que tem exatamente R$ 200,00 na carteira em cédulas de R$ 50,00, de R$ 20,00 e de R$ 10,00. Além disso, informa que tem pelo menos uma cédula de cada valor, mas não diz quantas cédulas tem de cada valor. Nessas condições, qual é a probabilidade de Laura fazer a troca pedida por Carla? $\frac{6}{13}$

Propriedades das probabilidades

Você já viu alguns exemplos de como calcular a probabilidade de um evento num espaço amostral. Entretanto, é importante compreender algumas ideias e propriedades a respeito desse cálculo. Quando você lança uma moeda para cima, por exemplo, e aposta que sairá cara, a probabilidade de isso acontecer é 50%, e a probabilidade de não acontecer também é 50%.

Mas o que isso significa?

Observe a representação, em uma fração, da probabilidade de ocorrer cara no espaço amostral "lançamento de uma moeda e observação da face resultante":

$$P(\text{cara}) = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

Isso **não** significa que se você lançar a moeda 10 vezes, em 50% das vezes sairá cara e nos outros 50% o resultado será coroa. Significa que, à medida que aumentamos o número de lançamentos de uma moeda, verifica-se, experimentalmente, que as frequências relativas correspondentes às ocorrências tanto de cara quanto de coroa ficam cada vez mais próximas de 50%.

Vamos verificar!

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Junte-se a um colega para esta atividade. Consigam uma moeda de 1 real e façam o que se pede a seguir.

1. Um integrante da dupla deve lançar a moeda 50 vezes e informar os resultados.
2. O segundo integrante deve anotar o resultado de cada lançamento. Depois, troquem as posições.
3. Ao final, a dupla resumirá o experimento contando e anotando o número de vezes que deu cara e o número de vezes que deu coroa. Apresentará também a frequência relativa tanto de cara quanto de coroa.
4. A turma toda deve, usando as informações de todas as duplas, elaborar um quadro com os dados a seguir sobre os resultados.

Número total de lançamentos	Quantidade de caras	Quantidade de coroas

5. Depois a turma toda deve elaborar, com base no quadro anterior, o seguinte quadro:

	Evento saiu cara	Evento saiu coroa
Frequência relativa		

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

6. Escreva uma conclusão comparando as frequências relativas obtidas com as probabilidades de ocorrer cara ou de ocorrer coroa que você calcularia.

Em relação ao experimento anterior, você deve ter constatado que não ocorreu exatamente metade de resultados cara e outra metade coroa. Entretanto, se adicionarmos as frequências relativas do evento "sair cara" com o evento "sair coroa" o resultado será 1 ou 100%. Certo?

Existem propriedades importantes do cálculo de probabilidades que apresentamos e discutimos a seguir.

Exemplo1

Considere o espaço amostral equiprovável correspondente ao resultado do lançamento de um dado e a observação das faces numeradas de 1 a 6. Nesse espaço amostral, vamos investigar os eventos a seguir.

- Evento A: a face resultante é um número menor que 7.
- Evento B: a face resultante é um número múltiplo de 10.
- Evento C: a face resultante é um número múltiplo de 3.
- Evento $\overline{C}$: a face resultante não é um número múltiplo de 3.

photastic/Shutterstock.com

Para pensar e discutir

1. Quais são as probabilidades de ocorrência dos eventos A, B, C e $\overline{C}$?
2. Qual é a conclusão sobre a ocorrência do evento A? E do evento B?
3. Adicionando-se as probabilidades de ocorrência dos eventos C e $\overline{C}$, qual é o resultado? O que esse resultado significa?
4. A probabilidade de ocorrência de um evento aleatório pode variar de quanto a quanto? E em porcentagem, como ocorre essa variação?

1. As probabilidades são:
$P(A) = 1$; $P(B) = 0$;
$P(C) = \frac{2}{6}$; $P(\overline{C}) = 4/6$.

2. O evento A é certo; o evento B é impossível.

3. O resultado é 1. Significa que esses eventos são complementares.

4. Pode variar de 0 a 1, isto é, de 0% a 100%.

Nessa discussão você investigou fatos sobre determinado espaço amostral. Esses fatos também poderiam ser constatados em outros espaços amostrais **finitos**, pois representam propriedades associadas ao cálculo de probabilidades. Conheça a seguir essas propriedades e as correspondentes justificativas. É importante que você analise cada propriedade, válida para o espaço amostral finito, e também suas justificativas. Após cada justificativa, propomos uma questão para você responder oralmente.

1ª propriedade
A probabilidade do **evento certo** é igual a 1.

Justificativa:
Um evento E é considerado certo quando ele coincide com o próprio espaço amostral, isto é, $E = \Omega$. Nesse caso, o número de situações favoráveis é igual ao número total de resultados possíveis. Observe o que acontece quando calculamos $P(E)$:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1 \Rightarrow P(E) = 1$$

Para pensar e discutir

Se numa turma do Ensino Médio for sorteado aleatoriamente o nome de um estudante, a probabilidade de resultar uma menina é igual a 1? Será igual a 1 somente se todos os estudantes da turma forem meninas.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

2ª propriedade
A probabilidade do **evento impossível** é igual a 0.

Justificativa:
Um evento E é considerado impossível se for igual ao conjunto vazio, isto é, $E = \varnothing$. Nesse caso, o número de situações favoráveis é zero. Logo:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{n(\varnothing)}{n(\Omega)} = \frac{0}{n(\Omega)} = 0 \Rightarrow P(E) = 0$$

Para pensar e discutir

Se em uma turma for sorteado aleatoriamente o nome de um estudante, a probabilidade de ser alguém com tênis preto é igual a zero? Será igual a zero somente se todos os estudantes da turma não usarem tênis pretos.

3ª propriedade
Se E é um evento do espaço amostral Ω então $\mathbf{0 \leqslant P(E) \leqslant 1}$.

Justificativa:
Sendo E é um subconjunto do espaço amostral Ω, temos que $n(\varnothing) \leqslant n(E) \leqslant n(\Omega)$, isto é:

$$0 \leqslant n(E) \leqslant n(\Omega)$$

Dividindo por $n(\Omega)$:

$$\frac{0}{n(\Omega)} \leqslant \frac{n(E)}{n(\Omega)} \leqslant \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)}$$

$$0 \leqslant P(E) \leqslant 1$$

Para pensar e discutir

Numa turma qualquer do Ensino Médio, o nome de um estudante será sorteado. Quais são os possíveis valores para a probabilidade de seu nome ser o sorteado?

A probabilidade será representada por um número maior ou igual a zero (será zero se você não for estudante dessa turma) e menor que 1 se você for estudante da turma. Um caso extremo é o seguinte: a probabilidade será igual a 1 se a "turma" tiver apenas um estudante e esse estudante for você. Então dizemos que a probabilidade será um número pertencente ao intervalo [0; 1].

4ª propriedade

Se E é um evento do espaço amostral Ω e $\overline{E}$ é o evento complementar, então $\boldsymbol{P(E) + P(\overline{E}) = 1}$.

Justificativa:

Se E e $\overline{E}$ são conjuntos complementares em relação ao conjunto Ω (espaço amostral), temos que a união deles resulta o próprio espaço amostral; além disso, nenhum elemento está simultaneamente em E e $\overline{E}$, como mostra o diagrama ao lado.

DAE

Nessas condições, temos: $n(E) + n(\overline{E}) = n(\Omega)$.

Dividindo os dois membros dessa igualdade por $n(\Omega)$:

$$\frac{n(E)}{n(\Omega)} + \frac{n(\overline{E})}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(E) + P(\overline{E}) = 1$$

Para pensar e discutir

Se a probabilidade de acontecer um evento aleatório é 12,5%, qual é a probabilidade de esse evento não acontecer?

A probabilidade de acontecer um evento e a probabilidade de ele não acontecer são complementares, ou seja, a probabilidade de não acontecer o evento é 87,5%.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

O ideal é que você não apenas saiba fazer cálculos envolvendo probabilidades mas compreenda o que está calculando. O texto a seguir enfatiza a essência do uso da probabilidade.

Thiago Bento

A essência da teoria da probabilidade pode ser vislumbrada dos fatos simples a seguir. Ninguém pode predizer com certeza qual a face que uma moeda lícita jogada ao ar mostrará ao cair. Mesmo que a moeda tenha acabado de mostrar cara dez vezes seguidas, isso não melhora em nada nossa habilidade de predizer com certeza a próxima jogada. Mesmo assim, podemos predizer com certeza que, se você jogar ao ar aquela moeda 10 milhões de vezes, um número bem próximo da metade das jogadas mostrará cara e um número bem próximo da metade mostrará coroa. De fato, no fim do século XIX, o estatístico Karl Pearson teve a paciência de jogar uma moeda 24 mil vezes. Ele obteve cara em 12 012 das jogadas. É com isso, num certo sentido, que a teoria da probabilidade realmente tem a ver. A teoria da probabilidade nos fornece informações precisas sobre a coleção dos resultados de um grande número de experimentos; ela nunca pode predizer o resultado de qualquer experimento específico. Se um experimento pode produzir n resultados possíveis, cada qual com a mesma chance de ocorrer, então a probabilidade de cada resultado é $\frac{1}{n}$. Se você rolar um dado lícito, a probabilidade de obter o número 4 será $\frac{1}{6}$, porque o dado

tem seis faces e cada face é um resultado igualmente provável. Suponhamos que o dado seja rolado sete vezes seguidas e, a cada vez, seja obtido um 4, qual seria a probabilidade de se obter um 4 no próximo lançamento? A teoria da probabilidade dá uma resposta clara como a água: a probabilidade ainda seria $\frac{1}{6}$ – o dado não tem memória e todas as noções de "mão quente" ou da próxima jogada compensando o desequilíbrio anterior são apenas mitos. O verdadeiro é que se você rolasse um dado um milhão de vezes, os resultados chegariam a uma média e o 4 apareceria um número bem próximo de um sexto das vezes.

Banco Central do Brasil

Examinemos uma situação um pouco mais complexa. Suponhamos que três moedas sejam lançadas simultaneamente. Qual a probabilidade de se obter duas coroas e uma cara? Podemos encontrar a resposta pela simples listagem de todos os resultados possíveis. Se denotarmos cara por "Ca" e coroa por "Co", então haverá oito resultados possíveis: CoCoCo, CoCoCa, CoCaCo, CoCaCa, CaCoCo, CaCoCa, CaCaCo, CaCaCa. Destes, podemos verificar que três são favoráveis ao evento "duas coroas e uma cara". Portanto, a probabilidade deste evento é $\frac{3}{8}$. Ou, mais genericamente, se dos n resultados de iguais chances, m forem favoráveis ao evento de interesse, então a probabilidade de tal evento acontecer será $\frac{m}{n}$. Notemos que isso significa que a probabilidade sempre toma um valor entre zero e um. Se o evento de interesse for de fato impossível, então $m = 0$ (sem resultado favorável) e a probabilidade seria zero. Se, por outro lado, o evento for absolutamente certo, isso significará que todos os eventos são favoráveis ($m = n$) e a probabilidade será, então, simplesmente $\frac{n}{n} = 1$. Os resultados dos três lançamentos de moeda demonstram mais um outro resultado importante da teoria da probabilidade – se tivermos vários eventos que sejam inteiramente independentes entre si, então a probabilidade de todos eles acontecerem será o produto das probabilidades individuais. Por exemplo, a probabilidade de obtenção de três caras é $\frac{1}{8}$, que é o produto das probabilidades de obtenção de caras em cada uma das três moedas: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

LIVIO, Mario. *Deus é matemático?* Rio de Janeiro: Record, 2010. p.164-165.

Para pensar e discutir

Orientações no Manual do Professor.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1. É possível, [illegible] moeda dez vezes consecutivas, que os dez resultados sejam cara? E qual será o resultado do próximo lançamento?
2. Veja o argumento de um contumaz jogador: "Perdi 50 vezes seguidas, vou continuar apostando porque uma hora eu tenho de ganhar, a sorte vai virar". Como refutar esse argumento utilizando seu conhecimento de probabilidade?

Atividades

Mauro Salgado

B	I	N	G	O
12	22	43	59	75
11	21	32	57	66
8	20	☆	50	61
2	26	45	54	69
15	24	37	55	71

1. Marta está participando de um "bingo" em sua escola. Veja ao lado a cartela dela: vários números já estão marcados. Do total de 75 números, 40 já foram sorteados. Entre outras premiações, o participante que consegue preencher uma linha inteira ou uma coluna inteira também recebe um prêmio.
Responda:
   a) Qual é a probabilidade de Marta conseguir preencher, com o próximo número sorteado, uma linha ou uma coluna? $P = \frac{2}{35}$
   b) E qual é a probabilidade de ela não conseguir preencher, com o próximo número sorteado, uma linha ou uma coluna? $P = \frac{33}{35}$

2. Responda:

a) Se a probabilidade de ocorrer determinado evento é 45%, qual é a probabilidade de ele não ocorrer? 55%

b) Se num dado viciado a probabilidade de sair a face 6 é de 1/5, qual é a probabilidade de não sair essa face? $\frac{4}{5}$

3. A probabilidade de ocorrência de um evento num espaço amostral finito varia de 0 (evento impossível) a 1 (evento certo). Respostas pessoais.

a) Elabore um evento, de um espaço amostral, que seja impossível.

b) Elabore um evento, de um espaço amostral, que seja certo.

4. Respostas pessoais, dependem dos eventos elaborados pelos estudantes.

4. Considere o experimento de retirada aleatória de uma carta de um baralho com 52 cartas. Elabore:

a) dois eventos que sejam complementares em relação ao espaço amostral;

b) um evento em que a probabilidade do resultado seja muito próxima de zero.

5. Um dado é lançado ao chão e observa-se o número da face voltada para cima. Responda:

a) Qual é a probabilidade de ocorrer o evento *A*: sair uma face com um número menor que 3? $\frac{2}{6}$

b) Qual é a probabilidade de ocorrer o evento *B*: sair uma face com um número maior ou igual a 3? $\frac{4}{6}$

c) Esses dois eventos são complementares? Justifique. Sim, pois no lançamento do dado esses dois eventos unidos correspondem ao espaço amostral (observe que a soma das probabilidades é igual a 1).

6. Em uma fábrica de parafusos foram produzidos 100 parafusos numa máquina durante 30 minutos. Observou-se que, desses parafusos, 10 apresentavam defeitos. Aleatoriamente, o inspetor de qualidade retirou 6 parafusos. Responda às perguntas.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

a) Qual é a probabilidade de que os seis parafusos sejam perfeitos? $P = \frac{C_{90,6}}{C_{100,6}}$

b) Qual é a probabilidade de que os seis parafusos sejam defeituosos? $P = \frac{C_{10,6}}{C_{100,6}}$

c) Qual é a probabilidade de que nenhum dos seis parafusos sejam perfeitos? $P = \frac{C_{10,6}}{C_{100,6}}$ (Os 6 sejam defeituosos.)

d) Qual é a probabilidade de que nenhum dos seis parafusos sejam defeituosos? $P = \frac{C_{90,6}}{C_{100,6}}$ (Os 6 sejam perfeitos.)

e) Qual é a probabilidade de que ao menos um deles seja perfeito?

f) Qual é a probabilidade de que ao menos um deles seja defeituoso?

7. Junte-se a um colega para fazer esta atividade.

Vamos considerar todos os números de três algarismos distintos que podem ser formados permutando-se os algarismos 2, 3 e 4. Em seguida, um dos números formados é escolhido aleatoriamente.

Considere os eventos a seguir.

Evento *A:* o número formado é múltiplo de 3.

Evento *B:* o número formado não é múltiplo de 3.

Evento *C:* o número formado é múltiplo de 5.

Evento *D:* o número formado não é múltiplo de 5.

Calcule a probabilidade de ocorrer cada um desses eventos. $P(A) = 1 = 100\%$ $P(C) = 0 = 0\%$ $P(B) = 0 = 0\%$ $P(D) = 1 = 100\%$

8. O quadro a seguir apresenta a soma dos resultados do lançamento de dois dados.

	2	3	4	5	6	7
	3	4	5	6	7	8
	4	5	6	7	8	9
	5	6	7	8	9	10
	6	7	8	9	10	11
	7	8	9	10	11	12

gomolach/Shutterstock.com

a) Dos 36 resultados possíveis, quais resultados diferentes podem ocorrer? Podem ocorrer os seguintes resultados: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12.

b) O espaço amostral correspondente à soma dos resultados do lançamento de dois dados é equiprovável? Justifique. Não, pois os resultados não têm a mesma probabilidade de ocorrência.

c) Qual é a probabilidade de ocorrer a soma 7? $P = \frac{6}{36}$

d) E de não ocorrer a soma 7? $P = \frac{30}{36}$

e) Qual é a probabilidade de a soma ser um número ímpar? $P = \frac{18}{36}$

f) E de não ser um número ímpar? $P = \frac{18}{36}$

9. Uma indústria de parafusos separou uma amostra com 500 parafusos para o exame de qualidade. Observou-se que, desses 500 parafusos, 4 estavam com defeito. Responda:

a) Extraindo-se aleatoriamente um parafuso dessa caixa, qual é a probabilidade de ele estar com defeito? 0,8%

b) E qual é a probabilidade de ele não estar com defeito? 99,2%

6. e) $P = 1 - \frac{C_{10,6}}{C_{100,6}}$ (Retiramos do todo os parafusos defeituosos.); **f)** $P = 1 - \frac{C_{90,6}}{C_{100,6}}$ (Retiramos do todo os parafusos perfeitos.).

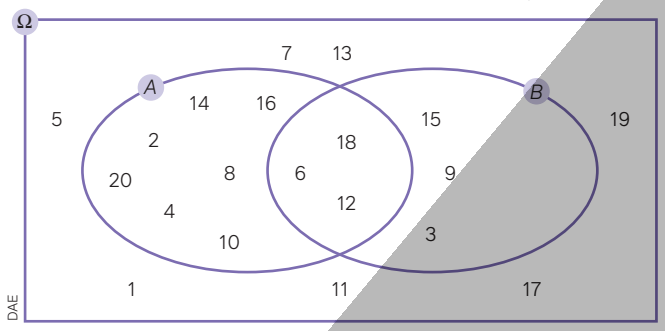
10. Mateus é feirante e, no final de um dia de trabalho, observou que, numa caixa com 10 maçãs, três estavam levemente amassadas. Se você, aleatoriamente, retirar de uma vez só duas dessas frutas, qual é a probabilidade de:

a) as duas não estarem levemente amassadas? $P = \frac{C_{7,2}}{C_{10,2}} = \frac{7}{15}$

b) pelo menos uma delas estar levemente amassada? $P = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$

Adição de probabilidades

Em alguns tópicos estudados neste livro mencionamos, de forma direta ou indireta, o que em Matemática é chamado de **teoria dos conjuntos**. No estudo de Estatística, por exemplo, quando se fala em população para uma pesquisa, essa população é um **conjunto**. Se escolhermos uma amostra dessa população temos exemplo de outro conjunto, chamado de **subconjunto** do conjunto da população. Em análise combinatória, quando escolhemos um grupo de objetos significa que formamos um conjunto de objetos, e cada objeto é um elemento do conjunto (dizemos que **pertence** ao conjunto). Quando nos referimos à probabilidade zero de acontecer um evento, esse evento no espaço amostral é vazio, isto é, um conjunto vazio representado por ∅. Podemos realizar "operações" entre conjuntos, como **união** e **interseção**. Observe, por exemplo, nos diagramas ao lado, dois subconjuntos do conjunto dos números naturais de 1 a 20, que representamos por Ω.



DAE

- Conjunto *A*: formado por todos os números naturais múltiplos de 2, de 1 a 20.
- Conjunto *B*: formado por todos os números naturais múltiplos de 3, de 1 a 20.

Para pensar e discutir

1. Quantos desses números são elementos do conjunto *A* ou do conjunto *B*, isto é, são elementos da união desses dois conjuntos (representamos por $(A \cup B)$? Descreva o conjunto formado por esses elementos.
São 13 elementos. S = {2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 3; 9; 15}.

2. Quantos desses números são elementos do conjunto *A* e do conjunto *B* simultaneamente, isto é, são elementos da interseção desses dois conjuntos (representamos por $(A \cap B)$? Descreva o conjunto formado por esses elementos. São 3 elementos. S = {6; 12; 18}.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

3. Quantos desses números são elementos do conjunto $(A \cup B)$? Descreva o conjunto formado por esses elementos. São 7 elementos. S = {1; 5; 7; 11; 13; 17; 19}.

4. Qual é a probabilidade de se escolher aleatoriamente um número desse espaço amostral Ω que seja um elemento do conjunto $(A \cup B)$? A probabilidade é $\frac{13}{20}$.

5. Essa probabilidade é a mesma que a adição das probabilidades $P(A)$ (escolher um elemento do conjunto *A*) com $P(B)$ (escolher um elemento do conjunto *B*? Justifique.

5. Não, pois $P(A) + P(B) = \frac{10}{20} + \frac{6}{20} = \frac{16}{20}$, que é diferente de $\frac{13}{20}$. Essa diferença ocorre porque existem elementos (três elementos) que estão nos dois conjuntos simultaneamente e ao adicionar as probabilidades eles foram computados duplamente.

Retorne ao diagrama e observe que o número de elementos da união dos dois conjuntos *A* e *B* pode ser calculado adicionando-se o número de elementos de *A* com o número de elementos de *B* e, do resultado, deve-se subtrair o número de elementos de $A \cap B$. Devemos subtrair o número de elementos de $A \cap B$ pois esses elementos foram considerados duas vezes. Em símbolos, escrevemos: É importante os estudantes concluírem que isso ocorrerá quando a interseção entre os dois conjuntos for vazia. Nesse caso, dizemos que os dois conjuntos são disjuntos.

$$\mathbf{n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

Agora uma pergunta para você pensar e responder: Quando ocorre $\mathbf{n(A \cap B) = n(A) + n(B)}$?

De modo geral, quando temos os eventos *A* e *B* de um mesmo espaço amostral, a ocorrência do evento *A* **ou** do evento *B* é indicada por $A \cup B$. Já a ocorrência do evento *A* **e** do evento *B* é indicada por $A \cap B$.

Considerando que A e B são eventos de um mesmo espaço amostral Ω finito, não vazio e equiprovável, a probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B é igual à probabilidade de ocorrer A mais a probabilidade de ocorrer B menos a probabilidade de ocorrer A e B simultaneamente. Em símbolos:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Justificativa:

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Dividindo membro a membro por $n(\Omega)$ vem:

$$\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Quando $A \cap B = \varnothing$, os eventos A e B são chamados de **mutuamente exclusivos**. Nesse caso, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Analise e discuta com os colegas os exemplos a seguir envolvendo a adição de probabilidades.

Exemplo 1

Em um baralho normal há 52 cartas, 13 cartas de cada naipe (paus, espadas, copas e ouros). Uma carta será retirada aleatoriamente desse baralho. Vamos determinar a probabilidade de essa carta ser um valete ou um rei.

Mauro Salgado

- Evento A: ocorrência de a carta retirada ser um valete: $n(A) = 4$.
- Evento B: ocorrência de a carta retirada ser um rei: $n(B) = 4$.

Cálculo da probabilidade da ocorrência de a carta retirada ser um valete ou um rei (observe que os eventos A e B são mutuamente exclusivos, não pode ocorrer simultaneamente uma carta valete e um rei).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

$$P(A \cup B) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} - \frac{0}{52}$$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{52} = \frac{2}{13} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{2}{13}$$

Portanto, a probabilidade é $\frac{2}{13}$.

Exemplo 2

De um grupo de 10 estudantes, entre os quais Paula e Eduardo, deve-se escolher, ao acaso, uma comissão de 4 pessoas para representar a turma num encontro nacional de estudantes. Qual é a probabilidade de Paula ou Eduardo participarem dessa comissão?

- O espaço amostral Ω é o conjunto formado por todas as possíveis maneiras de se formar a comissão com quatro elementos de 10.

$$n(\Omega) = C_{10}^{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \Rightarrow n(\Omega) = 210$$

- Evento A: Paula irá participar. É o conjunto formado por todas as comissões em que Paula e outros três estudantes podem fazer parte.

$$n(A) = C_{10-1}^{4-1} = C_{9}^{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \Rightarrow n(A) = 84$$

- Evento B: Eduardo irá participar. É o conjunto formado por todas as comissões em que Eduardo e outros três estudantes podem fazer parte.

$$n(B) = C_{10-1}^{4-1} = C_9^3 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \Rightarrow n(B) = 84$$

- Evento $A \cap B$: Paula e Eduardo irão participar. É o conjunto formado por todas as comissões formadas por Paula, Eduardo e outros dois estudantes.

$$n(A \cap B) = C_{10-2}^{4-2} = C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28 \Rightarrow n(A \cap B) = 28$$

- Cálculo da probabilidade de Paula ou Eduardo participar da comissão:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{84}{210} + \frac{84}{210} - \frac{28}{210}$$

$$P(A \cup B) = \frac{140}{210} = \frac{2}{3} \cong 0{,}67 = 67\% \Rightarrow P(A \cup B) \cong 67\%$$

Portanto, a probabilidade de Paula ou Eduardo participar da comissão é de aproximadamente 67%.

Para pensar e discutir

1. Você resolveria o exemplo 2 de outra maneira? Explique. Resposta pessoal.
2. Se a probabilidade de Paula ou Eduardo participar da comissão é de aproximadamente 67%, qual é a probabilidade de nenhum deles participar? A probabilidade de nenhum deles participar é de aproximadamente 33%.
3. Como você calcularia a probabilidade de nem Paula nem Eduardo participarem da comissão? Como nenhum deles irá participar, a probabilidade de isso ocorrer é dada por $P = \frac{C_{8,4}}{C_{10,4}}$.

Atividades

1. Quando os eventos A e B forem mutuamente exclusivos, isto é, quando a interseção entre eles for o conjunto vazio.

4. A probabilidade é $\frac{2}{13}$. Os eventos são mutuamente exclusivos, pois a interseção deles é vazia, isto é, não há uma carta que possa ser simultaneamente dama e rei.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1. Num mesmo espaço amostral, a probabilidade de ocorrer um evento A ou um evento B pode ser calculada pela relação $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$, isto é, a probabilidade é a soma das probabilidades de ocorrer o evento A com o evento B. Em que situações isso é verdadeiro?
2. Um destes números será sorteado aleatoriamente após os cartões serem embaralhados.

Considere os eventos a seguir.
Evento A: o número sorteado é um quadrado perfeito (1, 4, 9).
Evento B: o número sorteado é um número ímpar (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15).

a) Calcule a probabilidade de ocorrer A ou B. $\frac{9}{15}$
b) Os eventos A e B são mutuamente exclusivos? Justifique. Não, pois existem elementos que pertencem aos dois conjuntos correspondentes aos eventos A e B.

3. Utilizando o mesmo espaço amostral do experimento da atividade anterior, elabore dois eventos A e B que sejam mutuamente exclusivos e calcule a probabilidade de ocorrência de A ou de B. A resposta depende dos eventos elaborados pelos estudantes.
4. Retirando-se aleatoriamente uma carta de um baralho de 52 cartas, calcule a probabilidade de ocorrer um rei ou uma dama. Depois, responda:
Os eventos "ocorrer um rei" e "ocorrer uma dama" são mutuamente exclusivos? Justifique.

Mauro Salgado

5. Junte-se a um colega para esta atividade. Façam o que se pede a seguir.

a) Elaborem dois eventos *A* e *B*, que não sejam mutuamente exclusivos, usando o sorteio de uma carta de um baralho com 52 cartas.

b) Com base nos eventos que elaboraram, formulem uma situação de probabilidade correspondente a $P(A \cup B)$.

c) Calculem a probabilidade $P(A \cup B)$.

d) Apresentem a situação elaborada a outra dupla para que a resolvam e comparem com sua resposta no final.

Resposta pessoal, depende da situação elaborada.

6. (UFPE) Escolhendo aleatoriamente um número natural no conjunto {1, 2, ..., 100} de naturais sucessivos, seja *P* a probabilidade de esse número natural ser divisível por 2 ou 3. Indique 100*P*. 67

7. (Insper-SP) Um grupo de pesquisadores estudou a relação entre a presença de um gene A em um indivíduo e a chance de esse indivíduo desenvolver uma doença X, que tem tratamento mas não apresenta cura. Os dados do estudo mostraram que 8% da população é portadora do gene A e 10% da população sofre da doença X. Além disso, 88% da população não é portadora do gene A nem sofre da doença X. De acordo com esses dados, se uma pessoa sofre da doença X, então a probabilidade de que seja portadora do gene A é igual a: Alternativa **e.**

a) 90%. **c)** 75%. **e)** 60%.

b) 80%. **d)** 66%.

8. (Uerj) Um menino vai retirar ao acaso um único cartão de um conjunto de sete cartões. Em cada um deles está escrito apenas um dia da semana, sem repetições: segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado, domingo. O menino gostaria de retirar sábado ou domingo.

A probabilidade de ocorrência de uma das preferências do menino é: Alternativa **d.**

a) $\frac{1}{49}$. **b)** $\frac{2}{49}$. **c)** $\frac{1}{7}$. **d)** $\frac{2}{7}$.

Probabilidade condicional

O que chamamos de probabilidade condicional está relacionado ao cálculo da probabilidade que envolve dois eventos, mas de modo diferente do que você estudou a respeito da probabilidade da união de eventos. No caso de dois eventos A e B, podemos calcular a probabilidade de ocorrer o evento A, sabendo que o evento B já ocorreu. Vamos investigar uma situação.

Matej Kastelic/Shutterstock.com

Passageiros acomodados em avião.

Rumo à natureza!

Um grande grupo de amigos organizou uma viagem à Amazônia. Saindo de Belo Horizonte, o avião rumou a Manaus, capital do estado do Amazonas. A ideia era conhecer de perto a beleza natural da região e observar como as pessoas vivem, conhecer seus costumes. O quadro a seguir contém algumas informações sobre os tripulantes dessa curiosa viagem!

	Pessoas que nunca tinham viajado de avião antes	Pessoas que já tinham viajado de avião
Pessoas com 50 anos ou mais	95	35
Pessoas com menos de 50 anos	30	20

Depois de iniciar a viagem, os organizadores fizeram um sorteio entre todos os presentes. O prêmio seria uma diária totalmente grátis no hotel em que se hospedariam, em Manaus.

Para pensar e discutir Essa discussão envolve uma investigação do procedimento do cálculo da probabilidade.

1. Ao anunciar o vencedor do sorteio, o responsável disse que era uma pessoa que jamais tinha viajado de avião. Qual a probabilidade de ter sido sorteada uma pessoa com menos de 50 anos? Explique como calculou.
2. E qual seria a probabilidade de ter sido sorteada uma pessoa com 50 anos ou mais, mantendo o fato de que a pessoa sorteada jamais tinha viajado de avião? Explique como calculou.

Quando foi anunciado que o vencedor do sorteio era uma pessoa que jamais tinha viajado de avião, o espaço amostral foi alterado. Assim, calculamos a probabilidade de ter sido sorteada uma pessoa com menos de 50 anos **dado que** jamais tinha viajado de avião. Isso é o que denominamos probabilidade condicional.

Sejam A e B eventos não vazios de um mesmo espaço amostral Ω finito. A probabilidade condicional do evento A, sabendo que ocorreu o evento B, indicada por $P(A|B)$, é dada por:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

1. A probabilidade é $\frac{30}{125}$. Temos aqui um primeiro evento: "Pessoas que nunca tinham viajado de avião antes". Assim, o espaço amostral diminui (das 180 pessoas, 55 são descartadas) para 125. Dessas 125, apenas 30 pessoas têm idade menor de 50 anos.

2. A probabilidade seria de $\frac{95}{125}$. A explicação é análoga à anterior.

Se você resolveu a situação sobre o sorteio entre os passageiros do avião, provavelmente não precisou utilizar a relação acima para o cálculo da probabilidade. É provável que tenha reduzido o espaço amostral e calculado a probabilidade solicitada.

Há outra maneira de calcular a probabilidade condicional: usar a relação apresentada e, com base nela, dividir pelo número de elementos do espaço amostral. Como A e B são eventos não vazios do espaço amostral Ω, temos que $n(\Omega) \neq 0$. Logo:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Observe como calcular a probabilidade do sorteio da diária do hotel em Manaus utilizando a relação acima e os dados do quadro da página anterior.

- Evento A: sortear uma pessoa que tenha menos de 50 anos.

$$n(A) = 50$$

- Evento B: sortear uma pessoa que nunca tinha viajado de avião antes.

$$n(B) = 125$$

- Evento $A \cap B$: sortear uma pessoa que tenha menos de 50 anos e nunca tinha viajado de avião.

$$n(A \cap B) = 30$$

- Cálculo da probabilidade de acontecer A dado que aconteceu B:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{30}{125} = 0{,}24 = 24\%$$

Portanto, a probabilidade é de 24%.

Vamos considerar agora um exemplo do lançamento de dois dados.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Exemplo 1

Em uma escola de idiomas há dois cursos: Inglês, com 50 estudantes, e Espanhol, com 40 estudantes. Houve um levantamento de que 10% dos estudantes que estudam Inglês estão com a mensalidade atrasada, e 20% dos que estudam Espanhol estão também com a mensalidade atrasada. O coordenador resolveu fazer um sorteio, entre todos os estudantes da escola, de uma viagem de aperfeiçoamento do idioma para um local ainda a ser escolhido. Qual é a probabilidade de o estudante sorteado cursar Inglês e estar com a mensalidade atrasada?

- Evento *A:* ser sorteado um estudante de Inglês.

$$n(A) = 50$$

- Evento *B:* ser sorteado um estudante que está com a mensalidade atrasada.

$$n(B) = \frac{10}{100} \cdot 50 + \frac{20}{100} \cdot 40$$

$$n(B) = 5 + 8 \Leftrightarrow n(B) = 13$$

- Evento $A \cap B$: ser sorteado um estudante que estude Inglês e esteja com a mensalidade atrasada.

$$n(A \cap B) = 5$$

- Cálculo da probabilidade:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{5}{13} \cong 0{,}38 = 38\%$$

Portanto, a probabilidade será de aproximadamente 38%.

Você resolveria essa situação de outra maneira? Explique! Orientações no Manual do Professor.

Para explorar

Junte-se a um colega para elaborar e calcular situações com o cálculo de probabilidade condicional.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)
	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)
	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)
	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)
	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)
	(6; 1)	(6; 2)	(6; 3)	(6; 4)	(6; 5)	(6; 6)

gomolach/Shutterstock.com

1. Observem o quadro de resultados do lançamento de dois dados, um azul e um vermelho. Cada par ordenado representa, nessa ordem, o resultado do azul e depois o resultado do vermelho.
2. Os dois dados são lançados. Sabendo-se que a soma dos dois é menor que 7, qual é a probabilidade de que em ao menos um dos dados ocorra a face 2?
3. Elaborem uma situação condicionada ao fato de que nos dois dados o resultado seja de faces pares. Em seguida, calculem a probabilidade.
4. Elaborem uma situação condicionada ao fato de que a soma dos resultados obtidos no lançamento dos dois dados seja igual 10. Depois calculem a probabilidade.
5. Elaborem uma situação estabelecendo uma condição inicial e que se deseja, com base nela, calcular a probabilidade de que a soma dos valores obtidos seja 10. Em seguida, calculem a probabilidade.
6. Elaborem uma situação estabelecendo uma condição inicial e que se deseja, com base nela, calcular a probabilidade de que em pelo menos uma das faces o resultado seja 5. Na sequência, calculem a probabilidade.

Orientações no Manual do Professor.

Atividades

1. A resposta depende do número de estudantes da turma. Se a turma tiver n estudantes, a probabilidade será $\frac{1}{(n-1)}$.

1. Um dos estudantes de sua turma foi sorteado aleatoriamente e não foi você. Logo em seguida, haverá um segundo sorteio, que escolherá outro nome. Qual é a probabilidade de você ter o nome sorteado no segundo sorteio?

2. Um almoço de confraternização reuniu pessoas da mesma família. Havia crianças, adolescentes e adultos, veja no quadro.

	Crianças	Adolescentes	Adultos
Mulheres	12	18	8
Homens	16	14	10

Uma das pessoas foi sorteada, ao acaso, para receber uma lembrança do encontro. Constatou-se que era mulher. Qual é a probabilidade de não ser uma adulta? $P = \frac{30}{78}$

3. Considere que Raul tirou uma carta de um baralho com 52 cartas. Sabendo que a carta é de paus, qual é a probabilidade de ser um número de 2 a 10? $\frac{9}{13}$

4. Numa caixa foram colocadas 3 bolas pretas e 5 bolas vermelhas; a não ser pela cor, todas são idênticas. Retira-se, sem ver a cor, consecutivamente e com reposição, 2 bolas dessa caixa. Calcule:

a) a probabilidade de ambas serem pretas; $\frac{9}{64}$

b) a probabilidade de ambas serem vermelhas; $\frac{25}{64}$

c) a probabilidade de a primeira ser preta e a segunda ser vermelha; $\frac{15}{64}$

d) a probabilidade de a primeira ser vermelha e a segunda ser preta. $\frac{15}{64}$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

5. Agora considere a mesma situação, porém sem reposição. Calcule:

a) a probabilidade de ambas serem pretas; $\frac{6}{56}$

b) a probabilidade de ambas serem vermelhas; $\frac{20}{56}$

c) a probabilidade de a primeira ser preta e a segunda ser vermelha; $\frac{15}{56}$

d) a probabilidade de a primeira ser vermelha e a segunda ser preta. $\frac{15}{56}$

6. O quadro a seguir apresenta o resultado de uma pesquisa entre 200 funcionários de uma grande indústria em uma campanha contra o fumo.

	Mulheres	Homens
Fumantes	15	35
Não fumantes	85	65

Um dos funcionários é sorteado ao acaso para uma entrevista inicial cujo objetivo é verificar seus hábitos diários.

a) Qual é a probabilidade de que seja sorteado um homem fumante? $P = \frac{35}{50}$

b) Qual a probabilidade de que seja sorteada uma mulher não fumante? $P = \frac{85}{150}$

7. (IFSP) Uma escola de Ensino Médio fez uma pesquisa para conhecer as carreiras que os alunos escolheram para prestar o vestibular. A tabela a seguir apresenta as carreiras escolhidas pelos 160 estudantes universitários.

Carreira	Masculino	Feminino
Medicina	12	20
Direito	10	16
Publicidade	12	24
Letras	6	16
Outras	20	24

Um desses estudantes é escolhido ao acaso e sabe-se que ele é do sexo masculino. A probabilidade de este estudante ter escolhido Medicina é de:

Alternativa **e.**

a) 6%.

b) 7,5%.

c) 12%.

d) 18,5%.

e) 20%.

8. A questão anterior envolve o cálculo de probabilidade condicional. Utilizando os mesmos dados apresentados, elabore outra situação que exija o cálculo de probabilidade condicional. Em seguida, resolva a situação elaborada e apresente-a a um colega para que também resolva. Assim, as respostas podem ser confrontadas. Em caso de divergência, troque ideias com ele e, se necessário, com toda a turma.

Resposta pessoal.

9. (IFPE) Numa pesquisa realizada com 300 alunos dos cursos subsequentes do campus Recife, observou-se que 1/5 dos alunos atuam no mercado de trabalho em área diferente do curso escolhido, 3/8 do restante não estão trabalhando e os demais trabalham na mesma área do curso escolhido. Sorteando um destes alunos ao acaso, qual a probabilidade de ele estar trabalhando na mesma área do curso que escolheu? Alternativa **a.**

a) 0,5

b) 0,4

c) 0,2

d) 0,3

e) 0,8

Multiplicação de probabilidades

Alamy / Fotoarena

Pierre de Fermat (1601-1665).

Christophel Fine Art/Universal Images Group/Getty Images - Castelos de Versalhes e Trianon, França

Blaise Pascal (1623-1662).

No início desta unidade, apresentamos um trecho de *A fascinante história da Matemática* sobre o contexto histórico do surgimento do estudo de probabilidades. Dois personagens com muitas contribuições em diversos ramos da história da matemática se envolveram numa discussão, Fermat e Pascal.

Retomamos a seguir parte do texto.

Para retomar

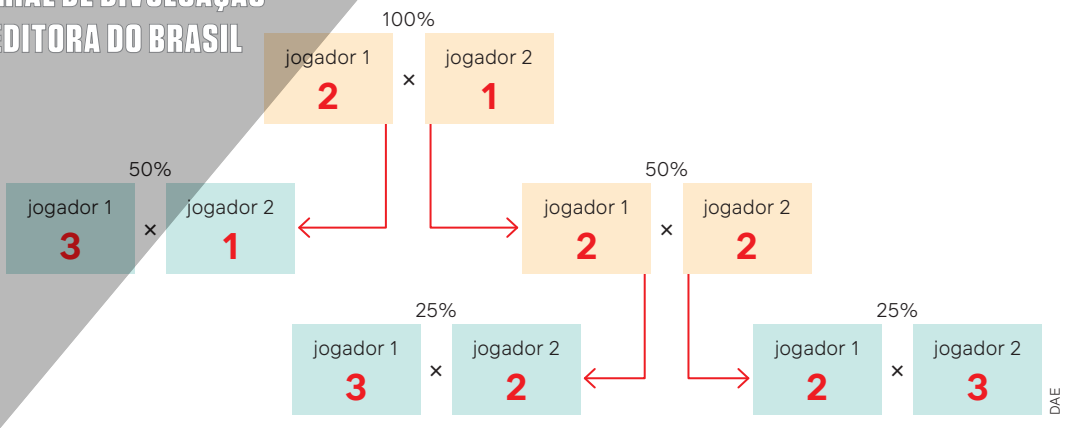
Tudo tem início em meados do século XVII, durante uma reunião da Academia Parisiense, ancestral da Academia de Ciências, fundada em 1635 pelo matemático e filósofo Marin Mersenne. Durante um debate entre cientistas de diversos horizontes, o escritor Antoine Gombaud, amante da matemática nas horas vagas, apresenta à assembleia um problema que havia encontrado. Suponham, diz ele, que dois jogadores tenham apostado uma soma em dinheiro num jogo de azar a ser dado por encerrado quando um dos jogadores vencer três vezes, mas que a partida seja interrompida quando o primeiro jogador estiver vencendo por duas rodadas a uma. Como os dois jogadores terão de dividir a aposta?

Entre os cientistas presentes nesse dia, o problema atrai particularmente a atenção de dois franceses: Pierre de Fermat e Blaise Pascal. Depois de algumas trocas epistolares, os dois acabam concluindo que três quartos da aposta devem ser atribuídos ao primeiro jogador, e o quarto restante, ao segundo.

LAUNAY, Mikaël. *A fascinante história da Matemática*. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2019. p. 203-204.

Como esses dois personagens chegaram a essa conclusão? Partindo do momento em que a partida é interrompida, o esquema a seguir ilustra de que modo eles podem ter encontrado

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL



DAE

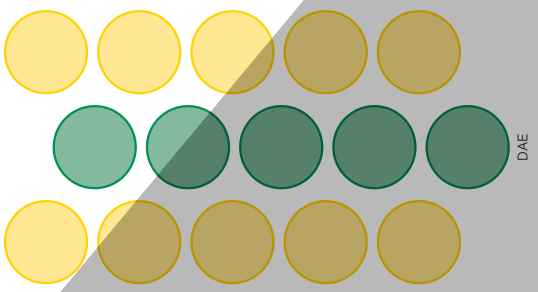
Para pensar e discutir

1. Quantas são as possibilidades, conforme o esquema, em que o jogador 1 é vencedor? De quantas possibilidades no total?
2. Pensando em probabilidade, por que se distribuiu três quartos para o jogador 1 e um quarto para o jogador 2?

1. São 2 de 3 possibilidades para o jogador 1 ser vencedor. Aqui o estudante fica tentado a dizer que a probabilidade seria de 2/3 para o jogador 1 vencer e de 1/3 para o jogador 2 vencer; nesse caso, a distribuição deveria ser dois terços para o jogador 1 e um terço para o jogador 2. Mas não é, observe a distribuição de probabilidades.

2. Os percentuais indicam que a probabilidade de o jogador 2 vencer a disputa em jogos futuros é de 25%, enquanto a probabilidade do jogador 1 é de 75%.

Existem situações envolvendo o cálculo de probabilidades em que precisamos analisar a probabilidade de ocorrerem eventos sucessivos. Em tais situações é necessário tomar cuidado se entre esses eventos há ou não alguma dependência, isto é, se os possíveis resultados de um deles têm influência sobre os possíveis resultados dos demais.


DAE

Aqui é interessante observarmos uma situação. Na ilustração ao lado temos 5 fichas verdes e 10 fichas amarelas diferentes apenas na cor. Imagine que você irá colocar essas fichas dentro de uma caixa sem que seja possível distinguir a cor.

Vamos analisar duas situações.

Situação 1:

Qual é a probabilidade de retirarmos, sucessivamente, uma ficha verde e outra amarela, considerando que há reposição de fichas (a ficha retirada volta para a caixa)?

Situação 2:

Qual é a probabilidade de retirarmos, sucessivamente, uma ficha verde e outra amarela, considerando que não há reposição de fichas (a ficha retirada não volta para a caixa)?

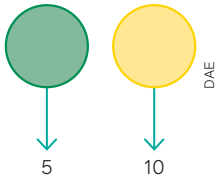
Antes de você pensar em calcular a probabilidade de cada situação apresentada, é importante compreender que "com reposição" significa que retiramos a 1ª ficha, observamos e anotamos a cor e, a seguir, repomos a ficha dentro da caixa. Já na situação "sem reposição", retiramos a 1ª ficha, observamos e anotamos a cor, mas não repomos a ficha dentro da caixa.

Para pensar e discutir

1. Em qual das duas situações a probabilidade resultante será maior? Justifique.
   1. Resposta pessoal que permite sondar se o estudante compreendeu a alteração ou não do espaço amostral quando a extração é com ou sem reposição. A probabilidade será maior na 2ª situação, pois o fato de ser "sem reposição" diminui o espaço amostral quando comparada com a 1ª situação.
2. Na 1ª situação, a probabilidade de extrair inicialmente uma ficha verde altera a probabilidade de extrair a ficha amarela depois? Justifique.
   Não, pois haverá reposição. Assim, as condições iniciais da 2ª extração da ficha são mantidas em relação às condições iniciais da 1ª extração da ficha.
3. Na 2ª situação, a probabilidade de extrair inicialmente uma ficha verde altera a probabilidade de extrair a ficha amarela depois? Justifique.
   Sim. Há uma alteração no espaço amostral diminuindo o número de fichas.

Utilizando o princípio multiplicativo que estudamos em análise combinatória, temos de calcular o número de possibilidades de extrairmos uma ficha verde na primeira retirada e uma ficha amarela na segunda retirada para as duas situações e calcular a probabilidade resultante.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL



DAE

1ª situação: com reposição

- Total de possibilidades de retirar 1 ficha verde primeiro e 1 ficha amarela depois: $5 \cdot 10 = 50$.
- Total de possibilidades para a retirada da primeira e da segunda ficha: $15 \cdot 15 = 225$.
- Probabilidade P de retirada de uma ficha verde e uma amarela sucessivamente, com a reposição da primeira ficha:

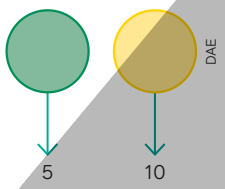
$$P = \frac{50}{210} \cong 0{,}24 = 24\% \Rightarrow P \cong 24\%$$

Observe que poderíamos chegar a esse resultado considerando que a probabilidade de obter a ficha verde na primeira retirada é $\frac{5}{15}$ e a probabilidade de sair amarela na segunda retirada é de $\frac{10}{15}$. Assim, podemos calcular a probabilidade acima da seguinte maneira:

$$P = \frac{50}{225} = \underbrace{\left(\frac{5}{15}\right) \cdot \left(\frac{10}{15}\right)}_{\text{A probabilidade de sair ficha verde na primeira retirada e amarela na segunda é igual ao produto das probabilidades de cada condição.}} \cong 0{,}22 = 22\% \Rightarrow P \cong 22\%$$

Nessa situação, as exigências feitas para as retiradas são independentes, pois a segunda retirada só é feita após a reposição da ficha extraída na primeira retirada.

2ª situação: sem reposição



- Total de possibilidades de retirar 1 ficha verde primeiro e 1 ficha amarela depois: $5 \cdot 10 = 50$.
- Total de possibilidades para a retirada da primeira e da segunda ficha: $15 \cdot 14 = 210$.
- Probabilidade P de retirada de uma ficha verde e uma amarela sucessivamente, sem a reposição da primeira ficha:

$$P = \frac{50}{210} \cong 0{,}24 = 24\% \Rightarrow P \cong 24\%$$

Observe que poderíamos chegar a esse resultado considerando que a probabilidade de tirarmos a ficha verde na primeira retirada é $\frac{5}{15}$ e a probabilidade de sair amarela na segunda retirada é de $\frac{10}{14}$ (foi diminuída 1 ficha, pois não houve reposição da primeira que foi tirada). Assim, podemos calcular a probabilidade acima da seguinte maneira:

$$P = \frac{50}{210} = \left(\frac{5}{15}\right) \cdot \left(\frac{10}{14}\right) \cong 0{,}24 = 24\% \Rightarrow P \cong 24\%$$

A probabilidade de sair ficha verde na primeira retirada e amarela na segunda é igual ao produto das probabilidades de cada condição.

Aqui é necessário que você observe e compreenda uma explicação para a multiplicação de probabilidades.

Quando A e B são eventos não vazios de um mesmo espaço amostral Ω finito, a probabilidade condicional do evento A, sabendo que ocorreu o evento B, indicada por $P(A \mid B)$, é dada por:

$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Na relação que vimos anteriormente, temos:

- $P(A|B)$, que representa a probabilidade de ocorrer A dado que ocorreu B;
- $P(A \cap B)$, que representa a probabilidade de ocorrer simultaneamente os eventos A e B;
- $P(B)$, que representa a probabilidade de ocorrer B.

Observe o que acontece quando isolamos $P(A \cap B)$:

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)}$$

A probabilidade da ocorrência simultânea dos eventos A e B (interseção) é o produto da probabilidade de ocorrer um deles, sendo que já ocorreu o outro.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Na 2ª situação da extração da ficha (sem reposição), a probabilidade de retirada da segunda ficha foi alterada pela retirada da primeira ficha. Nesse caso, dizemos que os eventos são **dependentes**.

Já na 1ª situação (com reposição), a probabilidade de retirada da segunda ficha não foi alterada pela retirada da primeira ficha. Assim, temos que os eventos são **independentes**. Nesse caso, podemos escrever:

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

A probabilidade da ocorrência simultânea dos eventos A e B (interseção) é o produto das probabilidades de ocorrer cada um deles.

Quando os eventos A e B, não vazios, de um mesmo espaço amostral são **dependentes**, a ocorrência simultânea deles é dada por:

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)}.$$

Quando os eventos A e B, não vazios, de um mesmo espaço amostral são **independentes**, a ocorrência simultânea deles é dada por:

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}.$$

Cuidado: essa última relação só é verdadeira quando os eventos *A* e *B* são independentes. Assim, ao calcular a probabilidade de eventos simultâneos, verifique se a ocorrência de um deles não interfere na ocorrência de outro.

Exemplo 1 – Encontrando a chave certa somente na última tentativa

Mauro Salgado

As três chaves são idênticas, porém somente uma delas abre a porta da casa e você não sabe qual é. Vamos calcular a probabilidade de você abrir a porta somente na 3ª tentativa.

- Para que você acerte somente na 3ª tentativa, deve ocorrer o seguinte:

  1ª tentativa (erra), 2ª tentativa (erra) e 3ª tentativa (acerta).

- Cálculo da probabilidade:

$$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{3} \Rightarrow P = \frac{1}{3}$$

Quando você tenta abrir a porta pela 1ª vez e não consegue, a chave utilizada é separada das outras. Da mesma forma, quando tenta pela 2ª vez e não consegue, essa chave também é separada, sobrando ao final apenas a chave que abrirá a porta.

Para pensar e discutir

1. Considere que você tem 5 chaves e somente uma delas abre a porta de sua casa. Qual é a probabilidade de você, aleatoriamente, escolher a chave correta na 1ª tentativa? A probabilidade é $\frac{1}{5}$.
2. Separando as chaves que não abrem a porta, qual é a probabilidade de você abrir a porta somente na 4ª tentativa? A probabilidade é $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot (1 \cdot 2) = \frac{1}{5}$.
3. Uma mesma moeda é lançada três vezes consecutivamente para se observar o resultado da face voltada para cima. Qual é a probabilidade de resultar 3 coroas consecutivamente? Explique como calculou. $\frac{1}{8}$

Exemplo 2 – A cor dos olhos!

Vamos considerar que a cor dos olhos seja estabelecida por pares de genes, em que C seja dominante para o olho escuro e c recessivo para olho claro. Um homem que tem olhos escuros e mãe de olhos claros, casou-se com uma mulher de olhos claros cujo pai tem olhos escuros. Qual é a probabilidade de nascer uma menina de olhos claros?

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

M \ H	C	c
c	Cc	cc
c	Cc	cc

- Inicialmente, observe que os pares de genes do homem são C (dominante) e c (recessivo), pois ele tem olhos escuros, mas sua mãe tem olhos claros. A mulher é cc, pois tem olhos claros. Nessas situações é interessante organizar as informações em um quadro.

  Interpretando esse quadro, temos:

- probabilidade de nascer com olhos claros: $\frac{2}{4} = 50\%$;
- probabilidade de nascer menina: $\frac{1}{2} = 50\%$;
- cálculo da probabilidade de nascer menina e de olhos claros:

$$P = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\% \Rightarrow P = 25\%$$

Portanto, a probabilidade é de 25%.

Esse exemplo relacionou genética com probabilidade. E pensar que tudo teve início com pesquisas com ervilhas! O texto a seguir apresenta essa história. Leia-o para ficar por dentro.

A hipótese estatística na ciência natural

Time Life Pictures/Mansell/
The LIFE Picture Collection/Getty Images

Gregor Johann
Mendel
(1822-1884).

De três maneiras distintas se emprega a teoria matemática da probabilidade. A primeira e, indubitavelmente, a mais fecunda de todas, é a construção da hipótese estatística na ciência natural. Como podemos usar a teoria matemática como um modelo do que acontece nos jogos de azar, podemos usar o que acontece nos jogos de azar como modelo físico dos fenômenos naturais. Se a experiência corrobora as conclusões extraídas destas premissas, podemos usar a hipótese como guia de conduta. Eis o princípio subjacente a duas das mais férteis hipóteses científicas concretizadas em meados do século XIX. Uma, a teoria cinética dos gases. A outra, a moderna teoria dos genes. Aquela repousa, em sua essência, o fato experimental de os gases se combinarem para formar novas entidades químicas, em proporções numéricas constantes. Isso levou à conclusão de que os gases são constituídos de pequeninas unidades (moléculas), que em número aproximadamente igual se apresentam em iguais volumes de qualquer gás, sujeitos à igual pressão e à mesma temperatura. A origem da teoria do gene foi a descoberta de Mendel que híbridos de pais puro-sangue, pertencentes a diferentes variedades ou tipos, produzem diferentes tipos de filhos, em proporção numérica definida. Isto levou à conclusão de que a constituição hereditária de um indivíduo depende de pequeninas partículas (genes) análogas à molécula dos gases. Na teoria cinética supomos que a velocidade das diferentes moléculas varie da mesma maneira, isto é, como uma distribuição binômia. Na teoria dos genes supomos que a fecundação de uma certa célula-ovo feminina, por uma certa célula-esperma masculina, aconteça com a mesma frequência que, como se mais não fora, a retirada de bolas coloridas de uma sacola.

O emprego da probabilidade matemática na teoria dos genes, ilustrá-lo-emos por uma das experiências originais de Mendel. Mendel fez o cruzamento de variedades puras de ervilhas, uma de sementes amarelas, a outra de sementes verdes. Os híbridos tiveram sementes amarelas e foram fecundadas com o próprio pólen: um quarto dos descendentes saíram de sementes verdes, e também os descendentes. O restante saiu de sementes amarelas. Um terço deste restante, isto é, um quarto de toda a descendência, procriaram exatamente como seus pais de semente amarela. Os outros, fecundados, produziram descendentes de sementes amarelas e verdes, na mesma proporção que seus pais (3 para 1). Vê-se pois que o cruzamento de raças puras se assemelha a uma reação química nas duas características essenciais que levaram a ciência a formular a teoria atômica da combinação química. A primeira, é que é possível tornar a obter, em sua pureza original, as características dos pais originais dos híbridos. A segunda é que as várias combinações de caracteres hereditários ocorrem em proporções numéricas constantes.

Mauro Salgado

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

HOGBEN, Lancelot. *Maravilhas da Matemática*: influência e função matemática nos conhecimentos humanos. Porto Alegre: Editora Globo, 1958. p. 674-675.

Agora que você leu o texto, sugerimos usá-lo como motivador em uma atividade de investigação relacionando Biologia e Matemática.

Para explorar

Junte-se a três colegas para fazer esta atividade.

1. Pesquisem detalhadamente o experimento das ervilhas de Mendel e produzam uma animação em vídeo descrevendo o experimento. Depois façam uma apresentação para toda a turma.
2. Pesquisem três exemplos relacionando Biologia e probabilidade, como indicado a seguir.
   - 1º exemplo: cor dos olhos
   - 2º exemplo: miopia
   - 3º exemplo: doença hereditária
3. Com base nos exemplos pesquisados, escrevam um texto sobre a relação observada entre cada exemplo e as probabilidades.

Atividades

1. Uma prova tem 5 questões de múltipla escolha, cada questão tem 4 alternativas com apenas uma alternativa correta. Um estudante "chutou" todas as respostas. Calcule:

a) a probabilidade de ele acertar apenas a 1ª questão; $\frac{1}{4}$

b) a probabilidade de ele acertar todas as questões; $\frac{1}{1024}$

c) a probabilidade de ele errar todas as questões; $\frac{1023}{1024}$

d) a probabilidade de ele acertar as 3 primeiras e errar as 2 últimas. $\frac{9}{1024}$

2. Junte-se a um colega para resolver a situação a seguir. Três corredores A, B e C participam de uma maratona somente entre eles. Estima-se que a probabilidade de A vencer é o dobro da probabilidade de B vencer; e que a probabilidade de B vencer é o triplo da de C vencer. Qual é a probabilidade de cada um deles vencer? $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{3}{10}$ e $P(C) = \frac{1}{10}$.

3. Na situação anterior, os experimentos "A vencer", "B vencer" e "C vencer" não são equiprováveis. Ainda considerando a situação apresentada no item 2, elabore outra alterando as estimativas de cada um deles vencer. Depois resolva a situação e apresente-a a outro colega para que também resolva. Assim, pode-se confrontar as respostas obtidas e, se necessário, discutir possíveis discrepâncias.

Resposta pessoal.

4. (Unesp) Um piloto de Fórmula 1 estima que suas "chances" de subir ao pódio numa dada prova são de 60% se chover no dia da prova e de 20% se não chover. O serviço de meteorologia prevê que a probabilidade de chover no dia da prova é de 75%. Nessas condições, calcule a probabilidade de que o piloto venha a subir no pódio. 50%

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

5. (Enem) Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região. Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva? Alternativa **c**.

a) 0,075

b) 0,150

c) 0,325

d) 0,600

e) 0,800

6. A herança de determinado tipo de miopia é autossômica (não relacionada aos cromossomos sexuais X e Y) e recessiva. O quadro abaixo representa o cruzamento entre dois indivíduos de visão normal, heterozigotos para esse tipo de miopia. Lembre-se de que, em relação ao sexo biológico, em todo cruzamento humano há 50% de chance de nascer uma criança do sexo feminino, e 50%, do sexo masculino.

DAE	M	m
M	MM	Mm
m	Mm	mm

a) $\frac{1}{4}$ ou 25% (mm)

a) Qual é a probabilidade de nascer uma criança com esse tipo de miopia? **b)** $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ ou 12.5%

b) Qual é a probabilidade de nascer uma criança do sexo masculino com esse tipo de miopia?

7. (UPE) Dois atiradores, André e Bruno, disparam simultaneamente sobre um alvo.

- A probabilidade de André acertar no alvo é de 80%.
- A probabilidade de Bruno acertar no alvo é de 60%.

Se os eventos "André acerta no alvo" e "Bruno acerta no alvo" são independentes, qual é a probabilidade de o alvo não ser atingido? Alternativa **a**.

a) 8%

b) 16%

c) 18%

d) 30%

e) 92%

8. (FGV-SP) Num certo país, 10% das declarações de Imposto de Renda são suspeitas e submetidas a uma análise detalhada; entre estas verificou-se que 20% são fraudulentas. Entre as não suspeitas, 2% são fraudulentas.

a) Se uma declaração é escolhida ao acaso, qual é a probabilidade de ela ser suspeita e fraudulenta? 2%

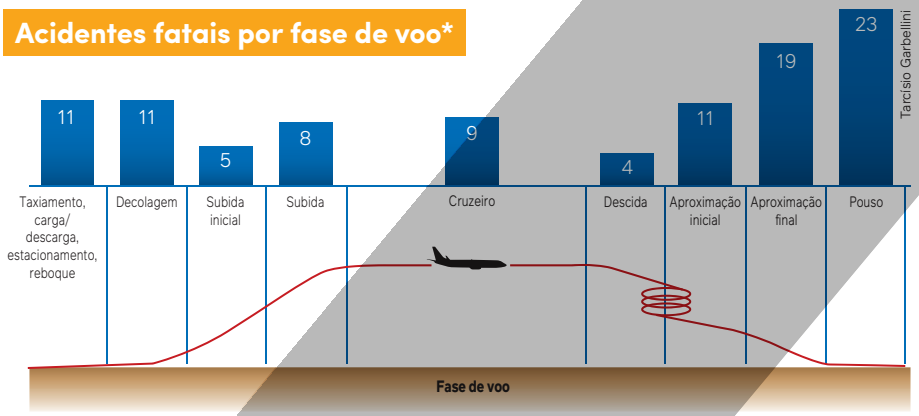
b) Se uma declaração é fraudulenta, qual é a probabilidade de ela ter sido suspeita? 52,6% aproximadamente

2 Probabilidades e Estatística

Com base em dados estatísticos sobre fatos ocorridos ou sobre fenômenos naturais, usa-se a probabilidade para fornecer informações sobre algo que pode acontecer pela análise dos dados. Lembre-se de que, ao iniciar esta unidade, fizemos uma pergunta sobre a probabilidade de ocorrer um acidente de avião ou um acidente de ônibus. Como muitos mais ônibus circulam nas ruas do que aviões no ar, não é necessária muita investigação para se concluir que haverá mais acidentes de ônibus do que de avião se considerarmos viagens de São Paulo ao Rio de Janeiro, por exemplo.

Voltando aos dados estatísticos usados pela probabilidade para análise e informação, observe o gráfico a seguir extraído de uma pesquisa.

Acidentes fatais por fase de voo*



*Os percentuais somam mais de 100% por causa dos arredondamentos.

Fonte: elaborada com base em: ACIDENTES fatais por fase de voo. *Folha de S.Paulo*, São Paulo, mar. 2014. Disponível em: https://www1.folha.uol.com.br/infograficos/2014/03/82254-acidentes-fatais-por-fase-de-voo.shtml. Acesso em: 17 ago. 2020.

Para pensar e discutir

1. É correto afirmar, com base nas informações do gráfico, que antes da fase cruzeiro e depois da fase cruzeiro os percentuais de acidentes são aproximadamente iguais?

   Não é correto, pois, antes da fase cruzeiro temos 35% dos acidentes (11% + 11% + 5% + 8%) enquanto depois da fase cruzeiro o percentual é de 55% (4% + 11% + 19% + 23%).

2. Qual informação [illegible] nesse gráfico? Explique. Resposta pessoal.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

É claro que esse levantamento evidencia dados de acidentes que já ocorreram, o que não significa que irão se repetir com o passar do tempo. Entretanto, com base nessas informações, uma companhia aérea pode, por exemplo, investigar os motivos da maior ocorrência de acidentes num determinado período do voo em comparação com outro período. Com base nessas investigações a empresa pode tomar providências para diminuir os acidentes. Apesar de o avião passar mais tempo na etapa cruzeiro, a maioria dos acidentes ocorrem no início, até a decolagem, e principalmente nas etapas finais, da descida até o pouso.

Vamos usar um exemplo de dados fictícios que o ajudará a entender a importância do cálculo de probabilidade em situações diversas.

Exemplo

(UFMT) Uma indústria farmacêutica fez uma estimativa da eficiência de um medicamento para tratamento de determinada doença, ministrando-o a um grande número de pessoas portadoras dessa doença. Os resultados obtidos, classificados em três categorias: cura, melhora (mas não cura total) e nenhuma alteração, são mostrados na tabela ao lado.

Resultado	%	Probabilidade
Cura	70	0,7
Melhora	20	0,2
Nenhuma alteração	10	0,1

Considere a experiência aleatória que consiste em selecionar 4 pessoas portadoras da doença, ministrar-lhes o medicamento e determinar em que categoria o resultado se enquadra. Sendo P a probabilidade de a 1ª pessoa apresentar melhora, a 2ª e a 3ª não terem qualquer alteração e a 4ª ser curada, calcule $P \cdot 10^4$.

Para pensar e discutir

Embora a situação seja hipotética, responda às questões.

1. Como são obtidas informações a respeito da eficácia de um remédio ministrado para o tratamento de uma doença?
Pela ministração do remédio em um grande número de pessoas que são portadoras da doença. É claro que isso é feito com todos os protocolos necessários e devidamente regulados pelos órgãos competentes.
2. Qual é a probabilidade resultante da situação apresentada?
$P = 0{,}0014 = 0{,}14\%$. Note que a pergunta solicita esse valor multiplicado por 10 000. Então a resposta é 14.

Atividades

As atividades a seguir apresentam situações diversas envolvendo o cálculo de probabilidades usando informações estatísticas dadas em tabelas ou gráficos. Sugerimos que sejam resolvidas em duplas.

1. A probabilidade de a pessoa ser afetada pela doença é 0,125% e de a pessoa não ser afetada pela doença é 99,875%.

1. Observou-se estatisticamente que uma doença congênita afeta 1 em cada 800 pessoas de determinado país. Nesse país, em uma população de 1 milhão de pessoas, escolhemos aleatoriamente uma pessoa. Analise cada afirmação a seguir indicando **V** se for verdadeira ou **F** se for falsa.

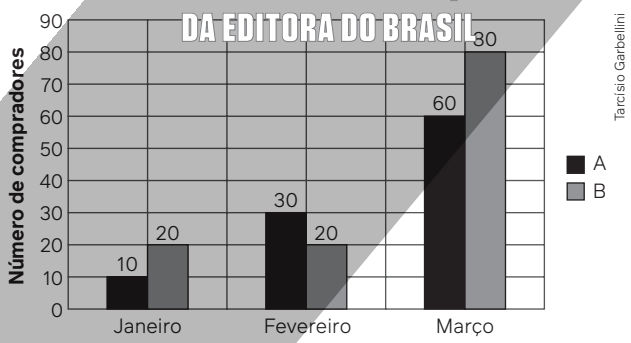
F ( ) A probabilidade de que a pessoa escolhida seja afetada pela doença é de aproximadamente 99%.

V ( ) A probabilidade de que a pessoa escolhida não seja afetada pela doença é de 99,875%.

V ( ) É pouco provável que essa pessoa seja afetada pela doença.

2. (Enem) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL



Tarcísio Garbellini

Alternativa **a.**

A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

a) $\frac{1}{20}$ **c)** $\frac{5}{22}$ **e)** $\frac{7}{15}$

b) $\frac{3}{242}$ **d)** $\frac{6}{25}$

3. Junte-se a um colega para fazer esta atividade.

a) Pesquisem uma informação publicada em jornal ou revista que contenha dados em gráficos estatísticos.

b) Usando essas informações, elaborem uma situação relacionada ao cálculo de probabilidade.

c) Resolvam a situação e apresentem-na a outra dupla de estudantes para que resolvam. Depois confrontem os resultados obtidos. Resposta pessoal.

4. (IFSP) O sangue humano é classificado em quatro tipos: A, B, AB e O. Além disso, também pode ser classificado pelo fator Rh em: Rh^+ ou Rh^-. As pessoas do tipo O com Rh^- são consideradas doadoras universais, e as do tipo AB com Rh^+ são receptoras universais. Feita uma pesquisa sobre o tipo sanguíneo com 200 funcionários de uma clínica de estética, o resultado foi exposto na tabela a seguir.

	A	B	AB	O
Rh^+	27	24	23	55
Rh^-	15	13	13	30

Um desses 200 funcionários será sorteado para um tratamento de pele gratuito. A probabilidade de que o sorteado seja doador universal é: Alternativa **c**.

a) 7,5%.

b) 10%.

c) 15%.

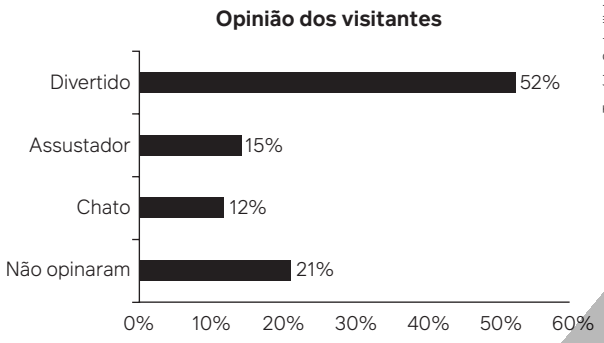
d) 17,5%.

e) 20%.

5. (Enem) Em um *blog* de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados "Contos de Halloween". Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em "divertido",

"assustador" ou "chato". Ao final de uma semana, o *blog* registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem. O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.

Contos de Halloween



Tarcísio Garbellini

O administrador do *blog* irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem "Contos de Halloween". Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que "Contos de Halloween" é "chato" é mais aproximada por: Alternativa **d**.

a) 0,09.

b) 0,12.

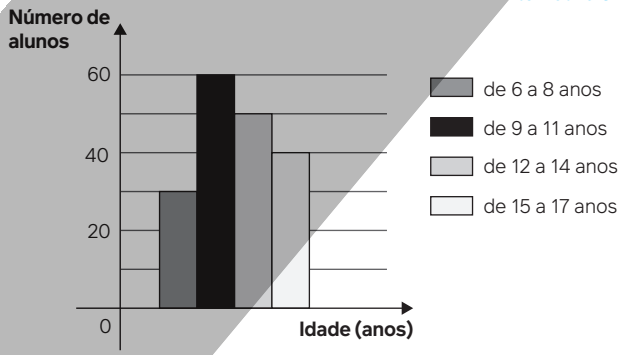
c) 0,14.

d) 0,15.

e) 0,18.

6. (IFSP) O gráfico representa o número de alunos de uma escola distribuídos por idade. Sabe-se que os alunos com exatamente 15 anos correspondem à quinta parte do total de alunos dessa escola. Se um aluno dessa escola é escolhido ao acaso, a probabilidade de esse aluno ter exatamente 15 anos é: Alternativa **e.**

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL



Tarcísio Garbellini

a) $\frac{2}{5}$

b) $\frac{4}{15}$.

c) $\frac{2}{9}$

d) $\frac{9}{50}$.

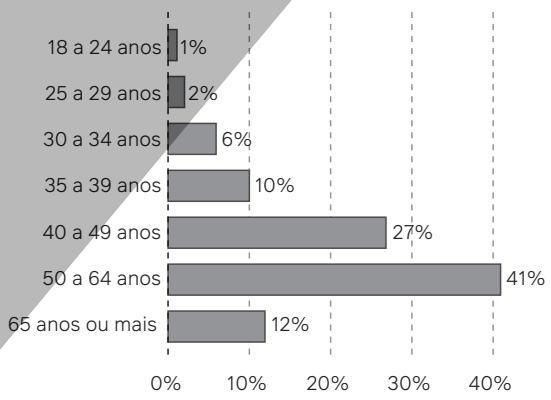
e) $\frac{2}{45}$.

7. (UFRJ) Um novo exame para detectar certa doença foi testado em trezentas pessoas, sendo duzentas sadias e cem portadoras de tal doença. Após o teste verificou-se que, dos laudos referentes a pessoas sadias, cento e setenta resultaram negativos e, dos laudos referentes a pessoas portadoras da doença, noventa resultaram positivos.

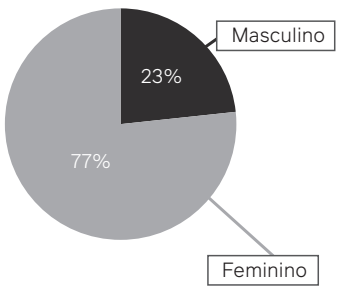
a) Sorteando-se ao acaso um desses trezentos laudos, calcule a probabilidade de que ele seja positivo. $\frac{2}{5}$

b) Sorteado um dos trezentos laudos, verificou-se que ele era positivo. Determine a probabilidade de que a pessoa correspondente ao laudo sorteado tenha realmente a doença. $\frac{3}{4}$

8. (Fatec-SP) O artesão brasileiro é um agente de produção nas áreas cultural e econômica do país, gerando empregos e contribuindo para a identidade regional. Observe os gráficos e admita distribuição homogênea de dados.



Tarcísio Garbellini



Fonte de dados: https://tinyurl.com/ycgl2ljx. Acesso em: 09/10/2018. Adaptado.

Suponha que uma viagem será sorteada entre todos os artesãos brasileiros, a probabilidade de que o ganhador da viagem seja uma mulher de 65 anos ou mais é de: Alternativa **d**.

a) 31,57%.

b) 20,79%.

c) 12,43%.

d) 9,24%.

e) 4,85%.

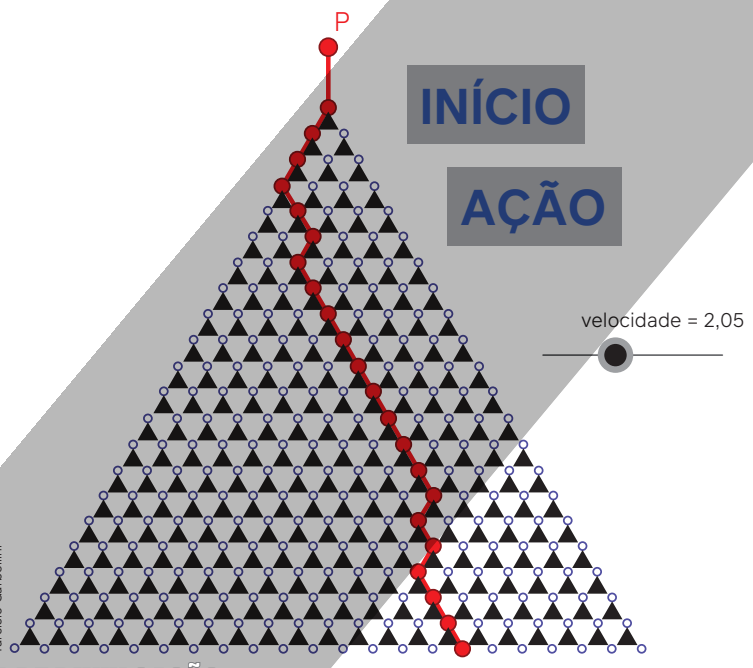
Obtenção de uma curva

Na Estatística, há um interesse em como os dados se distribuem em relação às medidas de tendência central.

Ao iniciar esta unidade, abordamos um experimento relacionado a uma distribuição: o tabuleiro de Galton. Vamos retomar essa ideia para relacionar o estudo de probabilidade com uma curva de distribuição chamada curva normal.

Primeiro, você vai visitar uma página na internet que lhe possibilita acompanhar como ocorre a distribuição: https://www.geogebra.org/m/zfnMZw7T (acesso em: 10 ago. 2020). Nela, você encontrará um simulador como o ilustrado a seguir.

Máquina de Galton



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

x_i	f_i
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0
12	0
13	0
14	0
15	0
16	0
17	0
18	0
19	0
20	0
21	0
Total	0

Fonte: MÁQUINA de Galton virtual. *In*: GEOGEBRA. [*S.l.*], [20–?]. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/zfnMZw7T. Acesso em: 2 jul. 2020.

Acione o simulador clicando em "início". Regule a velocidade e acompanhe a distribuição das "bolinhas" conforme o histograma que irá aparecer um pouco abaixo da forma triangular. Note que, ao lado da ilustração, há duas indicações de valores (x_i e f_i). O x_i indica a posição na horizontal, e o f_i a frequência na vertical.

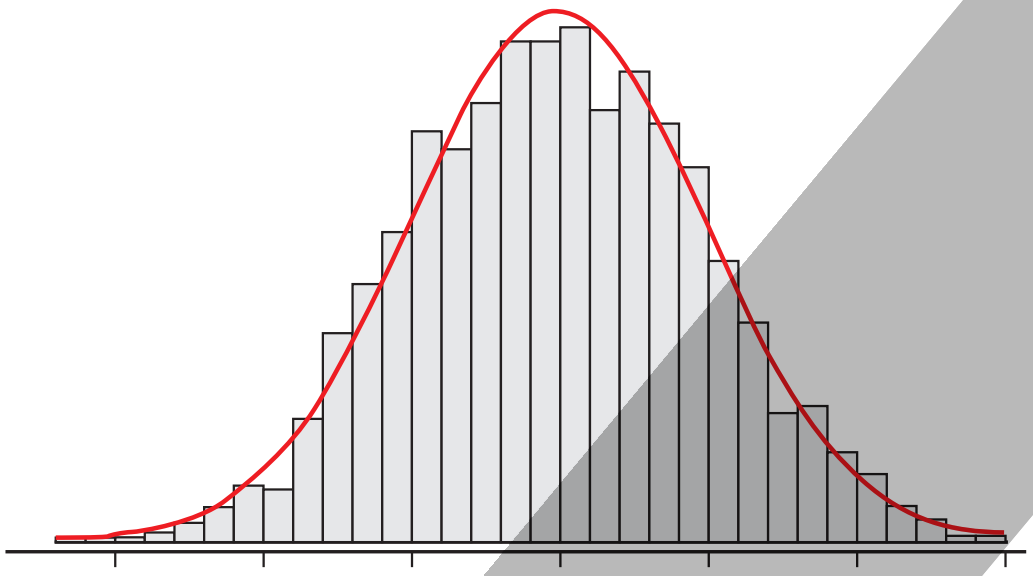
Quando chegar à indicação do total de frequência 10 000, pare o simulador.

2. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes informem que são maiores nas posições centrais x9, x10, x11 e x12.

Para pensar e discutir

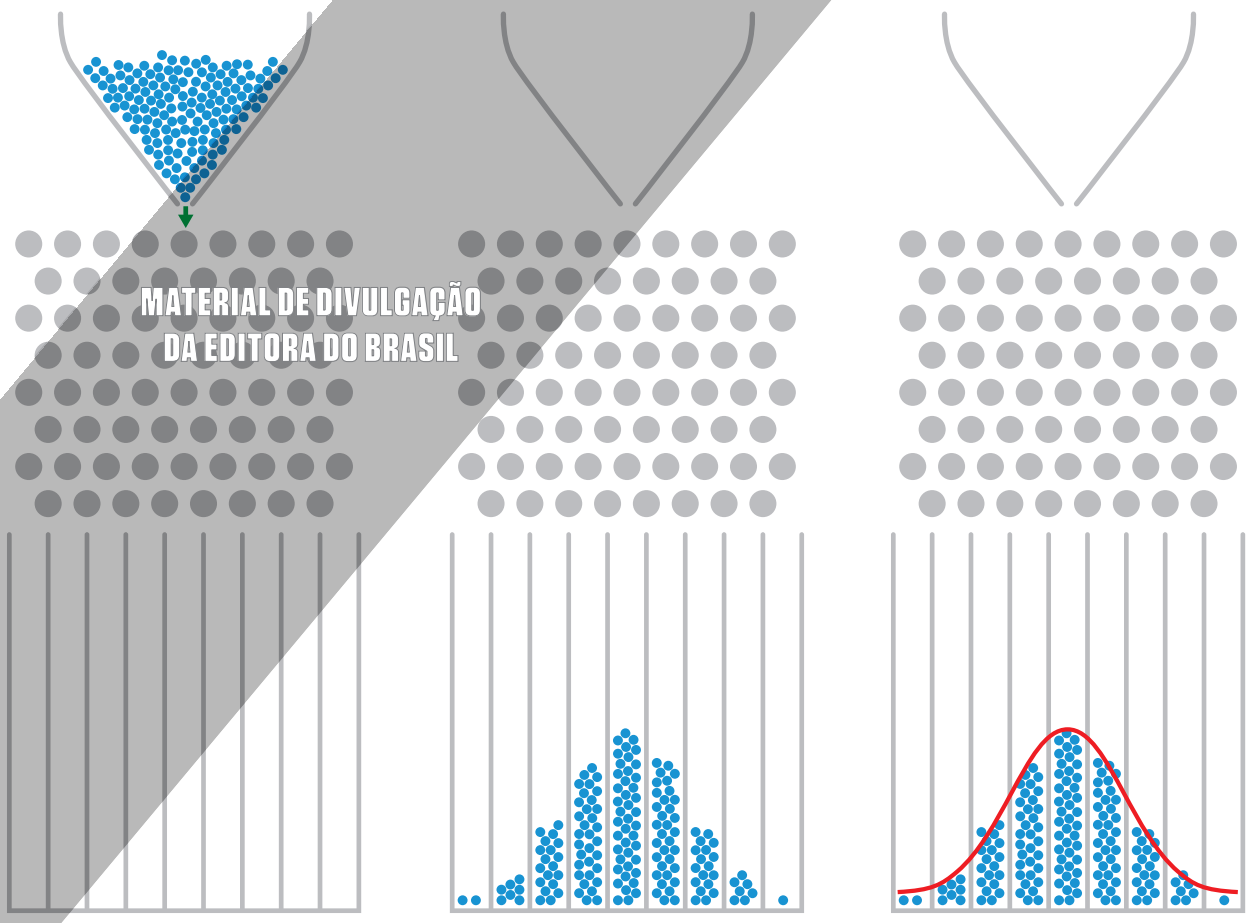
1. Como se deu a distribuição das frequências? Explique. Resposta pessoal.
2. Em quais posições as frequências são maiores?
3. Em relação ao conjunto de valores de x, de 1 até 21, qual medida estatística representa a posição x que teve maior frequência? É a mediana dos valores de x.

Na Unidade 1 deste volume, você observou, ao estudar as medidas de tendência central, uma curva denominada curva normal de distribuição, isto é:



Tarcísio Garbellini

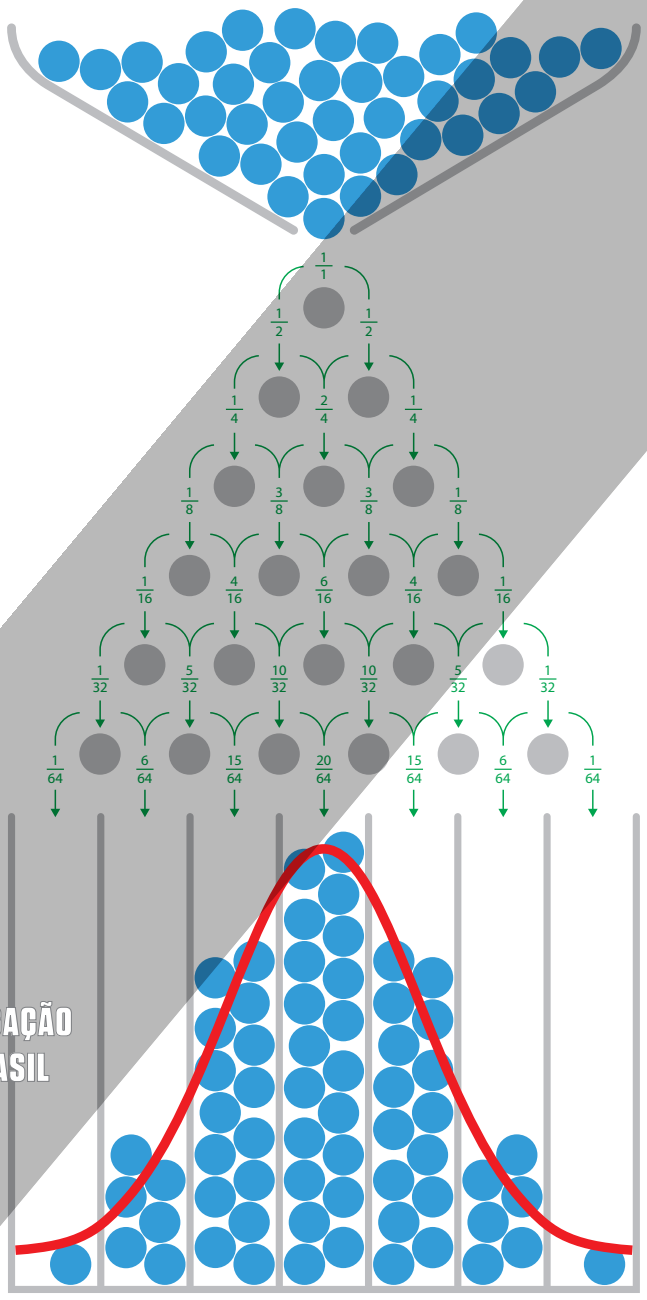
Ora, utilizando a ideia de Galton, podemos chegar a essa mesma curva de distribuição. Analise as representações a seguir.



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Reinaldo Vignati

E tudo isso pode ser observado pelo cálculo de probabilidade. No esquema abaixo, observe, em cada passagem, a probabilidade de uma bolinha seguir o caminho indicado quando consideramos apenas 7 tubos no final:



Peter Hermes Furian/Shutterstock.com

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

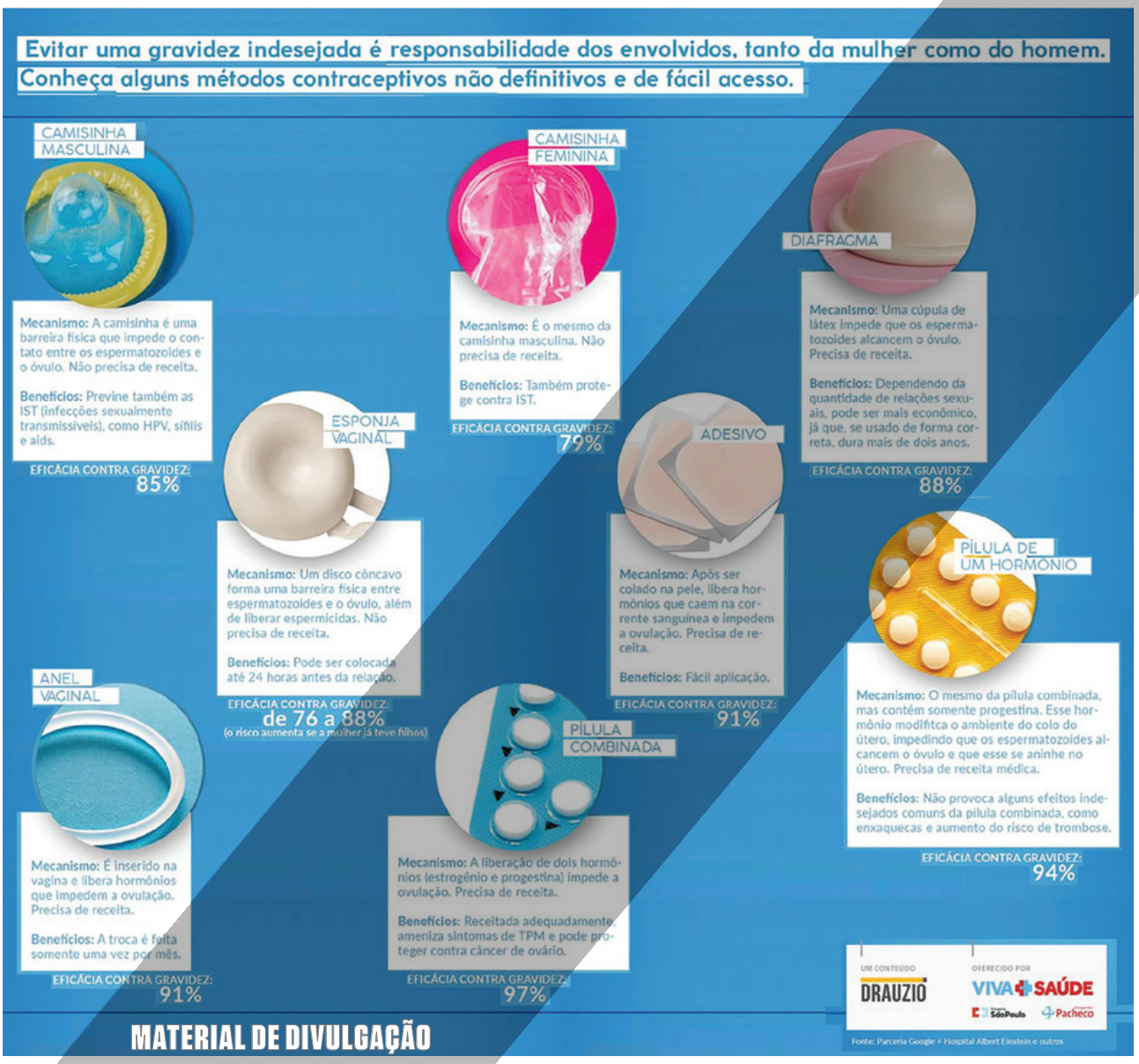
Para pensar e discutir

1. De acordo com o esquema acima, quais as probabilidades (em porcentagem) da distribuição das bolinhas nos tubos, da esquerda para a direita?
2. Essa distribuição é simétrica em relação ao tubo central? Justifique.

Não é nosso interesse aqui estudar a curva normal de distribuição. A ideia é você conhecer um pouco mais a relação entre Estatística e probabilidade. Apenas por curiosidade, a curva normal está baseada em dois parâmetros: a média e o desvio padrão.

1. Da esquerda para a direita: 1,5625%, 9,375%, 23,4375%, 31,25%, 23,4375%, 9,375%, 1,5625%.

2. Sim, pois temos probabilidades iguais em tubos posicionados simetricamente em relação ao tubo central.



Site Drauzio Varella

Fonte: NISTAL, Arthur. Principais métodos anticoncepcionais de fácil acesso. *In*: DRAUZIO. São Paulo, [2014-2015]. Disponível em: https://drauziovarella.uol.com.br/.infograficos/principais-metodos-anticoncepcionais-de-facil-acesso-infografico/#imageclose-51408. Acesso em: 30 jun. 2020.

Todos temos responsabilidades sobre nossos atos e possíveis consequências. Porém, quanto mais conhecimentos adquirimos, maior a probabilidade de tomarmos decisões acertadas. Em relação aos métodos contraceptivos mostrados anteriormente, uma informação fica muito clara: nenhum deles é 100% seguro. Outra reflexão fundamental é que, por menor que seja a probabilidade de engravidar empregando um método contraceptivo, ela aumenta consideravelmente com o uso incorreto ou imprudente.

Para explorar

Junte-se a três colegas para fazer a atividade a seguir.

1. Retomem o infográfico e analisem os métodos contraceptivos apresentados observando estatisticamente a probabilidade de ser seguro no sentido de evitar uma gravidez.
2. Escrevam um texto com base nos dados do infográfico. Avaliem a questão dos possíveis problemas a serem enfrentados numa relação sexual sem os devidos cuidados e a possibilidade de ter um filho sem planejamento.

Orientações no Manual do Professor.

Atividades finais

1. i) Quando a realização de um deles não interfere na realização do outro.

1. Sobre o assunto estudado nesta unidade, responda às questões.

a) Se lançamos uma moeda 2 vezes consecutivamente e nos dois resultados der cara, qual é a probabilidade de no próximo lançamento resultar novamente cara? $\frac{1}{2}$

b) O que é um experimento aleatório?
Todo experimento cujo resultado depende exclusivamente do acaso.

c) O que significa, num experimento aleatório, o espaço amostral? Representa o conjunto formado por todos os resultados possíveis.

d) O que significa, num experimento aleatório, um evento? Representa o conjunto formado por todos os resultados favoráveis para a realização desse evento.

e) O que é probabilidade zero de um evento num espaço amostral? Significa um evento impossível de ocorrer.

f) O que é probabilidade 1 de um evento num espaço amostral? Significa um evento certo.

g) Se a probabilidade de um evento ocorrer é 2,8%, qual é a probabilidade de ele não ocorrer? 97,2%

h) Quando dois eventos são mutuamente exclusivos?
Quando a interseção entre eles é vazio.

i) Quando dois eventos são independentes?

j) Como calcular a probabilidade da união dos eventos A e B de um mesmo espaço amostral?
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2. (Enem) Em um determinado ano, os computadores da receita federal de um país identificaram como inconsistentes 20% das declarações de imposto de renda que lhe foram encaminhadas. Uma declaração é classificada como inconsistente quando apresenta algum tipo de erro ou conflito nas informações prestadas. Essas declarações consideradas inconsistentes foram analisadas pelos auditores, que concluíram que 25% delas eram fraudulentas. Constatou-se ainda que, dentre as declarações que não apresentaram inconsistências, 6,25% eram fraudulentas.

Qual é a probabilidade de, nesse ano, a declaração de um contribuinte ser considerada inconsistente, dado que ela era fraudulenta? Alternativa **e**.

a) 0,0500
b) 0,1000
c) 0,1125
d) 0,3125
e) 0,5000

3. (Enem) Para ganhar um prêmio, uma pessoa deverá retirar, sucessivamente e sem reposição, duas bolas pretas de uma mesma urna. Inicialmente, as quantidade e cores das bolas são como descritas a seguir.

- Urna A – Possui três bolas brancas, duas bolas pretas e uma bola verde.
- Urna B – Possui seis bolas brancas, três bolas pretas e uma bola verde.
- Urna C – Possui duas bolas pretas e duas bolas verdes.
- Urna D – Possui três bolas brancas e três bolas pretas.

A pessoa deve escolher uma entre as cinco opções apresentadas.

- Opção 1: Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A.
- Opção 2: Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna B.
- Opção 3: Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna A; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A.
- Opção 4: Passar, aleatoriamente, uma bola da urna D para a urna C; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna C.
- Opção 5: Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna D; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna D.

Com o objetivo de obter a maior probabilidade possível de ganhar o prêmio, a pessoa deve escolher a opção: Alternativa **e.**

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

4. (Enem) Um rapaz estuda em uma escola que fica longe de sua casa, e por isso precisa utilizar o transporte público. Como é muito observador, todos os dias ele anota a hora exata (sem considerar os segundos) em que o ônibus passa pelo ponto de espera. Também notou que nunca consegue chegar ao ponto de ônibus antes de 6h15min da manhã. Analisando os dados coletados durante o mês de fevereiro, o qual teve 21 dias letivos, ele concluiu que 6h21min foi o que mais se repetiu, e que a mediana do conjunto de dados é 6h22min.

A probabilidade de que, em algum dos dias letivos de fevereiro, esse rapaz tenha apanhado o ônibus antes de 6h21min da manhã é, no máximo:
Alternativa **d.**

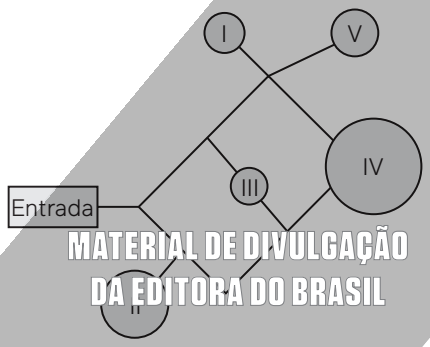
a) $\frac{4}{21}$.
b) $\frac{5}{21}$.
c) $\frac{6}{21}$.
d) $\frac{7}{21}$.
e) $\frac{8}{21}$.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

5. (Enem) O gerente do setor de recursos humanos de uma empresa está organizando uma avaliação em que uma das etapas é um jogo de perguntas e respostas. Para essa etapa, ele classificou as perguntas, pelo nível de dificuldade, em fácil, médio e difícil, e escreveu cada pergunta em cartões para colocação em uma urna. Contudo, após depositar vinte perguntas de diferentes níveis na urna, ele observou que 25% deles eram de nível fácil. Querendo que as perguntas de nível fácil sejam a maioria, o gerente decidiu acrescentar mais perguntas de nível fácil à urna, de modo que a probabilidade de o primeiro participante retirar, aleatoriamente, uma pergunta de nível fácil seja de 75%.
Com essas informações, a quantidade de perguntas de nível fácil que o gerente deve acrescentar à urna é igual a: Alternativa **d**.

a) 10. **b)** 15. **c)** 35. **d)** 40. **e)** 45.

6. (Enem) Um adolescente vai a um parque de diversões tendo, prioritariamente, o desejo de ir a um brinquedo que se encontra na área IV, dentre as áreas I, II, III, IV e V existentes. O esquema ilustra o mapa do parque, com a localização da entrada, das cinco áreas com os brinquedos disponíveis e dos possíveis caminhos para se chegar a cada área. O adolescente não tem conhecimento do mapa do parque e decide ir caminhando da entrada até chegar à área IV.



Tarcísio Garbellini

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Suponha que relativamente a cada ramificação, as opções existentes de percurso pelos caminhos apresentem iguais probabilidades de escolha, que a caminhada foi feita escolhendo ao acaso os caminhos existentes e que, ao tomar um caminho que chegue a uma área distinta da IV, o adolescente necessariamente passa por ela ou retorna. Nessas condições, a probabilidade de ele chegar à área IV sem passar por outras áreas e sem retomar é igual a:

a) $\frac{1}{96}$. **c)** $\frac{5}{24}$. **e)** $\frac{5}{12}$.
Alternativa **c**.

b) $\frac{1}{64}$. **d)** $\frac{1}{4}$.

7. (Enem) Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em uma sala, serem chamados para uma entrevista. Mas, em vez de chamá-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos:
A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é:

a) 23,7%. **c)** 44,1%. **e)** 90,0%.
Alternativa **d**.

b) 30,0%. **d)** 65,7%.

8. (Enem) Uma competição esportiva envolveu 20 equipes com 10 atletas cada. Uma denúncia à organização dizia que um dos atletas havia utilizado substância proibida. Os organizadores, então, decidiram fazer um exame antidoping. Foram propostos três modos diferentes para escolher os atletas que irão realizá-lo:
Modo I: sortear três atletas dentre todos os participantes;
Modo II: sortear primeiro uma das equipes e, desta, sortear três atletas;
Modo III: sortear primeiro três equipes e então sortear um atleta de cada uma dessas três equipes.
Considere que todos os atletas têm igual probabilidade de serem sorteados e que $P(I)$, $P(II)$ e $P(III)$ sejam as probabilidades de o atleta que utilizou a substância proibida seja um dos escolhidos para o exame no caso de o sorteio ser feito pelo modo I, II ou III.
Comparando-se essas probabilidades, obtém-se:

a) $P(I) < P(II) < P(III)$. **d)** $P(I) = P(II) < P(III)$.

b) $P(II) < P(I) < P(III)$. **e)** $P(I) = P(II) = P(III)$.

c) $P(I) < P(II) = P(III)$.
Alternativa **e**.

9. (Enem) O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser verdadeiro ou falso e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é 0,20.
A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é: Alternativa **b**.

a) 0,02048. **d)** 0,40960.

b) 0,08192. **e)** 0,49152.

c) 0,24000.

10. (IFPE) Numa urna, foram colocados cinco cartões numerados de 1 a 5. Serão sorteados, sem reposição, dois cartões. Qual é a probabilidade dos números presentes nos cartões sorteados serem consecutivos? Alternativa **b**.

a) 30% **c)** 40% **e)** 50%

b) 20% **d)** 10%

O jogo de dardos consiste no arremesso de pequenos objetos em formato de lança contra um alvo circular.

Alex Kravtsov/Shutterstock.com

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

No basquete, além de habilidade para acertar um arremesso, é preciso atenção com o time adversário, que tentará sempre desviar a bola para impedir a cesta.

A CIÊNCIA DA INCERTEZA

Projeto 1

Previsão de resultados

Alicia Llop/Moment/Getty Images

Um dado não viciado tem as mesmas chances para cada um dos resultados.

Para que serve este projeto?

A Matemática é comumente vista como uma ciência de resultados únicos e exatos. Entretanto, a Estatística é uma ciência de riscos e incertezas. Entender como a Estatística funciona é essencial para que possamos utilizar termos como **provável** ou **improvável** de forma consciente e responsável, entendendo o que existe de verdade e exatidão por trás dessas afirmações.

Para aprofundar esse assunto, este projeto propõe uma sequência de experimentos matemáticos que devem auxiliá-lo a compreender a relação entre modelos estatísticos e situações reais, apropriando-se dela.

Na BNCC

Neste projeto você vai trabalhar as competências gerais 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10, as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias 2, 3, 4 e 5 e as habilidades EM13MAT202, EM13MAT203, EM13MAT311, EM13MAT312, EM13MAT315, EM13MAT316, EM13MAT406, EM13MAT511.

Questão disparadora

Como um modelo estatístico pode nos dar informações sobre a situação que ele representa?

Contexto

Ao longo deste volume, você viu que a Estatística tem duas funções principais: coletar e analisar dados para, em seguida, fazer um estudo probabilístico a fim de entender o que eles podem nos dizer sobre a população estudada. Chamamos de dados de coleta, organização e análise dos dados de Estatística Descritiva. A Probabilidade é o estudo das formas de coletar esses dados, calculando a chance de ocorrência de um evento em determinadas condições. Quando utilizamos essa interpretação para fazer afirmações e generalizações, estamos utilizando a Estatística Inferencial.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para compreender melhor essas definições, este projeto propõe dois experimentos matemáticos.

Experimento 1 – Comparar as frequências esperadas no lançamento de dois dados por meio de uma análise combinatória (calculando as probabilidades combinatórias em um espaço amostral equiprovável), uma análise amostral real (calculando as probabilidades frequentistas) e uma análise amostral virtual (gerando os dados e as frequências automaticamente).

Experimento 2 – Utilizar a probabilidade e a inferência estatística para estimar a área de uma figura comparando três métodos de determinação dessa área: aproximações geométricas, experimento real de probabilidade e experimento virtual de probabilidade.

Desenvolvimento

Experimento 1

Para este experimento, você precisará de dois dados e de um *software* de **planilha eletrônica**. Você também precisará montar algumas tabelas, que poderão ser feitas em papel ou com o apoio do *software*.

Para entender melhor o conceito destacado, consulte o tópico **Recursos digitais** na **Caixa de ferramentas**.

Procedimento

1. Elabore uma tabela de frequências com todos os pares possíveis que podem ser obtidos em um lançamento de dois dados idênticos. Indique na tabela a probabilidade de ocorrência de cada resultado considerando que esse é um espaço amostral equiprovável. Essas probabilidades representam a frequência esperada de cada resultado em um experimento com o lançamento de dois dados.
2. Faça uma série de lançamentos com dois dados considerados idênticos e anote os resultados em uma tabela, indicando a frequência absoluta e relativa de ocorrência de cada resultado (considere como um resultado o par obtido no lançamento dos dados). O número total de lançamentos deve ser o maior possível. Para isso, os mesmos dados podem ser lançados pela turma toda e todos compartilham os resultados.
3. Elabore uma planilha eletrônica que represente o lançamento de dois dados. Para isso, você irá utilizar duas funções da planilha: uma que gera números aleatórios e outra que conta a quantidade de resultados iguais em uma amostra.

	A	B	C	D	E
1	**Lançamentos**			**Tabela de frequências**	
2	Dado 1	Dado 2	Par	Resultado	Frequência
3	=INT(ALEATÓRIO()*(6)+1)	=INT(ALEATÓRIO()*(6)+1)	=B4&","&C4	1 e 1	=CONT.SE(D:D;"1,1")
4	1	2	1, 2	1 e 2	6

Reinaldo Vignati

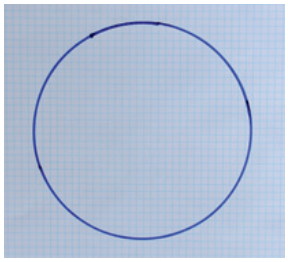
Orientações no Manual do Professor.

Ao final do experimento, compare as três tabelas de frequência e responda às questões a seguir.

1. Qual é a probabilidade de se obter o resultado (4; 5) no lançamento de dois dados? Considere que esses dados podem ser ideais, reais ou virtuais.
2. Qual é a diferença entre probabilidade combinatória e probabilidade frequentista?
3. Como um experimento como esse pode auxiliar a verificar se um dado está "viciado" ou se um programa gerador de números aleatórios (como um dado virtual) está funcionando corretamente?
4. Como o tamanho da amostra em uma pesquisa pode influenciar nas inferências feitas com base no resultado do experimento?

Experimento 2

Para este experimento, você precisará de uma folha de papel quadriculado, um punhado de grãos (arroz, por exemplo), uma régua, uma máquina fotográfica (pode ser o celular), um editor de imagens (opcional) e uma planilha eletrônica. Antes de iniciar, desenhe um círculo na folha quadriculada, como na figura. Observe que o círculo deve ocupar uma região visivelmente maior que a metade da folha, pois se ele for muito pequeno a estrutura criada [illegible] posterior.

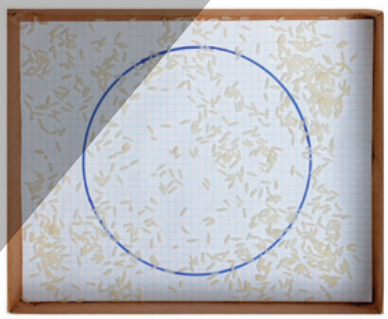


Fernando Favoretto/Criar Imagem

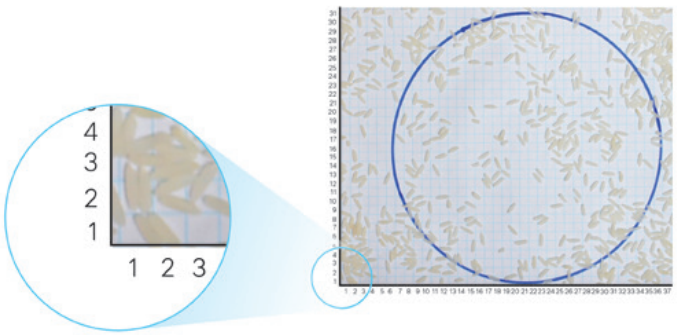
MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Procedimento

1. Jogue um punhado de grãos sobre a folha com o círculo desenhado. Você pode colocar a folha dentro de uma caixa para minimizar o espalhamento dos grãos. Fotografe o resultado buscando uma visão superior da cena, como no exemplo abaixo.
2. Se possível, utilize um programa de edição de imagens e selecione uma região da figura que contenha o círculo. Para facilitar suas anotações, numere as linhas e colunas da folha quadriculada (você também pode fazer essa numeração na própria folha).



Fernando Favoretto/Criar Imagem



Reinaldo Vignati

3. Determine a área do círculo medindo o raio com uma régua e utilizando a fórmula da área do círculo: $A = \pi \cdot r^2$. Você pode também estimar a área do círculo contando de forma aproximada o número de quadrados que estão dentro da circunferência.
4. Determine as probabilidades de um grão lançado aleatoriamente sobre a folha cair dentro do círculo e fora dele (considere apenas a região selecionada na sua imagem, e não a folha inteira).
5. Conte quantos grãos caíram dentro e fora do círculo. Se julgar necessário, você pode usar a imagem e a função *zoom* para determinar essa quantidade, separando a figura em quadrantes. Calcule a proporção entre o número de grãos que caíram dentro do círculo e o número total de grãos na área selecionada.

Ao final do experimento, compare os resultados obtidos nos dois últimos itens e responda às questões a seguir.

1. Considere as imagens usadas no exemplo. Nesse caso, a proporção entre o número de grãos dentro do círculo e o número total de grãos é 52%. A região selecionada é composta de 31 linhas e 37 colunas, e a área de cada quadrado é 0,25 cm². Utilize esses dados para estimar a área do círculo da figura. $0{,}52 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 0{,}25 \cong 149\ cm^2$
2. O experimento geraria resultados significativos se fosse feito com 10 grãos? Não, pois a amostra seria muito pequena.
3. O que esse experimento nos diz sobre a relação entre o tamanho da amostra de uma pesquisa estatística e a confiabilidade das inferências feitas sobre a população? Resposta pessoal.
4. Como um experimento como esse pode auxiliar na estimativa da área de uma figura qualquer? Se a área não fosse um círculo, mas uma forma irregular, ela poderia ser obtida considerando que a probabilidade de um grão cair dentro da figura deve ser igual à razão entre a área da figura e a área da folha.

Produto

Com base nos experimentos, seu grupo deve criar um **algoritmo** que utiliza probabilidade para determinar a área de uma região qualquer em uma imagem digitalizada.

Para entender melhor o conceito destacado, consulte o tópico **Algoritmos e fluxogramas** na **Caixa de ferramentas**.

Seu algoritmo deve ter:

- uma representação em linguagem natural que explique os passos do algoritmo;
- uma representação na forma de **fluxograma**;
- um exemplo de execução do algoritmo com dados factíveis;
- uma explicação sobre como vocês testariam o algoritmo para verificar se ele funciona e para estabelecer [illegible] seguidos a fim de garantir seu funcionamento;
- uma justificativa [illegible]namento que utilize termos estatísticos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para a realização do seu produto, considere que seu algoritmo utiliza as seguintes funções:

- =ALEATÓRIO()*($b-a$)+a – gera números racionais aleatórios dentro do intervalo]a, b[;
- =PONTO(x,y) – determina um ponto (x; y) em um plano cartesiano;
- =REGIAO(x,y) – informa se um ponto (x; y) está dentro ou fora de uma região delimitada em um plano;
- =CONT.SE(parâmetro) – conta o número de vezes que determinado parâmetro aparece em uma lista.

Considere também que, para a execução do seu algoritmo, é preciso apresentar ao processador a imagem a ser analisada, com as seguintes características:

- o contorno da região cuja área se quer medir;
- os eixos horizontais e verticais graduados;
- a escala dos eixos, ou seja, a unidade de medida dessa graduação.

Ao final do projeto, o grupo deve elaborar uma apresentação dos resultados e um relatório conclusivo.

Apresentação

Seu produto final deve conter um documento que apresente o algoritmo final.

- Os dados finais podem ser apresentados em um documento de texto, *slides*, cartaz ou qualquer outra ferramenta que possibilite analisar os dados por escrito e suporte imagens.
- O fluxograma deve ser apresentado utilizando a simbologia própria dessa linguagem e conter todos os dados especificados no produto: explicação de cada passo, exemplo de uma execução, parâmetros para teste e funcionamento e justificativas estatísticas para o funcionamento.

Relatório conclusivo

O relatório de conclusão deve estar organizado em três partes:

1. Relatório dos experimentos acompanhado de imagens, descrições sobre as etapas e respostas às questões propostas em cada experimento.
2. Com base nas conclusões do grupo, o relatório deve apresentar uma resposta à questão disparadora: **Como um modelo estatístico pode nos dar informações sobre a situação que ele representa?**
3. O relatório deve conter também uma explicação sobre como o estudo da Estatística Descritiva pode auxiliar na produção de um bom conjunto de dados e como a Probabilidade pode auxiliar na avaliação desses dados para a produção de inferências estatísticas. Incluam na argumentação quais cuidados devem ser tomados para não incorrer em erros baseados em dados estatísticos.

Sugestão de fontes

Sites

- **Calculadora de tamanho de amostra e margem de erro**. Disponível em: http://www.trujillo.com.br/calculadora.htm. Acesso em: 1 ago. 2020.
- **Populações e amostras**. Disponível em: http://leg.ufpr.br/~paulojus/CE003/ce003/node3.html. Acesso em: 1 ago. 2020.
- **Calculadora de tamanho de amostra**. Disponível em: https://pt.surveymonkey.com/mp/sample-size-calculator/. Acesso em: 1 ago. 2020.
- **Gerador de números aleatórios**. Disponível em: https://www.treinaweb.com.br/ferramentas-para-desenvolvedores/gerador/numeros. Acesso em: 1 ago. 2020.
- **ALEATÓRIO (Função ALEATÓRIO)**. Disponível em: https://support.office.com/pt-br/article/aleat%C3%B3rio-fun%C3%A7%C3%A3o-aleat%C3%B3rio-4cbfa695-8869-4788-8d90-021ea9f5be73. Acesso em: 1 ago. 2020.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Artigos em PDF

- **EACH/USP: Estatística Descritiva**, de Terezinha Aparecida Guedes et al. Disponível em: http://www.each.usp.br/rvicente/Guedes_etal_Estatistica_Descritiva.pdf. Acesso em: 1 ago. 2020.
- **IME/Unicamp: Inferência Estatística**, de Carolina S. Person *et al*. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/~nancy/Cursos/me172/Cap%208.pdf. Acesso em: 1 ago. 2020.
- **PUC-Rio: Método de Monte Carlo**. Disponível em: https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/19632/19632_4.PDF. Acesso em: 1 ago. 2020.
- **SisNe: População e amostra**, de Antonio Roque. Disponível em: http://sisne.org/Disciplinas/Grad/ProbEstat2/aula1.pdf. Acesso em: 1 ago. 2020.

Vídeos

- **Estimando el valor de Pi, utilizando el método de Monte Carlo** (ca. 26 min). Disponível em: https://www.geogebra.org/m/cF7RwK3H. Acesso em: 1 ago. 2020.

Projeto 2

Relatórios estatísticos

Natee Meepian/Shutterstock.com

A análise gráfica e de tabelas é essencial para a Estatística.

Para que serve este projeto?

O estudo da Estatística Descritiva consiste em obter, organizar, analisar e representar dados de uma população ou amostra. Entretanto, conhecendo a Estatística, é possível fazer o caminho inverso: ler e interpretar a representação de resultados estatísticos para obter informações e dados sobre uma população ou amostra.

Este projeto propõe uma análise de resultados de pesquisas visando comparar dados e tirar conclusões para avaliar se é possível tirar conclusões erradas com base em informações factuais.

Na BNCC

Neste projeto você vai trabalhar as competências gerais 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10, as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias 1, 3, 4 e 5 e as habilidades EM13MAT101, EM13MAT104, EM13MAT106, EM13MAT310, EM13MAT312, EM13MAT407, EM13MAT511.

Questão disparadora

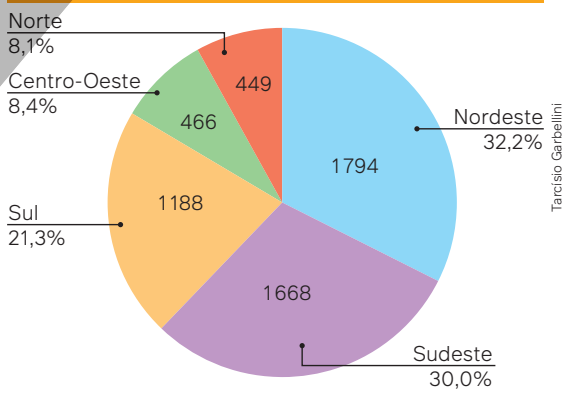
Que cuidados devemos ter ao interpretar o comportamento de variáveis que apresentam relação de dependência?

Contexto

Um dos erros mais comuns ao analisar os resultados de um conjunto de variáveis estatísticas é confundir relações de dependência com relações de causa e consequência. Esse tipo de erro pode acarretar uma série de más interpretações dos dados, gerando conclusões que não refletem a realidade, o que pode levar a tomadas de decisão ruins. Para exemplificar essa situação, utilizamos alguns dados brasileiros obtidos no *Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil*, que organizamos e representamos no gráfico de setores ao lado, na tabela e nos dois *boxplot* a seguir.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Distribuição de municípios nas macrorregiões do Brasil - 2010



Tarcisio Garbellini

Fonte: elaborado com base em: ATLAS do desenvolvimento humano no Brasil. *In*: ATLAS BRASIL. [*S. l.*]: Pnud: Fundação João Pinheiro: Ipea, [201-?]. Disponível em: http://www.atlasbrasil.org.br/2013/pt/o_atlas/o_atlas_/. Acesso em: 1 ago. 2020.

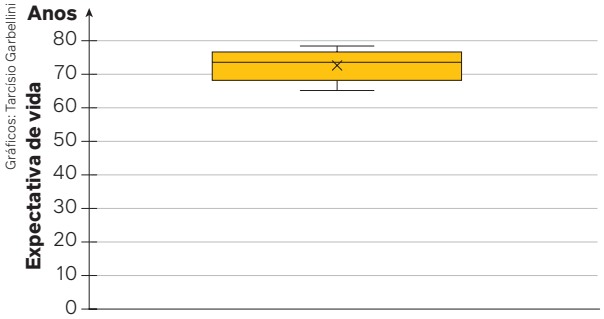
- Em 2010, o Brasil tinha 5565 municípios distribuídos nas cinco macrorregiões. Veja no gráfico acima.
- Observando os índices de **expectativa de vida** dos 5565 municípios, é possível organizar esses dados em um *boxplot*, como mostrado a seguir.

	Mínimo	25%	Mediana	75%	Máximo
Valor	65,3	71,15	73,47	75,16	78,64
Quartis	0	1	2	3	4

GLOSSÁRIO

Expectativa de vida: é um índice que indica, considerando os indivíduos de uma região, o número esperado de anos de vida que terá um grupo de indivíduos que nasceram no mesmo ano. Sendo um índice obtido pela análise de uma série de fatores da região, esse número de anos é tratado como uma variável contínua.

Distribuição do índice de expectativa de vida dos 5 565 municípios – 2010



Gráficos: Tarcisio Garbellini

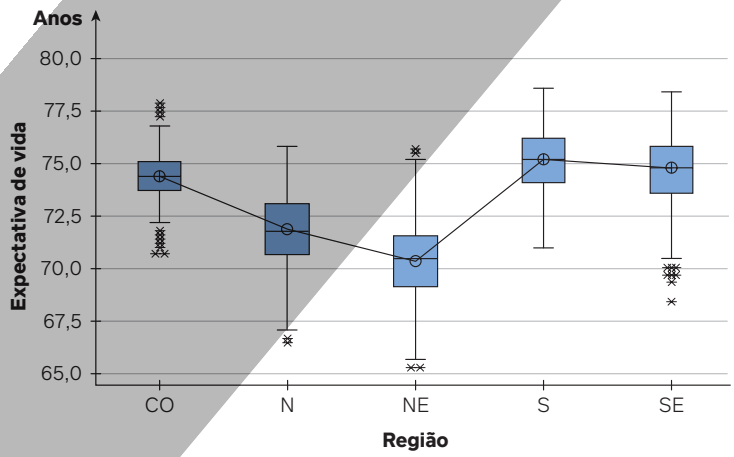
Vamos agora verificar se existe alguma relação entre a expectativa de vida no município e a região onde ele se encontra. Se existir essa relação, podemos dizer que essas variáveis se influenciam mutuamente de alguma forma, mesmo que não saibamos que forma é essa. Vejamos mais alguns dados:

- Escolhendo-se um município qualquer entre os que existiam no Brasil em 2010, a probabilidade de que ele esteja no Nordeste é 32,2%.

Fonte: elaborado com base em: ATLAS do desenvolvimento humano no Brasil. *In*: ATLAS BRASIL. [*S. l.*]: Pnud: Fundação João Pinheiro: Ipea, [201-?]. Disponível em: http://www.atlasbrasil.org.br/2013/pt/o_atlas/o_atlas_/. Acesso em: 1 ago. 2020.

- Escolhendo-se um município qualquer entre os que existiam no Brasil em 2010, a probabilidade de que a expectativa de vida nesse município seja maior que 73,47 anos é 50% (mediana).
- Entre os 1794 municípios do Nordeste, em apenas 65 a expectativa de vida está acima de 73,47 anos.
- A mediana da expectativa de vida entre os municípios do Nordeste é de 70,44 anos, como mostra o gráfico ao lado.

Distribuição do índice de expectativa de vida dos 5 565 municípios separados por região



Fonte: elaborado com base em: ATLAS do desenvolvimento humano no Brasil. *In*: ATLAS BRASIL. [*S. l.*]: Pnud: Fundação João Pinheiro: Ipea, [201-?]. Disponível em: http://www.atlasbrasil.org.br/2013/pt/o_atlas/o_atlas_/. Acesso em: 1 ago. 2020.

Para estudarmos a relação de dependência entre essas variáveis, vamos retomar alguns conceitos abordados na unidade de Probabilidade deste volume.

De acordo com o conceito de probabilidade condicional visto anteriormente e considerando as variáveis que estamos estudando, podemos selecionar dois eventos para verificar se são ou não dependentes. Tomando os 5 565 municípios e sendo A o evento "município do Nordeste" e B o evento "tem [illegible] 73,47 anos", temos:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

$P(A) = 32{,}2\%$

$P(B) = 50\%$

$P(A \text{ e } B)$ = probabilidade de um município ser do Nordeste e ter expectativa de vida maior que 73,47 anos =

$$= \frac{65}{5565} \cong 1{,}2\%$$

Como a probabilidade de ocorrer A e B simultaneamente não é igual ao produto das probabilidades de A e de B, podemos afirmar que os eventos A e B são dependentes. Usando essa dependência, vamos calcular a probabilidade condicional $P(A|B)$ (probabilidade de um município ser do Nordeste dado que sua expectativa de vida é maior que 73,47 anos):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1{,}2}{50} = 2{,}4\%$$

Esse resultado mostra uma relação entre as variáveis, mas não diz qual relação é essa. Afirmar que essa relação é de causa e consequência é um erro comum e bastante usado na manipulação de dados estatísticos. Mas não podemos afirmar que o fato de um município estar no Nordeste faz com que a expectativa de vida seja mais baixa do que em outras regiões brasileiras. O máximo que podemos afirmar é a estatística em si: se um município do Brasil está entre os que têm expectativa de vida acima dos 73,47 anos, a chance de que ele esteja no Nordeste é de 2,4%. Resta-nos então investigar os aspectos dessa relação.

Para aprofundar o olhar acerca desse tipo de erro na interpretação de informações estatísticas, este projeto propõe que se faça uma análise parecida com essa em outros contextos.

Desenvolvimento

Seu projeto se baseará na criação e análise de afirmações que explicitem a relação de dependência entre variáveis. Para isso serão cumpridas duas etapas.

Etapa 1 – Acesse o Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil, de onde foram retirados os dados citados anteriormente.

Esse Atlas possibilita uma série de análises estatísticas, já que apresenta dados de diversas variáveis dos 5 565 municípios brasileiros que existiam em 2010. Façam uma consulta sobre alguns dados e analisem a relação de duas variáveis.

Procedimento

1. Escolham uma das variáveis apresentadas no Atlas Brasil. Façam um *download* dos dados e representem-nos em um *boxplot*. Veja alguns exemplos:
   - população de homens e mulheres por município em todo o país;
   - expectativa de vida por município em Alagoas;
   - IDH por estado na Região Norte.
2. Selecionem uma segunda variável e elaborem uma hipótese para verificar a existência de relação de dependência entre eventos que envolvam essas variáveis. Por exemplo:
   - Escolhendo um município com população rural maior do que urbana, qual é a probabilidade de haver mais homens que mulheres nesse município? Será que esses eventos são dependentes?
3. Escrevam uma afirmação que responda à hipótese levantada.
4. Expliquem quais erros de interpretação podem ocorrer na análise dessa afirmação.

Etapa 2 – Acessem a reportagem sobre o Dia da Consciência Negra disponível em: https://piaui.folha.uol.com.br/lupa/2019/11/20/consciencia-negra-numeros-brasil/ (acesso em: 1 ago. 2020).

Procedimento

1. Selecionem dessa matéria uma afirmação que reflita uma probabilidade condicional, como no exemplo a seguir:
   Em 2018, 47,3% das pessoas ocupadas pretas ou pardas estavam em trabalhos informais, segundo o estudo do IBGE.
2. No caso do exemplo anterior, a afirmação é decorrente do fato de que a probabilidade condicional $P(A|B)$ de uma pessoa estar em trabalho informal (evento A), dado que ela é negra (evento B), é 47,3%. Partindo do seu exemplo, identifiquem o evento A, o evento B e o valor de $P(A|B)$.
3. Com base em informações [illegible] e utilizando cálculos, se necessário, identifiquem $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \text{ e } B)$.
4. Expliquem como o conhecimento desses dados pode evitar possíveis erros de interpretação na análise da afirmação selecionada por vocês.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Produto

Com base nas pesquisas, seu grupo deve criar um relatório que contenha:

- uma afirmação que relacione duas variáveis presentes no *Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil* indicando uma probabilidade condicional entre elas;
- um ou mais gráficos, sendo ao menos um *boxplot*, ilustrando o comportamento de cada variável separadamente;
- um ou mais gráficos ilustrando as variáveis juntas e uma explicação sobre os cuidados que devemos ter ao ler a afirmação proposta sobre elas;
- uma afirmação retirada da reportagem estudada;
- as probabilidades que embasam essa afirmação;
- um parágrafo que explique a relação entre essas probabilidades, por que essa relação possibilita que se faça tal afirmação e quais cuidados devemos ter ao ler essa afirmação.

Apresentação

O relatório pode ser apresentado na forma de documento, vídeo, áudio, cartaz ou qualquer mídia que o grupo julgue ser importante para conter todas as explicações necessárias. Dividido em duas partes, de acordo com as etapas, o relatório deve destacar:

- as duas afirmações escolhidas para representar a relação de dependência entre as variáveis analisadas em cada etapa;
- os dados estatísticos e as probabilidades que embasaram as afirmações;
- as reflexões do grupo sobre os cuidados necessários ao interpretar tais afirmações.

Relatório conclusivo

O relatório deve estar organizado da seguinte maneira:

- relato e conclusões das análises estatísticas realizadas;
- com base nas conclusões, deve apresentar uma resposta à questão disparadora:

Que cuidados devemos ter ao interpretar o comportamento de variáveis que apresentam relação de dependência?

Sugestões de fontes

Sites

- **Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil: O IDHM**. Disponível em: http://www.atlasbrasil.org.br/2013/pt/o_atlas/idhm/. Acesso em: 1 ago. 2020.
- **Jusbrasil: Homossexuais não podem doar sangue no Brasil?** Disponível em: https://pragmatismo.jusbrasil.com.br/noticias/129525650/homossexuais-nao-podem-doar-sangue-no-brasil. Acesso em: 1 ago. 2020.
- **UOL: Maioria do STF vota contra restrições à doação de sangue por homens gays**. Disponível em: https://noticias.uol.com.br/saude/ultimas-noticias/redacao/2020/05/01/maioria-do-stf-vota-contra-restricoes-a-doacao-de-sangue-por-homens-gays.htm. Acesso em: 1 ago. 2020.
- **Folha de S.Paulo: Dia da Consciência Negra: números expõem desigualdade racial no Brasil**, de Nathália Afonso. Disponível em: https://piaui.folha.uol.com.br/lupa/2019/11/20/consciencia-negra-numeros-brasil/. Acesso em: 1 ago. 2020.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Artigos em PDF

- **A Importância e Impacto da Esperança de Vida e o Analfabetismo no País**, de Fernanda C. R. Freitas (PUC-SP). Disponível em: https://www.pucsp.br/sites/default/files/download/posgraduacao/programas/administracao/basta/fernanda-cardoso-romao-freitas_0.pdf. Acesso em: 1 ago. 2020.
- **PROBABILIDADE**. Disponível em: http://w3.ufsm.br/adriano/aulas/prob/tprob.pdf. Acesso em: 1 ago. 2020.
- **Brasil: Mapa do encarceramento – os jovens do Brasil**. Disponível em: https://nacoesunidas.org/wp-content/uploads/2018/01/Mapa_do_Encarceramento_-_Os_jovens_do_brasil.pdf. Acesso em: 1 ago. 2020.

Vídeos

- **Probabilidade condicional e independência** (5 min). Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/ap-statistics/probability-ap/stats-conditional-probability/v/testing-independence-from-experimental-data. Acesso em: 1 ago. 2020.
- **Homossexuais e doação de sangue** (ca. 3 min). Disponível em: https://drauziovarella.uol.com.br/videos/drauzio-comenta/homossexuais-e-doacao-de-sangue-comenta-02/. Acesso em: 1 ago. 2020.
- **Negros representam dois terços da população carcerária brasileira** (ca. 4 min). Disponível em: https://www.tvt.org.br/negros-representam-dois-tercos-da-populacao-carceraria-brasileira/. Acesso em: 1 ago. 2020.

Estes textos estão relacionados a alguns conhecimentos desenvolvidos nos anos finais do Ensino Fundamental, servindo como fonte de consulta e retomadas que se façam necessárias. São acompanhados de exemplos que auxiliarão os alunos na sua compreensão. Leia mais detalhes no Manual do Professor.

Algoritmos e fluxogramas

Algoritmo

Algoritmo é a descrição de uma sequência de passos necessários para a realização de uma tarefa. Um dos exemplos mais simples de um algoritmo é a descrição feita para elaborar determinado prato. A receita representa uma forma de algoritmo. Embora os algoritmos estejam intimamente relacionados com a linguagem de programação, não precisam ser executados por um computador. Qualquer aparato mecânico ou tecnológico que leia e siga os passos de um algoritmo pode executá-lo. Isso inclui os seres humanos.

Assim, quando armamos e resolvemos uma operação matemática executamos um algoritmo.

Exemplo

Algoritmo para adição de dois números naturais com dois algarismos cada

1. Chamaremos os dois números que serão adicionados de *a* e *b*.
2. Escreva *a* sobre *b*, de modo que os algarismos das unidades fiquem alinhados. Veja o exemplo a seguir.

$$\begin{array}{r} 95 \\ +\ 29 \\ \hline \end{array}$$

3. Adicione o algarismo das unidades de *a* com o algarismo das unidades de *b*.
   - **a)** Se a adição resultar em um número de um algarismo, escreva-o abaixo do algarismo das unidades de *b* (posição 1).
   - **b)** Se a adição resultar em um número de dois algarismos, escreva o algarismo da unidade desse número abaixo do algarismo da unidade de *b* (posição 1) e posicione uma unidade acima do algarismo das dezenas de *a*, como a seguir.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 95 \\ +\ 29 \\ \hline 4 \end{array} \quad \rightarrow \textbf{posição 1}$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

4. Adicione os algarismos das dezenas de *a* e *b* e também a unidade acima de *a*, se houver.
   - **a)** Se a adição resultar em um número de um algarismo, escreva-o abaixo do algarismo das dezenas de *b* (posição 2).
   - **b)** Se a adição resultar em um número de dois algarismos, escreva o algarismo das unidades desse número abaixo do algarismo das dezenas de *b* (posição 2); e escreva o algarismo das dezenas desse número à esquerda daquele das unidades (posição 3).

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 95 \\ +\ 29 \\ \hline 124 \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \textbf{posição 1} \\ \rightarrow \textbf{posição 2} \\ \rightarrow \textbf{posição 3} \end{array}$$

5. Escreva o resultado da adição de *a* e *b* como o número formado pelos algarismos das posições 3, 2 e 1 (note que a posição 3 pode ser vazia).

Como podemos observar pelo exemplo, um algoritmo deve ser um procedimento preciso, não ambíguo, mecânico, eficiente e correto. Em outras palavras, deve determinar uma sequência de ações que não permitem múltiplas interpretações e dão conta de executar, todas as vezes, a tarefa a que se propõem.

Veja outras características importantes dos algoritmos que são essenciais para compreendê-los.

- Um algoritmo não responde à pergunta “O que fazer?”, e sim “Como fazer?”.
- Os algoritmos são construídos com base em regras anteriores. Note que, para adicionar dois números seguindo o procedimento da página anterior, o computador ou a pessoa que irá executá-lo deve conhecer o sistema de numeração decimal e saber adicionar números naturais de um algarismo.
- Para executar um algoritmo é preciso primeiro declarar quais são as variáveis que irão alimentar os passos, garantindo que o mesmo algoritmo possa ser usado para realizar a mesma tarefa diversas vezes. No exemplo dado, declaramos que *a* e *b* são as variáveis que representam os dois números naturais que serão adicionados.
- Existem vários algoritmos para solucionar o mesmo problema, mas a construção de todos eles normalmente segue alguns passos principais.

    1. Compreender o problema e identificar todos os dados apresentados.
    2. Definir os dados de entrada.
    3. Escolher quais passos/cálculos devem ser executados para alcançar o objetivo.
    4. Definir os dados de saída/resultado.
    5. Testar o algoritmo com uma simulação, ou seja, utilizando os valores dados no problema inicial.

Conhecer essas características é importante para entender como os algoritmos funcionam. Por exemplo, se não declarássemos as variáveis *a* e *b* teríamos de escrever um algoritmo para adicionar 10 + 12 e outro para adicionar 22 + 54. Além disso, é preciso notar que, nesse caso, não foi preciso determinar qual número seria *a* e qual seria *b*. Se fosse necessário, incluiríamos no algoritmo a definição de chamar de *a* o maior dos dois números e de *b* o menor deles – nesse caso, teríamos de considerar que quem for executar o algoritmo deve saber ordenar números naturais de dois algarismos.

Esse exemplo mostra também que um sistema de algoritmos pode ser ampliado gradativamente: conhecendo o sistema de numeração decimal, adicionamos números naturais de um algarismo. Esse conhecimento pode ser utilizado para adicionar números de dois, três ou mais algarismos. Ampliando um pouco o conceito, usamos os mesmos passos para adicionar números racionais escritos na forma decimal.

Tipos de algoritmos

Há diversas formas de classificar os algoritmos, por exemplo: de acordo com sua construção; pela forma de aplicação; pelo tipo de problema que ele visa resolver etc. Destacamos aqui apenas três tipos de acordo com sua construção.

- **Algoritmos com iteração**

  São aqueles em que o executor precisa repetir uma ou mais ações determinado número de vezes.
- **Algoritmos com tomada de decisão**

  São aqueles em que o executor precisa analisar uma determinada resposta para determinar o caminho.
- **Algoritmos simples**

  São seguidos do início ao fim, sem que o executor precise analisar as respostas para tomar decisões ou repetir algum comando.

  Alguns algoritmos podem conter as características “tomada de decisão” e “iteração”.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Formas de apresentação de algoritmos

Todos esses tipos podem ser apresentados de diversas maneiras, veja a seguir as três formas mais utilizadas.

- **Descrição narrativa**

  Consiste em escrever os passos a serem seguidos para a resolução do problema em linguagem natural. Um exemplo é o próprio idioma. Esse tipo de algoritmo é vantajoso por não exigir novos conhecimentos, mas pode gerar dupla interpretação dependendo das expressões utilizadas.
- **Pseudocódigo ou Portugol**

  É uma forma genérica de escrever um algoritmo utilizando uma linguagem lógica simples, com regras predefinidas. A vantagem desse tipo de algoritmo é sua facilidade na conversão para alguma linguagem de programação, mas é necessário aprender as regras.

Fluxograma

É a representação visual ou gráfica do passo a passo para resolução de um problema. Esse tipo de representação é útil porque costuma ser mais fácil entender elementos gráficos do que interpretar um texto. Porém, é necessário que se aprenda a simbologia.

No exemplo da adição de dois números naturais, foi usada a **descrição narrativa**, e ele contém duas **tomadas de decisão**. Veremos a seguir alguns exemplos de todos esses tipos.

Exemplo 1: **algoritmo simples apresentado em descrição narrativa**

Algoritmo para cálculo da hipotenusa de um triângulo retângulo, dados os catetos

1. chame o primeiro cateto de *C1*;
2. chame o segundo cateto de *C2*;
3. chame a hipotenusa de *H*;
4. eleve o valor de *C1* ao quadrado;
5. eleve o valor de *C2* ao quadrado;
6. adicione os valores encontrados nos passos 4 e 5;
7. calcule a raiz quadrada do resultado obtido no passo 6;
8. iguale o resultado obtido no passo 7 a *H*;
9. escreva "O valor da hipotenusa é *H*".

Exemplo 2: **algoritmo simples apresentado em pseudocódigo**

Algoritmo para cálculo da média aritmética de dois números

- INÍCIO
- DECLARE (*C1*, *C2*, *S*, *M*)
- ESCREVA "Digite dois números"
- LEIA (*C1*, *C2*)
- *S* ← *C1* + *C2*
- *M* ← *S*/2
- ESCREVA "Média =", *M*
- FIM

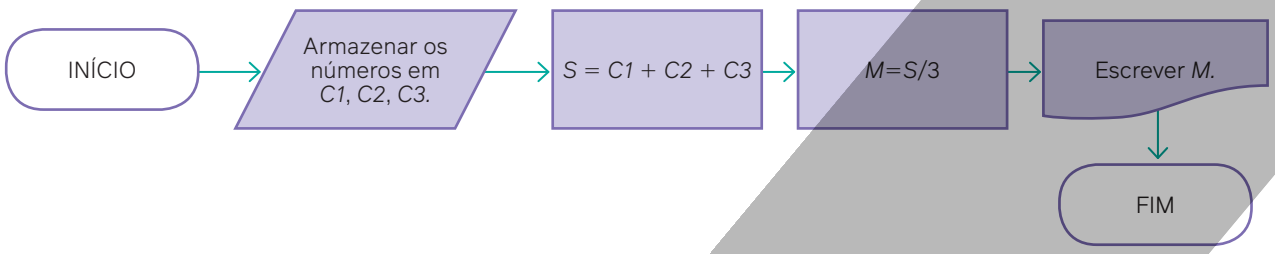
Como dissemos anteriormente, esse tipo de linguagem demanda que algumas regras sejam conhecidas. No caso do código acima, as regras utilizadas estão explicadas na tabela.

Código	Descrição da função
INÍCIO / FIM	Função utilizada para limitar o algoritmo. Tudo que está entre esses dois códigos faz parte da linguagem do pseudocódigo.
DECLARE ( )	Função utilizada para nomear as variáveis que serão utilizadas no algoritmo. No exemplo, as variáveis são *C1*, *C2*, *S* e *M*.
ESCREVA "texto"	Função utilizada para indicar o que deve aparecer na tela, ou seja, o que o algoritmo precisa dizer a quem o está utilizando. No exemplo, a função pede ao leitor que digite dois números. Ao final, mostra a média aritmética dos valores digitados.
LEIA ( )	Função utilizada para ler e armazenar nas variáveis os valores oferecidos por quem está usando o algoritmo. No exemplo dado, a função lê os dois números digitados e os armazena em *C1* e *C2*.
←	A seta leva para alguma variável o resultado de uma operação. No exemplo, leva para *S* o valor da soma dos números digitados e, em seguida, leva para *M* o valor da divisão de *S* por 2.
"="	O sinal de = é usado entre aspas na função ESCREVA. Quando aparece, demanda que seja escrito ao seu lado o valor da variável declarada após a vírgula. No exemplo, temos "**Média =**", ***M***, o que significa que o algoritmo vai escrever na tela, ao lado do sinal de =, o valor que está armazenado na variável *M*.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Exemplo 3: **algoritmo simples apresentado em fluxograma**
Algoritmo para cálculo da média aritmética de três números

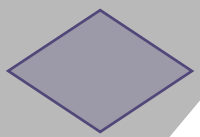
São dados três números e o algoritmo calcula a média aritmética entre eles.



Ilustrações: DAE

Esse tipo de linguagem requer o conhecimento de alguns símbolos. Os símbolos mais comuns usados em fluxogramas estão explicados a seguir, podendo essas formas variar um pouco de usuário para usuário.

Alguns símbolos utilizados em fluxogramas

Símbolo	Função
	Indica o início e o fim do processo.
	Utilizada para conectar os símbolos, indica o sentido do fluxo.
	Indica cada atividade que precisa ser executada.
	Indica a entrada/saída de dados genéricos.
	Indica documento gerado ou inserido.
	Indica a necessidade de tomada de decisão.
	Conector, indica que o fluxograma continua.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

No exemplo acima, utilizamos o símbolo ovalado para INÍCIO e FIM, o paralelogramo para declarar as variáveis *C1*, *C2*, *C3* que serão oferecidas pelo executor do algoritmo, o retângulo para carregar as variáveis *S* e *M* que serão calculadas e o retângulo com base ondulada para declarar o resultado de *M*. Não utilizamos o losango e o círculo porque não há tomadas de decisão nem pausas nesse fluxograma.

Exemplo 4: **algoritmo com iteração e tomada de decisão apresentado em fluxograma**

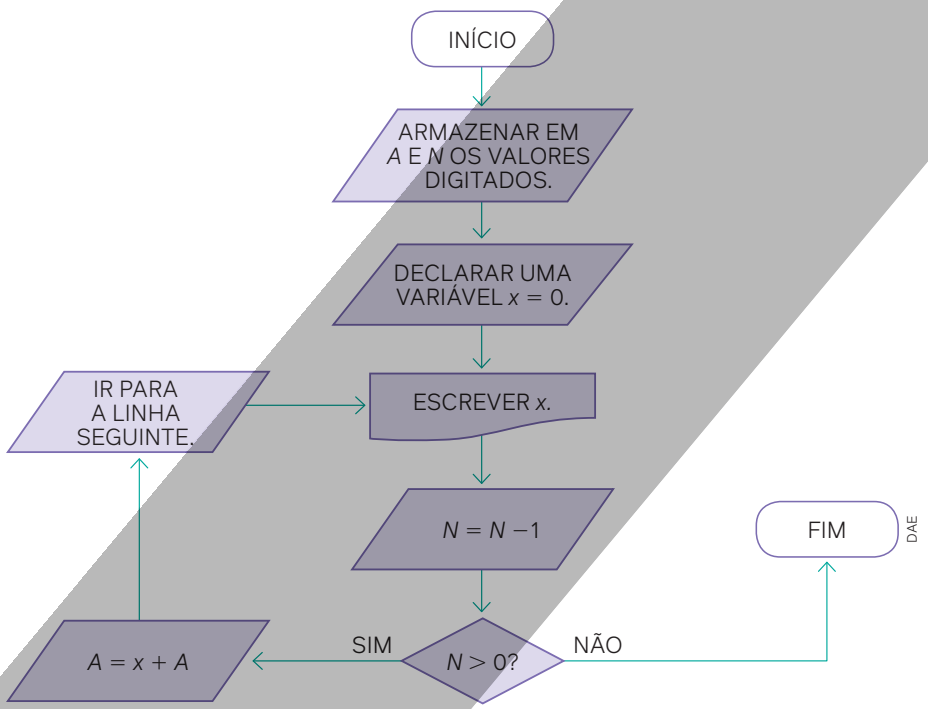
Algoritmo para escrever uma sequência de múltiplos de um número

Assim, as expressões $n = n - 1$ (que não tem sentido em matemática) ou $x = x + a$ (que em matemática significa $a = 0$), no fluxograma representam que a variável n redefine seu valor para $n - 1$ (ou seja, é reduzida em uma unidade) e a variável x recebe o valor de $x + a$ (ou seja, é acrescida de a unidades).

Atenção!

Uma observação importante sobre o fluxograma a seguir, que ilustra esse exemplo: como vimos, em linguagem de programação, o sinal de igualdade não indica a escrita de uma equação.

Vamos agora ao algoritmo. Para executá-lo, determina-se nessa ordem qual número será a base das multiplicações e quantos termos deve ter a sequência de múltiplos desse número. O algoritmo apresenta a sequência com determinada quantidade de múltiplos positivos do número dado.



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Você já sabe que o último passo para verificar se um algoritmo foi bem construído é testá-lo. É interessante escolher alguns valores para testar os algoritmos dos exemplos 3 e 4.

Vamos testar o fluxograma desse exemplo para construir a sequência dos 5 primeiros múltiplos de 3.

INÍCIO
$a = 3, n = 5, x = 0$
0
$n = 5 - 1 = 4; n > 0; x = 0 + 3 = 3$
3
$n = 4 - 1 = 3; n > 0; x = 3 + 3 = 6$
6
$n = 3 - 1 = 2; n > 0; x = 6 + 3 = 9$
9
$n = 2 - 1 = 1; n > 0; x = 9 + 3 = 12$
12
$n = 1 - 1 = 0; n \not> 0;$
FIM

Os fluxogramas representam uma forma visual de compreender os algoritmos, sejam simples ou dotados de iterações e pontos de tomada de decisão.

Recursos digitais

São muitos os recursos digitais que podem auxiliar o estudo da Matemática. Aqui mencionaremos algumas ideias que podem auxiliar na utilização de três deles: planilhas eletrônicas, *software* de geometria dinâmica e calculadoras. Quanto mais se explora de forma autônoma esses recursos mais funções e utilidades se descobre.

Planilhas eletrônicas

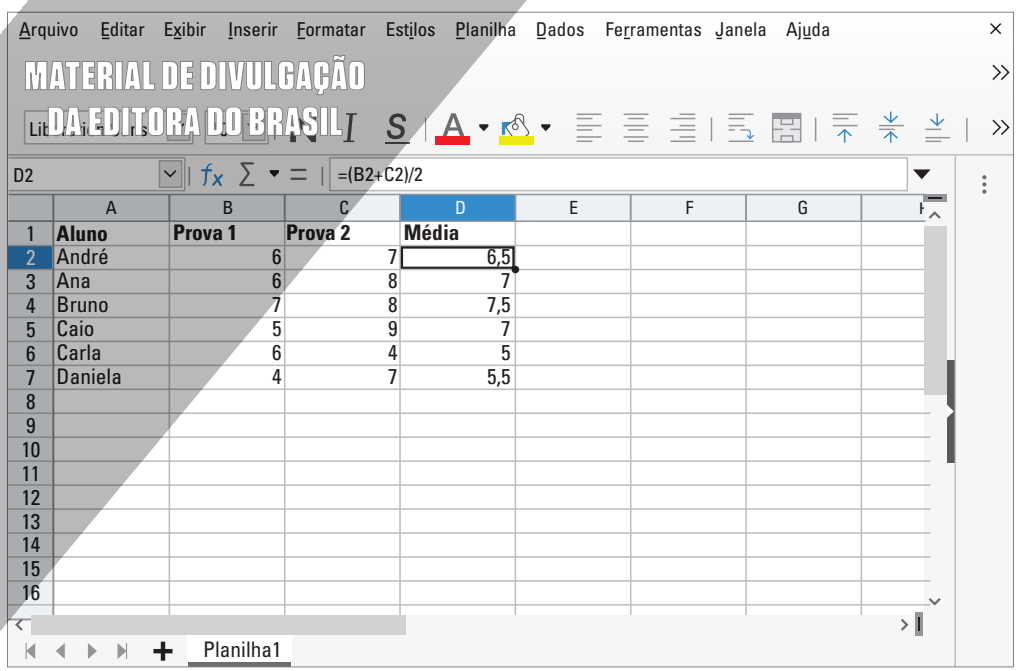
Chamamos de planilhas eletrônicas ou planilhas de cálculo os programas de computador utilizados para organizar e realizar cálculos com dados de tabelas. Sua utilidade, apenas como exemplo, está no cálculo automático de somas e de médias, entre outros.

Para acessar uma planilha eletrônica é preciso ter o *software* instalado no computador e encontrá-lo no menu principal, geralmente chamado menu **Iniciar**. Há versões dessas planilhas que podem ser usadas diretamente na internet, sem necessidade de instalar o programa. Você pode encontrá-las usando um mecanismo de busca e digitar "planilhas eletrônicas *on-line*", por exemplo.

Para preencher uma planilha eletrônica é necessário digitar as informações nas células que a compõem. As listas de valores podem ser digitadas em linhas e/ou em colunas e os dados ficam organizados em tabelas.

Na planilha eletrônica cada célula representa um dado e é indicada por uma letra e um número relacionados, respectivamente, à coluna e à linha em que a informação se encontra. Assim, por exemplo, a célula *D*4 indica o conteúdo que está na coluna *D* e na linha 4 da planilha.

Um exemplo é listar o nome dos alunos na coluna *A*, as notas obtidas por eles em duas provas nas colunas *B* e *C* e, na coluna *D*, determinar a média aritmética entre as notas de cada aluno. Após digitar na célula *D*2 a expressão para determinar a média entre as duas provas digitadas nas células *B*2 e *C*2, ao clicar na célula *D*2 e, em seguida, em cima do quadrado que aparece no canto inferior à direita dessa célula e arrastá-lo até a última linha da tabela, a expressão que determina a média dos valores de cada linha é copiada para as outras células; esse recurso é usado para copiar informações de uma célula para outra.



Tarcísio Garbellini

Figura 1.

Operações e funções

Para que o programa determine uma medida ou resultado automaticamente, é necessário digitar o sinal de igual (=) e, em seguida, a expressão que relaciona o conjunto de dados à medida desejada.

Na planilha eletrônica, os sinais de operações matemáticas são usados para obtermos o valor numérico de expressões numéricas ao digitarmos, em determinada célula, o equivalente a dada expressão numérica. Por exemplo, para calcular o valor de $\frac{2a - (3 + b^2)}{c}$, em que *a*, *b* e *c* são números reais, pode-se organizar os dados, de modo que o valor de *a* seja inserido na célula *F1*, o de *b* na célula *G1* e o de *c* na célula *H1*.

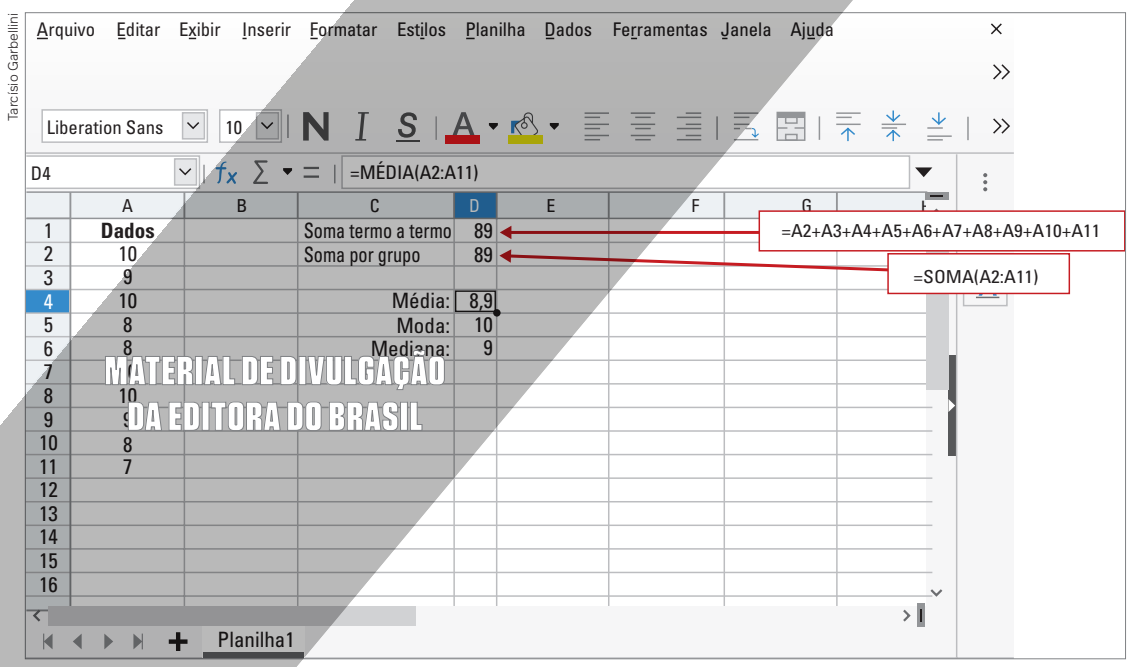
Assim, digita-se a expressão =(2*F1-(3+G1^2))/H1 na célula *H2*, por exemplo, e obtém-se o valor numérico desejado. Em programas de computador a multiplicação é indicada pelo asterisco (*), a divisão pela barra (/) e a potência pelo circunflexo (^).

Além disso, não é preciso utilizar colchetes e chaves para escrever expressões, usa-se parênteses dentro de parênteses. Além de expressões, existem fórmulas pré-programadas que substituem algumas expressões muito utilizadas. Por exemplo, para determinar a soma de um conjunto de dados listados na coluna *A*, da célula *A2* até a célula *A11* (ver célula D1 na figura 2), pode-se digitar a expressão:

$$=A2+A3+A4+A5+A6+A7+A8+A9+A10+A11$$

Ou, de modo equivalente, usar a função **SOMA** do programa e digitar a expressão =SOMA(*A2:A11*).

A média também é determinada, entre outras maneiras, pela função **MÉDIA** predefinida no *software*, digitando-se a expressão =MÉDIA(*A2:A11*). Analogamente, para determinar a moda desses valores, usamos a função **MODO** na expressão =MODO(*A2:A11*). E, para determinar a mediana, usa-se a função **MED** na expressão =MED(*A2:A11*).



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Figura 2.

Assim, podemos determinar a soma, média, moda e mediana de um conjunto de dados sem criar uma expressão numérica para esse cálculo. Há diversas funções arquivadas na biblioteca de uma planilha eletrônica que possibilitam a simplificação dos cálculos.

Você pode encontrar as funções predefinidas do *software* acessando o menu Inserir > Função. No assistente de funções que se abre, faça a busca por categorias de funções ou por ordem alfabética.

Além de determinar automaticamente valores relacionando os conteúdos das células, é possível fazer diferentes tipos de gráficos com base em um conjunto de dados usando esse tipo de *software*.

Gráficos estatísticos

Para criar um gráfico de setores com os dados indicados na coluna *A* da figura 2, por exemplo, basta selecionar o conteúdo da célula *A2* até a célula *A11*, clicar no menu **Inserir** e depois em **Gráfico**. Feito isso, uma janela será aberta para você escolher o tipo de gráfico: de colunas, de barras, de linhas, entre outros (ver figura 3). Para obter um gráfico de setores, escolha o tipo ***Pizza***, que é como geralmente são denominados nesses *softwares*.

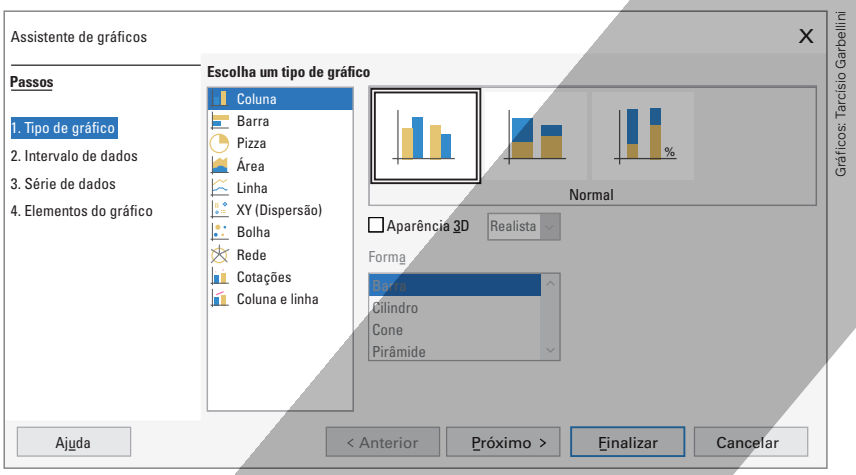


Figura 3.

Depois de escolher o tipo de gráfico, basta clicar em **Finalizar** e o gráfico é inserido na planilha eletrônica. A próxima etapa é compor a legenda e o título do gráfico. Você pode fazer ajustes, como trocar as cores, inserir o título dos dados e outros detalhes que facilitem a divulgação das informações.

Para criar gráficos que relacionem duas variáveis, basta organizar os dados em duas colunas diferentes da planilha (uma coluna para cada variável) – nas células *B2* até *B11* e *C2* até *C11*, por exemplo –, clicar com o *mouse* e selecionar todas as células que contêm os dados digitados. Depois basta repetir o procedimento anterior e escolher o tipo de gráfico mais adequado, que pode ser de barras duplas.

É possível também classificar as variáveis atribuindo título e unidade a elas. Por exemplo, se um par de dados se refere aos valores esperados e reais nos primeiros meses de um ano, digite essas informações em uma coluna (como na coluna *A* da figura a seguir) e na primeira linha das colunas de dados (como nas células *B1* e *C1* da figura 4). Ao selecionar todas as células (de *A1* até *D11*) e criar um gráfico de barras, a legenda e o título dos dados já são automaticamente preenchidos, mas ainda é possível editá-los.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

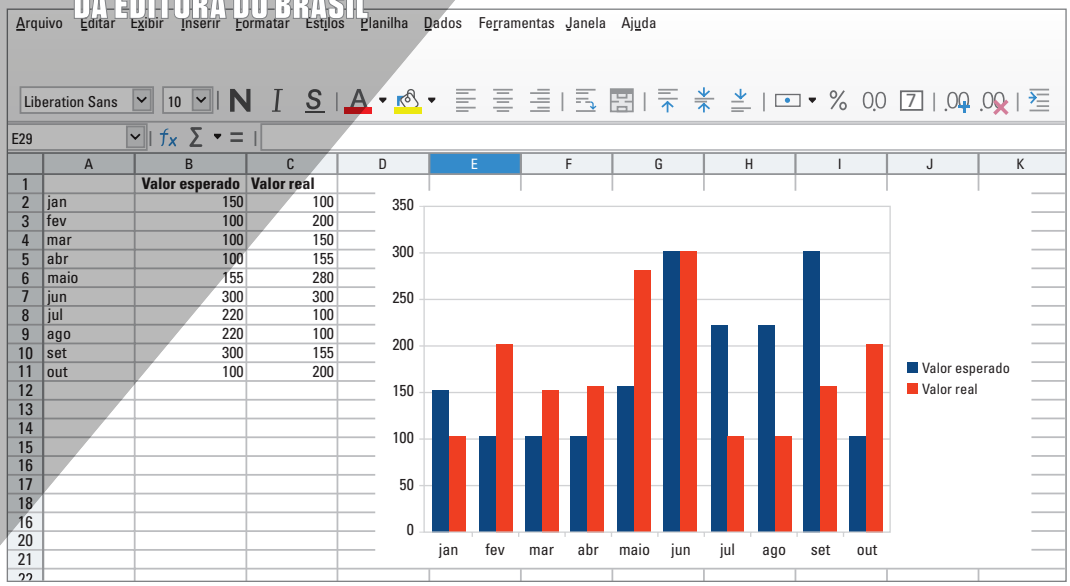


Figura 4.

Software de geometria dinâmica

Software de geometria dinâmica é um programa que, em um ambiente virtual, possibilita o estudo da Geometria simulando o uso de régua e compasso. A principal característica desse ambiente é a possibilidade de movimentar as figuras representadas mantendo algumas características determinadas.

Existem diferentes programas que podem ser usados no trabalho com geometria dinâmica, e algumas versões estão disponíveis na internet, sem necessidade de instalação do *software*.

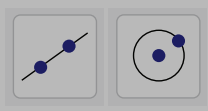
Apesar da variedade de ambientes virtuais de geometria dinâmica, todos têm funcionalidades comuns, necessárias para as construções geométricas.

Construções geométricas

Duas ferramentas são básicas para qualquer construção. A ferramenta **seta** possibilita selecionar e mover pontos, retas, figuras ou construções inteiras. A ferramenta **ponto** pode ser usada para criar pontos diretamente no plano cartesiano, é necessário apenas selecioná-la e clicar no lugar do plano em que o ponto deve ser criado; dessa maneira, automaticamente são atribuídos ao ponto um nome e suas coordenadas.

Exemplos de ícones para as ferramentas **seta** e **ponto**.

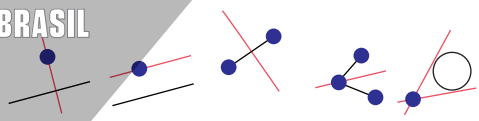
Utilizando as ferramentas principais, **reta** e **círculo**, pode-se fazer qualquer construção geométrica, pois elas simulam a régua e o compasso. A ferramenta **círculo**, dependendo do *software* utilizado, também pode vir indicada como "circunferência" ou "compasso".



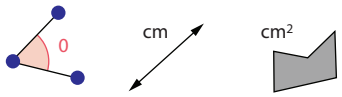
Exemplo de ícones para as ferramentas **reta** e **círculo**.

Há ainda outras ferramentas que facilitam construções geométricas básicas, como **reta perpendicular**, **reta paralela**, **bissetriz**, **mediatriz**, **reta tangente** etc. Além dessas funcionalidades, outra categoria de ferramentas importante é a de medições de **ângulos**, **comprimentos** e **áreas**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL



Exemplo de ícones das ferramentas reta perpendicular, reta paralela, mediatriz, bissetriz e reta tangente.



Exemplo de ícones das ferramentas para ângulo, comprimento e área.

Ilustrações: Tarcísio Garbellini

Exemplo

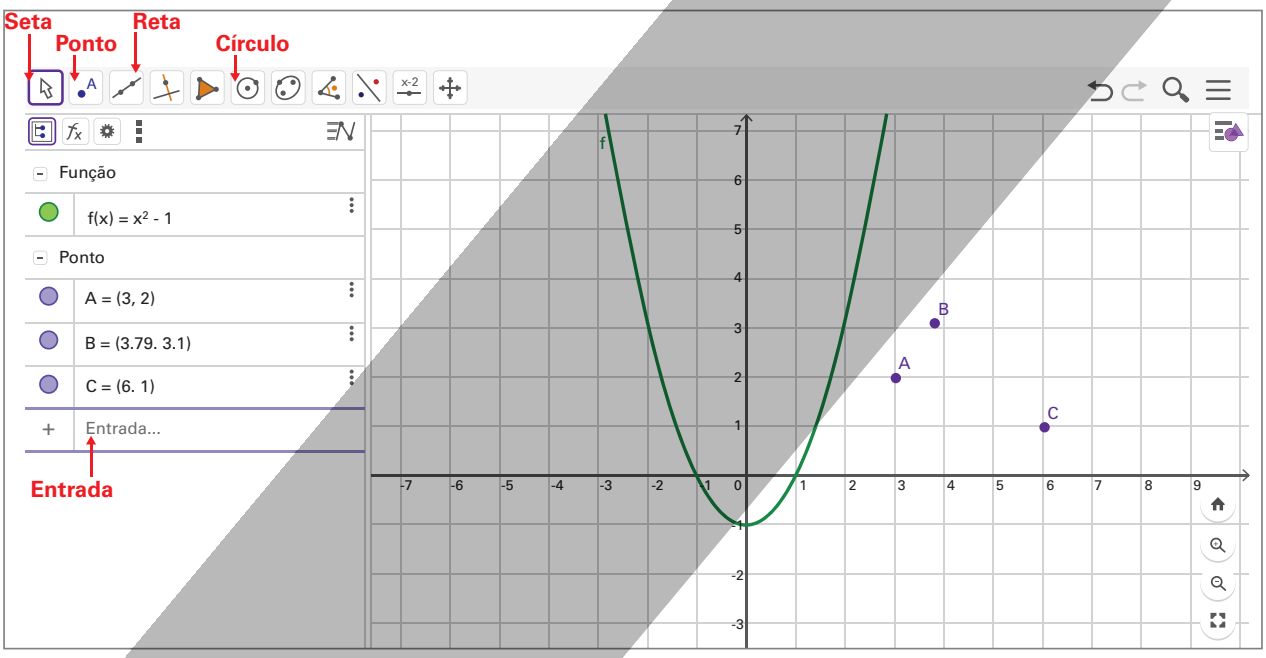
Veja as etapas para a criação de uma reta tangente a uma circunferência cujo raio tem 5 unidades de medida de comprimento e o centro está em (1, 5).

1. Crie o ponto *A*(1, 5) clicando no ponto (1,5) do plano cartesiano com o botão **ponto** ativado.
2. Com a ferramenta **círculo dados centro e raio**, clique no ponto *A* e insira o valor 5 na caixa que se abre.
3. Para criar a reta tangente a essa circunferência, basta selecionar o botão **reta tangente** e clicar em um dos pontos da circunferência obtida anteriormente.

Expressões algébricas

O uso da caixa **entrada** também é relevante quando, por exemplo, é necessário determinar a localização de um ponto por meio de suas coordenadas. Nesse caso, na **entrada** é suficiente digitar o valor *x* da abscissa e o valor *y* da ordenada no formato (*x*, *y*). Além disso, pode-se obter a representação gráfica de funções no plano cartesiano com base em sua representação algébrica. Para representar o gráfico de $f(x) = x^2 - 1$, basta digitar a expressão = *x*^2−1 no campo **entrada** (ver figura 5).

> Em geral, nos programas de computador, para indicar uma potência, utiliza-se o acento circunflexo (**^**). Assim x^2 é indicado por *x*^2, ou 10^3 por 10^3 etc. A multiplicação é representada pelo asterisco (*****) e a divisão pela barra (**/**).



Tarcísio Garbellini

Figura 5.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Calculadoras

As calculadoras são ferramentas importantes no dia a dia, pois, assim como outras tecnologias, agilizam o cálculo em diversas operações. Existem diferentes tipos, as mais conhecidas são a convencional e a científica. Atualmente, elas também estão disponíveis nos computadores e *smartphones*.

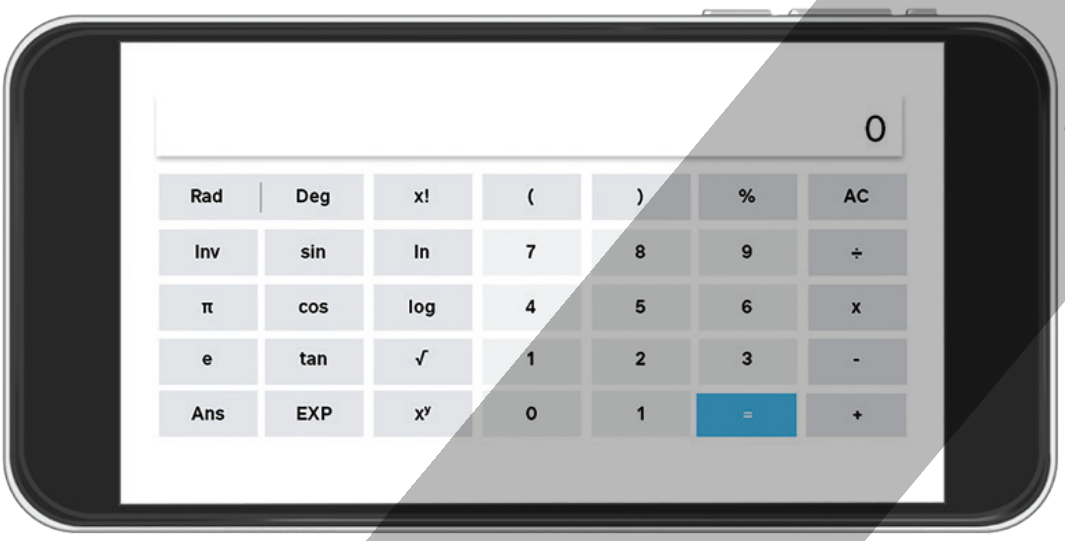
Com a calculadora convencional é feito o cálculo de operações básicas, como adição, subtração, multiplicação e divisão. A maioria delas inclui também uma tecla para o cálculo de porcentagens e outra para raízes quadradas.

Já as calculadoras científicas, além das funcionalidades das convencionais, possibilitam outras operações, como calcular potências com expoentes inteiros ou fracionários com a tecla x^y; determinar a representação fracionária de um número decimal com a tecla $\frac{d/c}{a\,b/c}$; utilizar potências de base 10 com a tecla **EXP**; calcular raízes com diferentes índices com a tecla $\sqrt[x]{\ }$; determinar valores trigonométricos etc. Além disso, é possível utilizar as teclas de parênteses **(** e **)** para digitar uma expressão numérica e obter seu resultado.

Jouke van Keulen/Shutterstock.com

Calculadora científica.

Para acessar a calculadora científica no computador, basta abrir a convencional (também chamada de calculadora-padrão) e, no menu dela, habilitar a calculadora científica. Em *smartphones,* pode ser acessada pelo menu principal do aplicativo da calculadora-padrão ou, na maioria dos aparelhos, girando a tela para que fique na horizontal.



Mauro Salgado

Calculadora científica exibida na tela de um *smartphone*.

Veja como calcular alguns valores utilizando a calculadora do celular.

Comente com os estudantes que os dados da "entrada na calculadora" podem variar de acordo com o modelo.

Expressão numérica	Entrada na calculadora	Expressão no visor da calculadora
$0{,}75^{10} + \sqrt[4]{3}$	Digite **0,75**, digite ***x^y***, digite **10**, digite **+**, digite **3**, digite ***x^y***, digite **(**, digite **1**, digite **÷**, digite **4** e digite a tecla **)**.	0,75^(10) + 3^(1/4)

Apesar de as calculadoras, assim como outras ferramentas tecnológicas, serem importantes por auxiliarem no estudo de propriedades matemáticas e agilizarem cálculos, há um limite de dígitos com os quais elas conseguem operar ou mostrar no visor. Assim, resultados de valores periódicos, como 0,333..., ou irracionais, como $\sqrt{2}$, são representados e operados considerando uma aproximação. Por exemplo, se a calculadora tem capacidade de operar com até 10 dígitos, o valor de $\sqrt{2}$, que é aproximadamente 1,414213562373095, será considerado como sendo exatamente 1,41421356.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Pesquisa estatística

Uma pesquisa estatística é uma investigação que parte da observação de fenômenos de caráter natural, social, econômico ou cultural e da identificação de um problema. Nessa perspectiva, pesquisar não é estudar um assunto do qual não se tem conhecimento, como poderia ser estudar sobre os tipos de triângulos e suas características, por exemplo. A pesquisa estatística, diferentemente de pesquisar um assunto na internet, envolve produção de conhecimento novo.

Com base nessa definição, o pesquisador é, portanto, um curioso, um questionador, um crítico, um cientista que investiga para descobrir coisas novas. E a pesquisa estatística possui um aporte científico que lhe dá credibilidade. Para isso, é necessário realizá-la cumprindo algumas etapas.

Etapas de uma pesquisa

Quando se fala em etapas de uma pesquisa estatística, a ideia central é de organização, de estruturação da pesquisa. Dependendo do tipo de pesquisa a ser feita, de sua finalidade e de sua abrangência, essas etapas são mais ou menos detalhadas. Destacamos aqui, independente da pesquisa estatística a ser realizada, quatro macroetapas:

- Problematização.
- Planejamento.
- Execução da pesquisa e análise de dados.
- Atuação sobre os resultados da pesquisa.

Cada uma das quatro macroetapas de uma investigação científica possui fases que constituem um ciclo investigativo completo.

Problematização da pesquisa (Problema)

Nesta etapa é necessário estabelecer o tema no qual está inserido o problema que se deseja pesquisar; formular **questões** pertinentes ao tema e levantar **hipóteses**.

Tema

Ao se levantar possibilidades para um tema de pesquisa, é essencial que o tema seja relevante e de interesse coletivo, e que parta de uma situação complexa sobre a qual se deseja saber mais dados ou realizar análises profundas.

Por exemplo: quantidade de crianças em situação de rua em minha cidade, destinação do lixo da escola, taxa de desemprego no bairro, diminuição da maioridade penal, opinião da maioria sobre a legalização do aborto, preconceito (social, econômico, de gênero e sexualidade), assédio nos transportes públicos, relação entre fome e desperdício etc.

Questões

Uma vez escolhido o tema, é preciso determinar quais questões a pesquisa deverá tentar responder. A elaboração dessas questões determinará a forma de coleta e análise de dados, e por isso é uma etapa imprescindível do projeto de pesquisa. Se o tema for, por exemplo, desemprego do bairro, é preciso definir: o que queremos saber sobre o tema? Qual sua causa? Qual sua relação com os bairros vizinhos? Qual é sua progressão histórica? São inúmeras as possibilidades de questões, e é preciso fazer escolhas conscientes para planejar um bom projeto de pesquisa.

Hipóteses

Além de levantar as questões, também é função do pesquisador elaborar respostas hipotéticas que a pesquisa irá confirmar ou negar.

As hipóteses são importantes para o pesquisador estabelecer relações com os conhecimentos que já possui e tentar "ver o futuro" deduzindo possíveis resultados a serem encontrados. Posteriormente, elas serão retomadas e, se confirmadas, poderão fazer parte da conclusão da pesquisa.

Veja um exemplo de como essa Etapa 1 pode ser elaborada:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Exemplo

Tema: Crianças em situação de rua.

Questão da pesquisa: O que pensam as pessoas sobre as crianças que vivem nas ruas?

Hipóteses: As pessoas acreditam que:

- Há crianças vivendo nas ruas por falta de responsabilidades dos pais, e/ou
- As crianças em situação de rua são consequência de drogadição (delas ou dos familiares), e/ou
- As crianças vivem nas ruas porque não gostam de estudar, por isso abandonam a escola e o lar.

Observe que o tema proposto exige reflexão e discussão dos autores para definir as questões de pesquisa e, consequentemente, das hipóteses.

Planejamento da pesquisa

O planejamento envolve a definição de três parâmetros que influenciarão toda a abordagem da pesquisa e dos resultados.

População e amostra

Em estudos estatísticos, a palavra "população" se refere a todos os indivíduos ou objetos de um determinado grupo. Já a palavra "amostra" diz respeito a um conjunto de elementos específico da população.

A população é utilizada em caso de pesquisa **censitária** (que envolve todos os elementos da população, por exemplo, ao analisar todos os exames de sangue feitos numa determinada instituição). É mais comum o uso de pesquisa **amostral** (que representa parte de uma população, por exemplo, analisar 10% dos exames de sangue, por meio de sorteio).

No caso do exemplo (crianças de rua), a população pode ser "comunidade escolar da minha escola" e a amostra "10% dos pais, professores e alunos de minha escola, quantidade obtida por meio de sorteio".

Prostock-studio/Shutterstock.com

Jovem fazendo pesquisa.

Instrumento de coleta de dados

Para elaborar o instrumento de coleta é importante a prévia discussão coletiva, com atenção para perguntas com potencial de responder à sua questão de pesquisa. Também é necessário pontuar variáveis que podem influenciar resultados, como sexo, grau de escolaridade, nível socioeconômico, formação etc.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

As perguntas podem ser abertas ou de múltipla escolha. No caso das perguntas abertas, nas quais o participante da pesquisa pode responder o que quiser, as respostas deverão ser categorizadas posteriormente para que possam ser agrupadas e quantificadas permitindo a análise dos dados. Já no caso das perguntas de múltipla escolha, as opções de resposta precisam ser bem pensadas para garantir que traduzam todas as possíveis respostas que os participantes dariam, sem induzi-los a uma ou outra alternativa.

No caso da pesquisa sobre crianças em situação de rua, podem ser feitas perguntas como:

- Qual a principal razão de as crianças estarem nas ruas?
- A quem você atribui a culpa/responsabilidade de elas estarem nas ruas?
- "Crianças que vivem na rua são futuros delinquentes." Como você julga essa afirmativa?
- Você já se mobilizou para ajudar crianças em situação de rua? De que forma?
- Como você se sente quando vê crianças trabalhando nos semáforos?

Planejamento da coleta de dados

A coleta deve ser feita da mesma forma por todos os entrevistadores/pesquisadores. Se a opção for pelo uso de questionário eletrônico, todos terão de fazer o mesmo questionário e utilizar a mesma forma de distribuição. Se a opção for por entrevista individual com preenchimento do questionário (em papel) pelo pesquisador, todos devem estipular a melhor maneira de proceder, e isso deve ser respeitado. Para que não haja distorção dos resultados, os dados precisam ser coletados de forma idêntica por todos.

Execução da pesquisa

A execução é a parte mais longa do projeto e pode ser organizada em cinco partes.

Coleta de dados

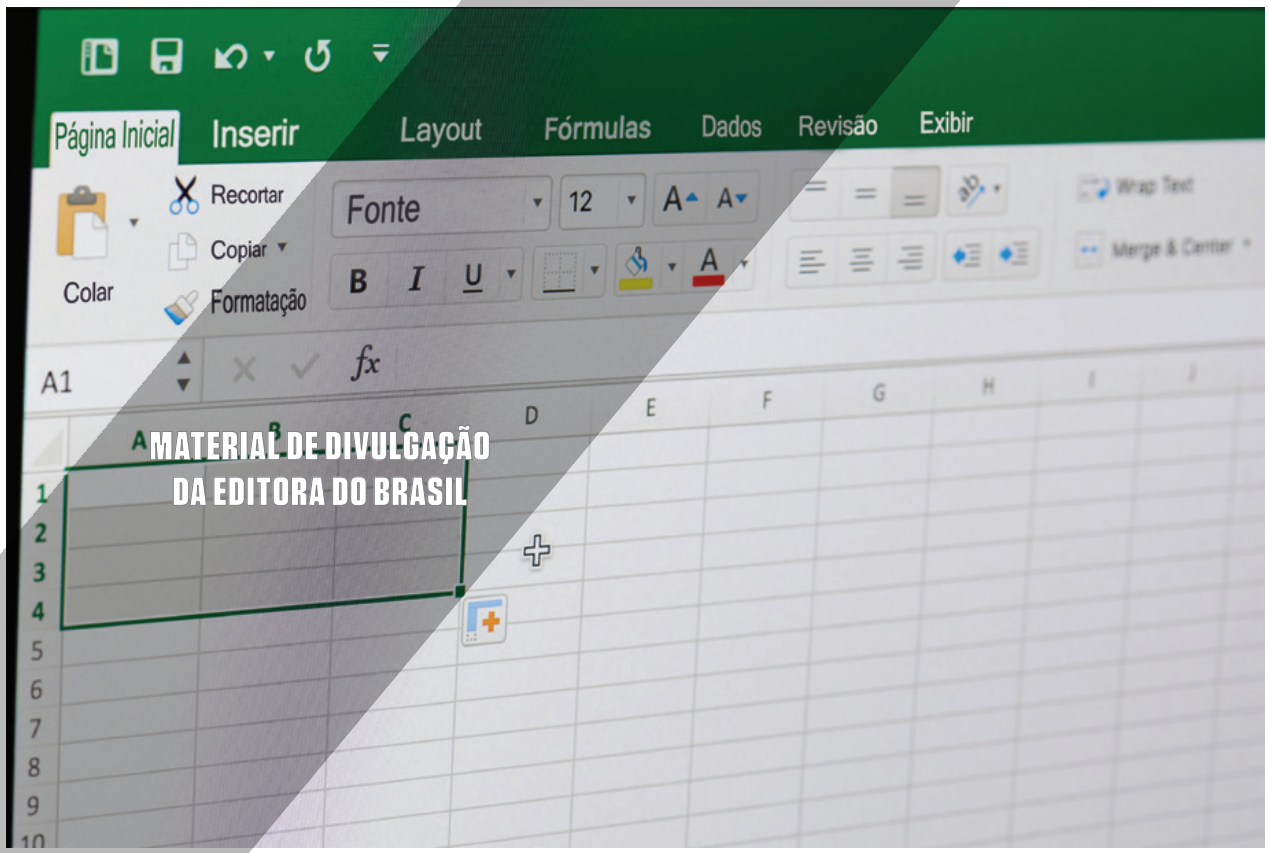
A coleta de dados é o primeiro passo da execução e deve acontecer em conformidade com o que foi estabelecido no planejamento. É preciso também estabelecer um prazo para essa coleta, de modo que os dados analisados reflitam uma situação em determinado período de tempo.

Organização dos dados

A alimentação e organização dos dados podem ser feitas por uma pessoa ou grupo numa planilha, de preferência eletrônica, para que algumas ferramentas tecnológicas auxiliem a organização: se o questionário da sua pesquisa for feito em formulário eletrônico, os dados serão organizados por questão e, no caso de questões de múltipla escolha, alguns gráficos podem ser gerados automaticamente.

Tratamento dos dados

O tratamento dos dados pode ser feito manual ou automaticamente por meio das planilhas eletrônicas. Nesta fase, é possível observar os dados considerando as variáveis propostas no instrumento de coleta, comparando os valores absolutos e percentuais. É possível também gerar gráficos que auxiliem na leitura dos dados.



PixieMe/Shutterstock.com

Imagem de planilha eletrônica.

Análise dos dados

Com os dados organizados, passa-se a analisá-los e interpretá-los. Essa análise depende de um olhar cuidadoso e do uso de algumas medidas estatísticas para verificar se há uma tendência no comportamento analisado e se há relação entre as variáveis coletadas.

O que pensam, de modo geral, as pessoas sobre o assunto? Houve diferença entre as faixas etárias? Houve divergência de opinião considerando o poder aquisitivo? Como as pessoas estão se mobilizando (ou não) para minimizar o problema apresentado?

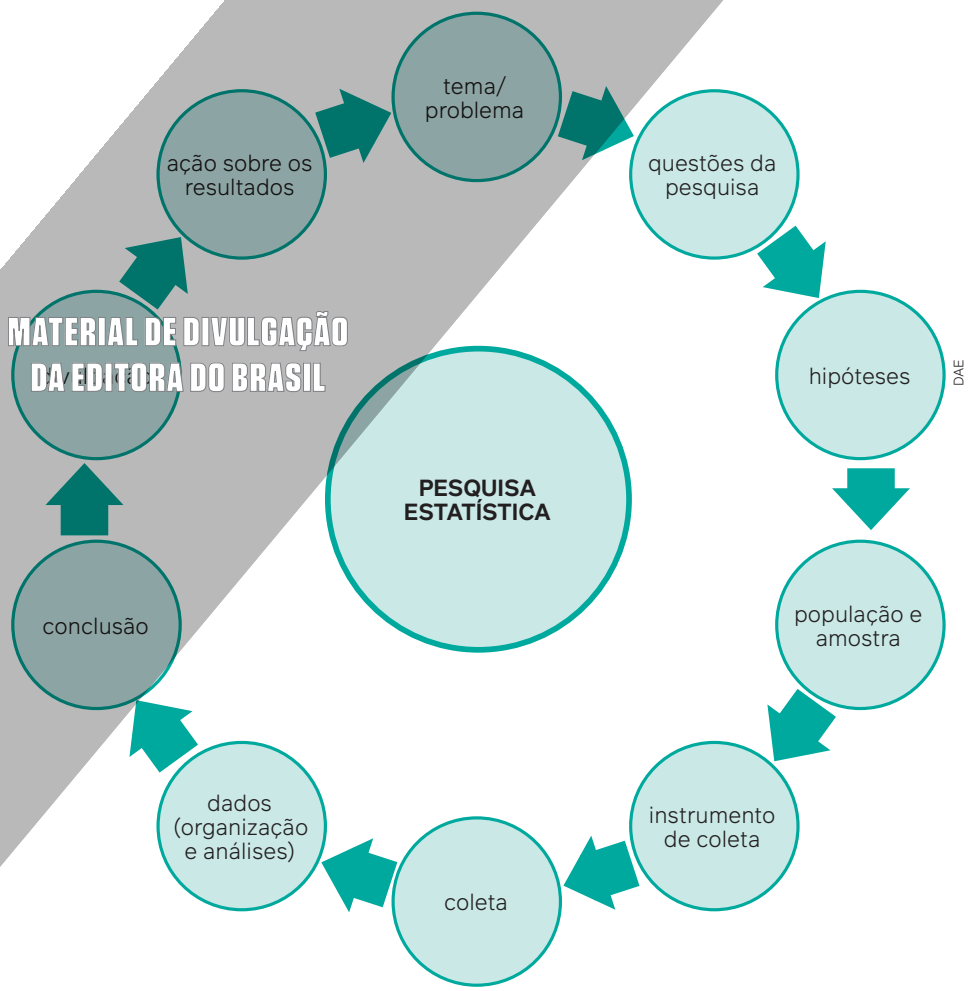
Conclusão e divulgação dos resultados

A conclusão requer análise crítica e reflexiva dos dados. Nesta etapa é importante produzir um texto, uma reportagem, um infográfico, um artigo que sintetize as principais descobertas da pesquisa, comparando-as com as hipóteses iniciais. Esses dados devem ser compartilhados para conhecimento de todos, seja por meio de redes sociais, murais, apresentação em eventos, publicação em jornais etc.

Atuação sobre os resultados da pesquisa

Apesar de não ser imprescindível em uma pesquisa estatística, a atuação sobre os resultados tem sido cada vez mais valorizada, uma vez que questiona o pesquisador sobre possíveis ações que possam ser efetivamente implementadas para minimizar ou resolver o problema observado na pesquisa.

No caso da pesquisa sobre as crianças em situação de rua, podem ser feitas várias ações, como um mapeamento das ruas onde há crianças trabalhando para que os órgãos competentes atuem ou uma campanha nas redes sociais para auxiliar as famílias dessas crianças. A ação escolhida irá depender da questão problematizadora e da resposta encontrada. De modo geral, as respostas podem gerar novas perguntas e novas pesquisas.



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

GABARITO

Unidade 1

Páginas 48 e 49
Atividades finais

1. a) Frequência absoluta.

b) Frequência relativa.

c) Amplitude, variância e desvio-padrão.

d) Média, moda e mediana.

e) Exemplo de resposta: Coloco esses valores em ordem crescente e observo aquele que ocupa a posição central.

f) Exemplo de resposta: Calculo a média aritmética desses valores; calculo o quadrado da diferença entre cada valor e a média; calculo a média aritmética dos quadrados das diferenças obtidas; extraio a raiz quadrada desse resultado.

g) Não. Quanto maior o desvio-padrão de uma amostra, maior a distribuição desses valores.

h) A moda indica o elemento mais frequente.

i) Mínimo, máximo, mediana, 1º quartil, 3º quartil.

j) Nem sempre. Quando há valores muito grandes ou muito pequenos em relação à maioria dos valores do conjunto de valores, a média aritmética não representa adequadamente esses valores.

2. a

3. c

4. c

5. c

6. c

7. c

8. b

9. c

Unidade 2

Páginas 84 e 85
Atividades finais

1. a) 1140 minutos e 86 400 segundos

b) 10 maneiras

c) 1024

d) 4

e) Permutar é trocar.

f) 60

g) 20

h) Em arranjo, a ordem dos elementos do agrupamento importa, enquanto, na combinação, a ordem não altera o agrupamento.

2. e

3. b

4. e

5. c

6. d

7. b

8. b

9. b

10. b

11. d

12. b

13. d

14. e

Unidade 3

Páginas 128 e 129
Atividades finais

1. a) $\frac{1}{2}$

b) Todo experimento cujo resultado depende exclusivamente do acaso.

c) Representa o conjunto formado por todos os resultados possíveis.

d) Representa o conjunto formado por todos os resultados favoráveis para a realização desse evento.

e) Significa um evento impossível de ocorrer.

f) Significa um evento certo.

g) 97,2%

h) Quando a intersecção entre eles é vazia.

i) Quando a realização de um deles não interfere na realização do outro.

j) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2. e

3. e

4. d

5. d

6. c

7. d

8. e

9. b

10. b

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Competências gerais da BNCC

Competências Gerais da Educação Básica
1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 9-10. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 19 jun. 2020.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias	
1	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
EM13MAT101	Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT102	Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias	
EM13MAT103	Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
EM13MAT104	Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
EM13MAT105	Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
EM13MAT106	Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
2	Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
EM13MAT201	Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
EM13MAT202	Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
EM13MAT203	Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
3	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
EM13MAT301	Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT302	Resolver e elaborar problemas envolvendo as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT303	Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
EM13MAT304	Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
EM13MAT305	Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
EM13MAT306	Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
EM13MAT307	Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias	
EM13MAT308	Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
EM13MAT309	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT310	Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
EM13MAT311	Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
EM13MAT312	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
EM13MAT313	Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
EM13MAT314	Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
EM13MAT315	Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
EM13MAT316	Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).
4	Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
EM13MAT401	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
EM13MAT402	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
EM13MAT403	Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações [illegible] rítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
EM13MAT404	Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT405	Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
EM13MAT406	Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
EM13MAT407	Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.
5	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias	
EM13MAT501	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
EM13MAT502	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$
EM13MAT503	Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT504	Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
EM13MAT505	Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
EM13MAT506	Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
EM13MAT507	Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
EM13MAT508	Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
EM13MAT509	Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.
EM13MAT510	Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
EM13MAT511	Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 531-546. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 19 jun. 2020.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Referências

AFONSO, Nathália. Dia da consciência negra: números expõem desigualdade racial no Brasil. *Folha de S.Paulo*, 20 nov. 2019. Disponível em: https://piaui.folha.uol.com.br/lupa/2019/11/20/consciencia-negra-numeros-brasil/. Acesso em: 19 ago. 2020.
Matéria sobre desigualdade salarial, representatividade no poder, violência contra a mulher negra, entre outros temas da desigualdade racial.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Questionário do estudante*. [Brasília, DF]: INEP/MEC, [2009]. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/questionario_estudante/questionario_estudante_enade_2009.pdf. Acesso em: 16 jun. 2020.
Esse documento é um questionário utilizado no Enade, prova que avalia cursos de Ensino Superior no Brasil.

CAMARGO, Isabela. Previsão do tempo para terça-feira, 01/10/2019, Brasil. *G1*, São Paulo, 1 out. 2019. Disponível em: https://g1.globo.com/noticia/2019/10/01/previsao-do-tempo-para-terca-feira-01102019-brasil.ghtml. Acesso em: 16 jun. 2020.
Essa página, publicada na parte da manhã, contém a previsão do tempo para o dia 1 de outubro de 2019.

CENTRO de previsão de tempo e estudos climáticos. [*S. l.*]: CPTEC-INPE, [2020]. Disponível em: https://tempo.cptec.inpe.br/. Acesso em: 24 abr. 2020.
Nesse *site*, encontram-se dados do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais com relação ao clima em todo o Território Nacional.

DANTAS, Carlos Alberto Barbosa. *Probabilidade*: um curso introdutório. São Paulo: Edusp, 2013. v. 10.
Esse livro traz noções básicas de probabilidade e pode apoiar tanto os estudantes do Ensino Médio quanto aqueles de cursos de probabilidade em nível de graduação.

FLEITAS, Carlos. Máquina de Galton virtual. *In*: GEOGEBRA. [*S. l.*: *s. n.*], c2020. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/zfnMZw7T. Acesso em: 2 jul. 2020.
Nessa página, você encontra uma simulação da máquina de Galton em que é possível iniciar e parar o processo dela e ainda manipular sua velocidade.

HAZZAN, S. *Combinatória e probabilidade*. São Paulo: Saraiva, 2019. (Fundamentos de Matemática elementar, v. 5).
O livro aborda o estudo da análise combinatória e do cálculo de probabilidades. No cálculo de probabilidades, é dada ênfase maior ao princípio fundamental da contagem.

HOGBEN, Lancelot. *Maravilhas da Matemática*: influência e função matemática nos conhecimentos humanos. Porto Alegre: Globo, 1958.
Esse livro mostra, de forma didática e curiosa, algumas das influências das funções matemáticas no conhecimento humano.

HUFF, Darrell. *Como mentir com estatística*. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016.
Publicado pela primeira vez em 1954, esse livro continua atual e relevante nesses tempos de internet, ao abordar o mau uso da estatística para maquiar dados e validar opiniões e ao questionar o grau de confiança que devemos ter nas análises estatísticas.

IBGE. População residente segundo as unidades da federação e municípios. *Diário Oficial da União*, 28 ago. 2019. Disponível em: https://www.jusbrasil.com.br/diarios/258713194/dou-secao-1-28-08-2019-pg-374?ref=previous_button/. Acesso em: 16 jun. 2020.
Nesse documento, há dados do IBGE referentes à população de estados e de algumas cidades do Brasil.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, Davi. *Matemática comercial, Matemática financeira e Estatística descritiva*. São Paulo: Atual Editora, 2013. (Fundamentos de Matemática Elementar, v. 11).
Esse livro apresenta, entre outros assuntos, as bases da Estatística e alguns conceitos, como medidas de dispersão, regressão linear, probabilidade e distribuições.

LAUNAY, Mikaël. *A fascinante história da Matemática*. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2019.
Esse livro mostra as ideias que provavelmente, desde a Pré-História, inspiraram o avanço da humanidade usando a matemática.

LIVIO, Mario. *Deus é matemático?* Rio de Janeiro: Record, 2010.
Nesse livro, o autor apresenta suas ideias a respeito da inexplicável eficiência da Matemática em formular as leis da natureza e faz uma relação curiosa entre a mente humana e o mundo científico.

MAGALHÃES, Marcos N.; LIMA, Antonio Carlos P. de. *Noções de probabilidade e estatística*. São Paulo: Edusp, 2002.
Esse livro contém uma introdução à probabilidade e à estatística e estabelece relações entre estatística descritiva, probabilidade e variáveis aleatórias.

MEMÓRIA, José Maria Pompeu. *Breve história da Estatística*. Brasília, DF: Embrapa Informação Tecnológica, 2004. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~vicente/JMPMemoria_Historia_Estatistica.pdf. Acesso em: 21 maio 2020.
Essa obra faz parte da série Texto para discussão, da Embrapa, cujo objetivo é divulgar novas ideias para serem discutidas em diferentes áreas científicas e, assim, aperfeiçoá-las. O livro conta a história da Estatística destacando a influência mútua das ideias dos pensadores mais representativos dessa ciência.

MORGADO, Augusto César de O.; CARVALHO, João Bosco P. de; CARVALHO, Paulo Cezar P.; FERNANDEZ, Pedro. *Análise combinatória e probabilidade*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2020. (Coleção do Professor de Matemática).
Esse livro apresenta o estudo de combinações, arranjos e permutações que fazem parte da análise combinatória, além de outras técnicas que auxiliam na resolução de problemas.

O ATLAS. *In*: ATLAS DO DESENVOLVIMENTO HUMANO NO BRASIL. [*S. l.*]: Pnud: Fundação João Pinheiro: Ipea, [201-?]. Disponível em: http://www.atlasbrasil.org.br/2013/pt/o_atlas/o_atlas_. Acesso em: 19 ago. 2020.
O Atlas contém diversas pesquisas sobre os 5 565 municípios distribuídos nas cinco macrorregiões do Brasil.

PEDRERO, Agnès. Concentração de gases do efeito estufa bate recorde em 2018, diz ONU. *Folha de S.Paulo*, São Paulo, 25 nov. 2019. Disponível em: https://www1.folha.uol.com.br/ambiente/2019/11/concentracao-de-gases-do-efeito-estufa-bate-recorde-em-2018-diz-onu.shtml. Acesso em: 15 jun. 2020.
Matéria sobre o aumento da concentração de gases do efeito estufa na atmosfera.

WHEELAN, Charles. *Estatística*: o que é, para que serve, como funciona. Rio de Janeiro: Zahar, 2016.
O autor desse livro mostra que, com os dados certos e as ferramentas estatísticas adequadas, é possível compreender conceitos estatísticos importantes para a vida cotidiana, como inferência, correlação, análise de dados etc.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

ISBN 978-85-10-08363-8