LUCIANA MARIA TENUTA DE FREITAS (COORDENAÇÃO)
ADILSON LONGEN
RODRIGO MOROZETTI BLANCO

PNLD 2021 • OBJETO 2
CÓDIGO DA COLEÇÃO
0149P21202
CÓDIGO DO LIVRO
0149P21202133

ENTER AÇÃO MATEMÁTICA

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO • VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO

O TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR MEIO DA FUNÇÃO DO 1º GRAU

ENSINO MÉDIO
Matemática e suas Tecnologias

Editora do Brasil

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

ENTRE AÇÃO

MANUAL DO PROFESSOR

MATEMÁTICA

O TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR MEIO DA FUNÇÃO DO 1º GRAU

Luciana Maria Tenuta de Freitas (Coordenação)

Mestre em Ensino de Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC-Minas)

Bacharel e licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Assessora pedagógica da Educação Básica, com atuação na formação de professores

Adilson Longen

Doutor em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Mestre em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Professor do Ensino Médio

Rodrigo Morozetti Blanco

Mestre em Matemática com linha de pesquisa em Filosofia da Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat)

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP)

Professor da Educação Básica com atuação na formação de professores

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Ensino Médio

1ª edição

São Paulo, 2020

Editora do Brasil

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Longen, Adilson
Interação matemática : o tratamento da informação e a resolução de problemas por meio da função do 1º grau / Adilson Longen, Rodrigo Morozetti Blanco ; coordenação Luciana Maria Tenuta de Freitas. -- 1. ed. -- São Paulo : Editora do Brasil, 2020. -- (Interação)

ISBN 978-85-10-08356-0 (aluno)
ISBN 978-85-10-08357-7 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) 2. Matemática e suas tecnologias (Ensino médio) I. Blanco, Rodrigo Morozetti. II. Freitas, Luciana Maria Tenuta de. III. Título IV. Série.

20-38725 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Maria Alice Ferreira - Bibliotecária - CRB-8/7964

© Editora do Brasil S.A., 2020
Todos os direitos reservados

Direção-geral: Vicente Tortamano Avanso
Direção editorial: Felipe Ramos Poletti
Gerência editorial: Erika Caldin
Supervisão de arte: Andrea Melo
Supervisão de editoração: Abdonildo José de Lima Santos
Supervisão de revisão: Dora Helena Feres
Supervisão de iconografia: Léo Burgos
Supervisão de digital: Ethel Shuña Queiroz
Supervisão de controle de processos editoriais: Roseli Said
Supervisão de direitos autorais: Marilisa Bertolone Mendes

Supervisão editorial: Rodrigo Pessota
Consultoria técnico-pedagógica: Antonio Vicente Marafioti Garnica, Eduardo Wagner e Maria Cristina Bonomi
Edição: Adriana Soares Netto, Daniel Leme, Everton José Luciano, Katia Simões de Queiroz e Marcos Gasparetto
Assistência editorial: Juliana Bomjardim, Viviane Ribeiro e Wagner Razvickas
Especialista em revisão e copidesque: Elaine Cristina da Silva
Copidesque: Gisélia Costa, Ricardo Liberal e Sylmara Beletti
Revisão: Amanda [illegible] Almeida, Fernanda Sanchez, Flávia Gonçalves, Gabriel Ornelas, Jonathan Busato, Mariana Paixão, Martin Gonçalves e Rosani Andreani
Pesquisa iconográfica: [illegible]
Assistência de arte: Daniel Souza
***Design* gráfico:** Talita Lima
Capa: Megalo Design
Imagem de capa: akinbostanci/iStockphoto.com, AlexSecret/iStockphoto.com, AndreaAstes/iStockphoto.com e Korovin/iStockphoto.com
Edição de arte: Paula Coelho e Talita Lima
Ilustrações: Mauro Salgado, Reinaldo Vignati, Tarcísio Garbellini, Fábio Nienow
Editoração eletrônica: JS Design
Licenciamentos de textos: Cinthya Utiyama, Jennifer Xavier, Paula Harue Tozaki e Renata Garbellini
Controle de processos editoriais: Bruna Alves, Carlos Nunes, Rita Poliane, Terezinha de Fátima Oliveira e Valéria Alves

1ª edição, 2020

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Editora do Brasil

Rua Conselheiro Nébias, 887
São Paulo/SP – CEP 01203-001
Fone: +55 11 3226-0211
www.editoradobrasil.com.br

Caro professor

A implementação da proposta do Novo Ensino Médio é um desafio para professores e estudantes. Por meio desta coleção, pretendemos auxiliá-lo nessa importante jornada.

Para que as aprendizagens escolares capacitem os jovens a atuar, com competência e responsabilidade, na sociedade em que vivem, é importante que se apropriem da Matemática como uma das diversas formas de leitura da realidade e possam utilizá-la como ferramenta que os auxilie a intervir, de forma consciente e responsável, nessa realidade.

Com esse objetivo, apresentamos a você esta obra, que tem o estudante como centro do processo de aprendizagem, numa proposta interativa e aberta de ensino de Matemática. Os diversos tipos de atividades propiciam aos alunos a discussão de ideias, o desenvolvimento de hipóteses, a argumetação, a elaboração de problemas, o desenvolvimento de projetos, entre outros, enquanto desenvolvem as competências socioemocionais. Dessa forma, a sala de aula passa a ser um espaço vivo, em que ideias matemáticas são discutidas, confrontadas, validadas ou refutadas o tempo todo.

Cabe a você ser o organizador/mediador desse processo estimulando as discussões, promovendo debates, orientando as reformulações, valorizando as produções e o posicionamento dos estudantes, o que contribui para o desenvolvimento integral deles.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Este Manual foi elaborado visando orientá-lo nesse processo. Esperamos que você possa aproveitar nossas sugestões de forma criativa, desenvolvendo e ampliando o trabalho de acordo com suas possibilidades e com a realidade em que está inserido.

Os autores

SUMÁRIO

O NOVO ENSINO MÉDIO V

A BNCC E O NOVO ENSINO MÉDIO VI

A BNCC e o letramento matemático VII

ABORDAGEM TEÓRICO-METODOLÓGICA IX

O desenvolvimento de competências e habilidades IX

A resolução de problemas e a investigação matemática X

O papel do erro XII

O trabalho em grupo XII

O pensamento computacional XIV

AVALIAÇÃO XIV

A CULTURA JUVENIL, A CONSTRUÇÃO DE UMA CONVIVÊNCIA DE PAZ E O PROJETO DE VIDA XVII

A cultura juvenil XVII

A construção de uma convivência de paz XVIII

O projeto de vida XXI

A ORGANIZAÇÃO DA OBRA XXIII

I. O Manual do Professor XXIII

II. O Livro do Estudante XXIII

1. A organização dos livros XXIII

1.1 Quadro de conteúdos XXIV

2. A organização das unidades XXVII

2.1 Os eixos XXVII

2.2 As seções XXIX

2.3 Outros recursos XXX

3. Conexões & projetos XXX

REFERÊNCIAS XXXII

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS PARA ESTE LIVRO XXXVII

Objetivos XXXVII

Justificativas XXXVII

Conexões com outras áreas do conhecimento XXXVII

Temas Contemporâneos Transversais abordados no livro XXXVIII

Cronograma XXXVIII

Unidade 1 – Função afim XXXIX

Objetivos XXXIX

Justificativa XXXIX

Competências e habilidades da BNCC trabalhadas nesta unidade XXXIX

Competências gerais XXXIX

Competências específicas e habilidades de Matemática XXXIX

Resoluções e comentários XL

Unidade 2 – Progressão aritmética, funções e sistemas lineares LV

Objetivos LV

Justificativa LV

Competências e habilidades da BNCC trabalhadas nesta unidade LV

Competências gerais LV

Competências específicas e habilidades de Matemática LVI

Resoluções e comentários LVI

Unidade 3 – Raciocínio lógico e tratamento da informação LXXXIX

Objetivos LXXXIX

Justificativa LXXXIX

Competências e habilidades da BNCC trabalhadas nesta unidade LXXXIX

Competências gerais LXXXIX

Competências específicas e habilidades de Matemática XC

Resoluções e comentários XC

Conexões & projetos CIV

Objetivos CIV

Justificativa CIV

Competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) CIV

Competências gerais trabalhadas nos projetos CIV

Projeto 1 CV

Objetivos CV

Competências específicas de Matemática: 1, 3, 4 e 5 CVI

Orientações ao professor CVI

Projeto 2 CVIII

Objetivos CVIII

Competências específicas de Matemática 1, 2, 3, 4 e 5 CVIII

Orientações ao professor CIX

ATIVIDADES COMPLEMENTARES CXI

REFERÊNCIAS CXII

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

O NOVO ENSINO MÉDIO

As mudanças trazidas pelo Novo Ensino Médio visando a formação integral dos estudantes propõem que as aprendizagens escolares os capacitem para que ao final desta etapa de escolaridade estejam aptos a atuar, com competência e responsabilidade, na sociedade em que vivem.

Segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio:

> [...] formação integral: é o desenvolvimento intencional dos aspectos físicos, cognitivos e socioemocionais do estudante por meio de processos educativos significativos que promovam a autonomia, o comportamento cidadão e o protagonismo na construção de seu projeto de vida.

BRASIL. Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes [...]. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, n. 224, p. 21, 22 nov. 2018. Disponível em: http://www.in.gov.br/materia/-/asset_publisher/Kujrw0TZC2Mb/content/id/51281622. Acesso em: 1 ago. 2020.

No Novo Ensino Médio, os currículos são compostos por duas partes que se integram e se complementam: a **formação geral básica** e os **itinerários formativos**.

Na **formação geral básica** os currículos e as propostas pedagógicas devem garantir as aprendizagens essenciais definidas na BNCC, das quatro áreas de conhecimento: **Linguagens e suas Tecnologias**, **Matemática e suas Tecnologias**, **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, bem como desenvolver as competências gerais para a Educação Básica e as competências específicas e habilidades de cada área, definidas na BNCC, de modo integrado e articulado, considerando ainda o contexto histórico, econômico, social, ambiental, cultural local, do mundo do trabalho e da prática social.

Os **itinerários formativos** possibilitam aos estudantes fazer escolhas que irão compor seu currículo para aprofundar seus conhecimentos ou para se preparar para o mundo do trabalho. Quatro itinerários estão diretamente relacionados a cada área do conhecimento e um quinto itinerário é destinado à formação técnica e profissional.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Os itinerários são orientados por meio de quatro eixos estruturantes:

GoodStudio/Shutterstock.com

I – investigação científica: supõe o aprofundamento de conceitos fundantes das ciências para a interpretação de ideias, fenômenos e processos para serem utilizados em procedimentos de investigação voltados ao enfrentamento de situações cotidianas e demandas locais e coletivas, e a proposição de intervenções que considerem o desenvolvimento local e a melhoria da qualidade de vida da comunidade;

II – processos criativos: supõe o uso e o aprofundamento do conhecimento científico na construção e criação de experimentos, modelos, protótipos para a criação de processos ou produtos que atendam a demandas para a resolução de problemas identificados na sociedade;

III – mediação e intervenção sociocultural: supõem a mobilização de conhecimentos de uma ou mais áreas para mediar conflitos, promover entendimento e implementar soluções para questões e problemas identificados na comunidade;

IV – empreendedorismo: supõe a mobilização de conhecimentos de diferentes áreas para a formação de organizações com variadas missões voltadas ao desenvolvimento de produtos ou prestação de serviços inovadores com o uso das tecnologias.

BRASIL. Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes [...]. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, n. 224, p. 21, 22 nov. 2018. Disponível em: http://www.in.gov.br/materia/-/asset_publisher/Kujrw0TZC2Mb/content/id/51281622. Acesso em: 1 ago. 2020.

A BNCC E O NOVO ENSINO MÉDIO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) está estruturada com base em **dez competências gerais** que devem ser desenvolvidas pelos estudantes desde a Educação Infantil até o Ensino Médio.

Competências gerais

1. **Conhecimento**
Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. **Pensamento científico, crítico e criativo**
Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. **Repertório cultural**
Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4. **Comunicação**
Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. **Cultura digital**
Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6. **Trabalho e projeto de vida**
Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7. **Argumentação**
Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8. **Autoconhecimento e autocuidado**
Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9. **Empatia e colaboração**
Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

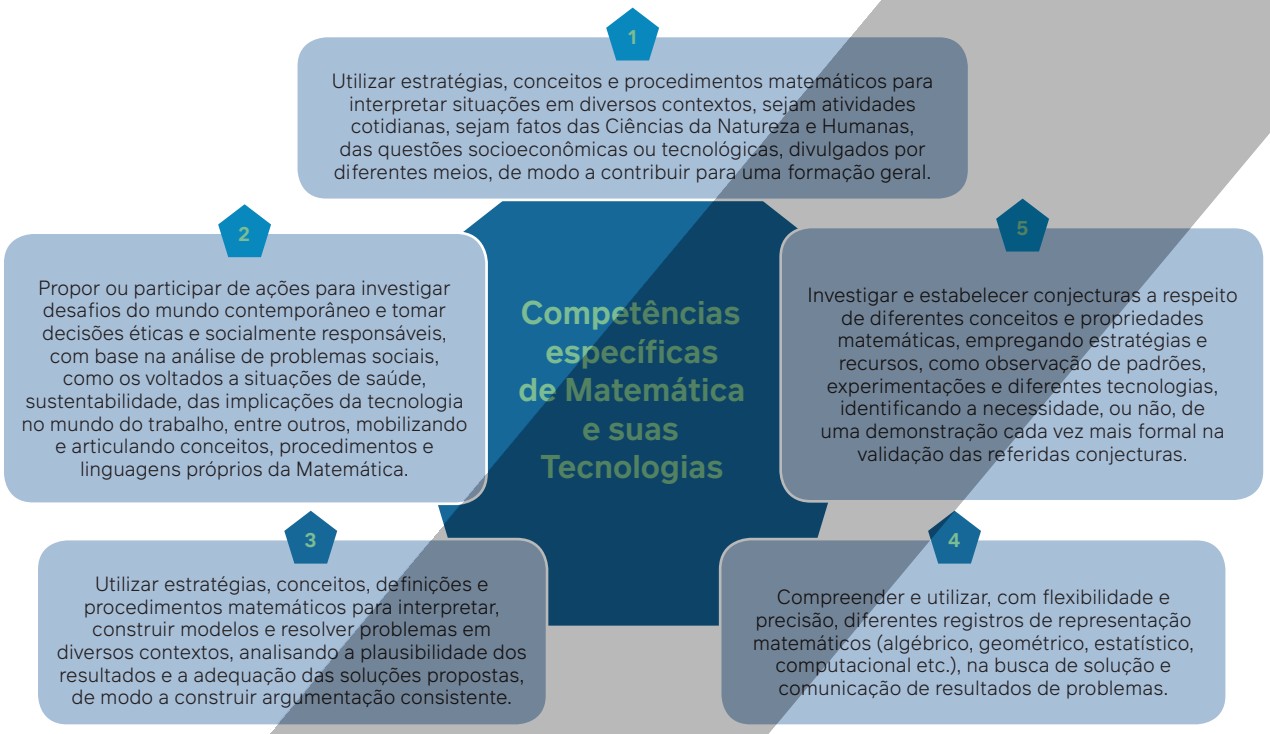
10. **Responsabilidade e cidadania**
Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

DAE

Fonte: BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 9. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 20 maio 2020.

As quatro áreas de conhecimento estabelecidas para o Ensino Médio estão definidas por meio de **competências específicas** que se articulam às competências gerais. No caso da área de **Matemática e suas Tecnologias** são cinco competências específicas, e cada uma delas se desdobra em um conjunto de habilidades que devem ser desenvolvidas ao longo dos três anos do Ensino Médio.



DAE

Fonte: BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 531. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 20 maio 2020.

Nesse novo contexto, a palavra-chave passa a ser **flexibilidade** e esta é a característica da coleção de Matemática que você tem em mãos. Esta obra foi escrita para atender à **formação geral básica** e atende às 10 competências gerais, às 5 competências específicas e às 43 habilidades [illegible] e suas Tecnologias.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

A BNCC e o letramento matemático

De acordo com o que propõe a BNCC, o desenvolvimento das habilidades e competências no Ensino Médio está articulado às "aprendizagens essenciais estabelecidas para o Ensino Fundamental" devendo consolidá-las, ampliá-las e aprofundá-las.

Para tanto devemos observar que:

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do **letramento matemático**, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição). (BRASIL, 2018, p. 266).

E ainda que:

> A área de Matemática, no **Ensino Fundamental**, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No **Ensino Médio**, na área de **Matemática e suas Tecnologias**, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade. (BRASIL, 2018, p. 471).

As mudanças proporcionadas pela BNCC ainda nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental são de grande importância para a compreensão da Matemática como uma disciplina muito mais ampla do que somente o trabalho com as operações básicas e o campo numérico.

Visando dar continuidade à proposta de desenvolvimento do letramento matemático do Ensino Fundamental, é essencial promover no Ensino Médio a consolidação, o aprofundamento e a ampliação do trabalho com as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, com foco na formulação e resolução de problemas em contextos variados, fazendo uso das ferramentas matemáticas e dos conhecimentos adquiridos previamente.

Temos ainda que:

> Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior. (BRASIL, 2018, p. 528).

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

O documento afirma ainda que:

> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos **processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas**. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2018, p. 529).

Assim, fica evidente o fato de que saber Matemática não se resume aos conteúdos específicos ou aos procedimentos de cálculo estudados, mas principalmente em compreender que o estudante letrado matematicamente é aquele que consegue argumentar claramente sobre determinada situação, defender seus pontos de vista, raciocinar sobre caminhos a serem escolhidos, priorizar questões a serem resolvidas, comunicar e ler com

propriedade as informações que lhe são apresentadas. A Matemática tecnicista, que perdurou na escola por muito tempo, hoje dá lugar à valorização do pensamento matemático e do raciocínio sobre os fatos, sejam eles relacionados ao cotidiano do estudante ou a descobertas que ampliarão seu repertório.

Ao se apresentar dessa forma, a BNCC estimula você, professor, e os estudantes a buscar maneiras diferentes de ensinar e aprender Matemática, promovendo o protagonismo, a troca de ideias e o compartilhamento de estratégias, além da autonomia dos estudantes para avançar em suas aprendizagens escolhendo estratégias próprias de resolução dos problemas que encontrarem.

Apresentamos a seguir a abordagem teórico-metodológica que fundamenta esta coleção e o modo que, por meio dela, a obra dialoga com a proposta da BNCC para o Ensino Médio.

ABORDAGEM TEÓRICO-METODOLÓGICA

A Matemática tem diferentes aplicações na vida das pessoas e estabelece relações com diversas áreas. É papel da escola mostrar essas relações, que podem ou não ser evidentes. Além disso, o trabalho com a Matemática deve levar os jovens a compreender a origem histórica de alguns conceitos, verificar suas aplicações nas Ciências da Natureza, no campo da Biologia, da Física e da Química; nas diferentes expressões da área de Linguagens, em especial na música, nas artes plásticas, nas artes cênicas e na dança; nas Ciências Humanas e Sociais, como nos estudos geográficos de escala ou topologia; enfim: perceber que a Matemática marca sua presença na vida das pessoas.

Constatar essa presença, fazer bom uso dela e aprender Matemática de maneira reflexiva, investigativa e valorizando os conhecimentos prévios é um caminho que auxilia o estudante, tanto dentro quanto fora da escola.

O desenvolvimento de competências e habilidades

Por meio do trabalho proposto nesta coleção pretendemos que os estudantes desenvolvam competências e habilidades de Matemática e suas Tecnologias, previstas na BNCC.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Porém, é de suma importância, compreender que:

> Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da ida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p. 8).

As competências gerais dizem respeito à formação integral dos estudantes e estão relacionadas tanto a seu desenvolvimento cognitivo quanto ao socioemocional.

Nesta obra, as competências gerais são desenvolvidas por meio dos diversos tipos de atividades propostos. A **competência geral 2**, por exemplo, que se refere ao exercício da curiosidade intelectual por meio da investigação, da análise crítica, da imaginação e da criatividade para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas, é trabalhada em vários momentos, uma vez que a resolução de problemas e a investigação matemática, que serão detalhadas a seguir, constituem o eixo condutor de todo o trabalho. Ao resolverem as atividades em grupos ou em duplas discutindo ideias, argumentando com

base em fatos e informações confiáveis e confrontando diferentes pontos de vista, os estudantes mobilizam a **competência geral 7**. Nesse processo desenvolvem também a **competência geral 4**, ao usarem diferentes formas de linguagem para se expressar. As atividades em grupos são ricas em oportunidades para mobilizar também a **competência geral 9**, que envolve o desenvolvimento de atitudes e valores como empatia e respeito, favorecendo o diálogo e uma convivência harmônica entre os jovens.

Na parte específica deste manual estão apontadas e exemplificadas as competências gerais trabalhadas em cada livro, unidade por unidade.

Já as habilidades se relacionam ao "saber fazer" e indicam o que os estudantes são capazes de aprender e a desenvolver. Elas são associadas a verbos como identificar, associar, analisar, investigar, argumentar, criar, entre outros. Também podem ser entendidas como objetivos de conhecimento, ou seja, aquilo que se espera do estudante e de seu desenvolvimento ao final do Ensino Médio.

Como apresentadas anteriormente, na área de Matemática e suas Tecnologias, as habilidades estão agrupadas nas 5 competências específicas indicadas na BNCC sem uma ordem preestabelecida, porque, diferentemente do Ensino Fundamental, seus códigos não indicam uma progressão, o que favorece a flexibilidade dos currículos e das propostas pedagógicas das escolas.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

De modo resumido, as habilidades que integram a competência específica 1 estão relacionadas aos contextos externos à Matemática. Na competência específica 2 estão as habilidades que se relacionam ao contexto social. A competência específica 3 envolve habilidades que se referem à resolução de problemas e à modelagem matemática, e na competência 4 estão agrupadas aquelas que dizem respeito a diferentes representações para um mesmo objeto matemático. Finalmente, na competência específica 5 encontram-se as habilidades que envolvem um tratamento mais formal da Matemática. Assim agrupadas, habilidades que se referem a um mesmo conteúdo são associadas a diferentes competências específicas. Esse é o caso, por exemplo, do estudo das probabilidades, que está ligado às competências específicas 1, 3 e 5 por meio das habilidades EM13MAT106, EM13MAT311, EM13MAT312 e EM13MAT511.

Na parte específica deste manual estão indicadas as habilidades trabalhadas em cada unidade com os respectivos exemplos.

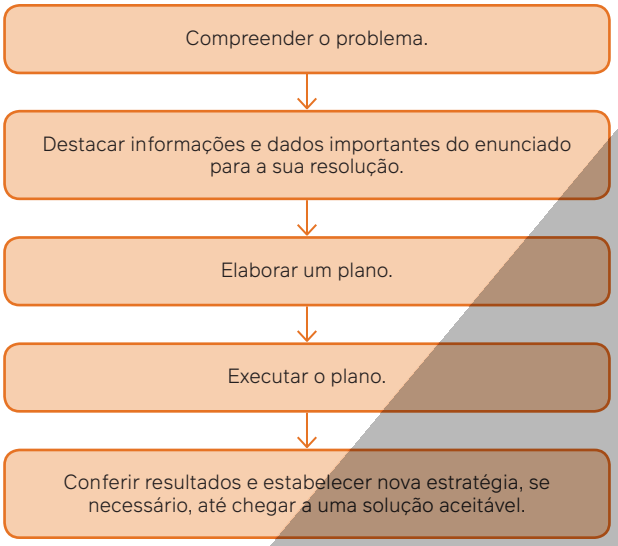
A resolução de problemas e a investigação matemática

Resolver problemas é uma prática diária, cotidiana e envolve os mais diversos tipos de situações. Para resolver um problema é necessário levantar hipóteses, discutir possibilidades, criar estratégias com base em conhecimentos prévios identificados visando atingir novos objetivos. Por mais simples que se configure, todo problema desafia quem o enfrenta fomentando o gosto pela descoberta de formas para resolvê-lo. Ao sentir-se desafiado, o estudante desprende um esforço cognitivo que lhe possibilita ir além. Junto com o trabalho de resolução de problemas, a investigação matemática estimula a busca por soluções criativas, inovadoras ou não, para situações que façam parte do cotidiano dos estudantes, dentro ou fora da escola.

Quando analisamos o trabalho em sala de aula sob o viés da resolução de problemas, entendemos que o desenvolvimento do pensamento matemático sempre parte de um problema e este é o meio pelo qual a Matemática será apreendida. Ao longo do processo histórico de constituição dos conceitos e conhecimentos matemáticos, o avanço dos estudos e as descobertas

foram ocasionados pela necessidade de solucionar problemas nos mais variados contextos. Para resolvê-los, o processo de investigação ganhou força e se configurou como um caminho importante para se chegar a conclusões sobre temas matemáticos.

George Polya (1978) resume as etapas de resolução de um problema conforme esquema a seguir.



DAE

Sob essa perspectiva, fica evidente sua proximidade com o que propõe a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) quando trata do letramento matemático e do desenvolvimento da autonomia e do protagonismo do estudante.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Segundo Sternberg (2001), partimos do pressuposto de que problema é toda situação inédita que leva o aluno a pensar e utilizar ferramentas mentais conhecidas por ele para se chegar a uma solução, o que também condiz com as ideias apresentadas pela BNCC.

Ao longo desta obra, além do trabalho fundamentado na resolução de problemas, as atividades tiveram como base a proposta da investigação matemática, em que os estudantes buscam a solução para situações que podem envolver um ou mais problemas. No trabalho com investigação matemática, o caminho a ser percorrido é mais importante do que a meta final. Nesse sentido, cabe a você acompanhar o estudante ao longo de todo o processo.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p. 23):

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os colegas e o professor.

O seu papel, professor, tanto no campo da resolução de problemas quanto nas investigações matemáticas é saber dosar e fazer as perguntas certas nos momentos certos, sem dar respostas, criando um movimento de construção do espírito investigativo, com a intenção de levar os estudantes a alcançar conquistas maiores por seus próprios meios promovendo, assim, a autonomia e a busca pelo aprendizado.

Os processos de investigação matemática estão estreitamente relacionados ao desenvolvimento da competência específica 5 da área de Matemática e suas tecnologias proposta na BNCC (BRASIL, 2018, p. 531) para o Ensino Médio:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

A proposta desta obra é recriada a todo momento, de acordo com os caminhos

traçados por você e pelo próprio estudante, por isso é essencial que a criação de processos investigativos aconteça de maneira eficiente, visando manter a atenção e a curiosidade do estudante de forma efetiva de acordo com o que você propõe e pelas descobertas próprias e da turma. Cabe também a você proporcionar momentos de trocas entre os estudantes e de criação de novas estratégias. Dessa forma, a construção se tornará muito mais significativa.

O papel do erro

Os estudantes devem desenvolver o hábito de encarar suas dificuldades e entender que os erros são parte integrante do processo de aprendizagem, não com medo, mas com a percepção de que são parte da caminhada rumo ao acerto. O próprio processo de investigação matemática favorece essa percepção: nele o estudante constrói, reconstrói, avalia e reavalia a situação quantas vezes for necessário. Segundo Rico (1995), os erros contêm um potencial educativo que precisa ser bem explorado. O ato de explicar e dar sentido aos próprios erros é uma atividade altamente estimuladora e provocativa para os estudantes.

É importante lembrar que o estudante só adquire esse tipo de postura com a prática, tornando-se um hábito esse movimento. Não é com uma ou duas propostas que a turma adquire esse posicionamento questionador e protagonista, mas com o trabalho de diferentes habilidades, com o olhar de que é possível explorar as ideias matemáticas de diferentes formas, por diferentes caminhos, partilhando com seus pares e discutindo as estratégias de resolução. Nesse sentido, é papel do estudante argumentar sobre suas ações e dialogar com você e com os colegas a respeito das ideias matemáticas, do que entendeu e dos conceitos trabalhados e das habilidades desenvolvidas no processo de aprendizagem.

Você pode organizar debates para que a turma discuta diferentes estratégias de resolução para determinada situação. Ao conhecer diferentes estratégias, ideias e resoluções para um problema específico, o estudante consegue ser protagonista da própria prática e desenvolve autonomia.

O trabalho em grupo

Na perspectiva da resolução de problemas e da investigação matemática que orientam o trabalho desta coleção, a realização das atividades em duplas ou em pequenos grupos tem importância fundamental.

Em seu livro *Planejando o trabalho em grupo* Cohen e Lotan (2017, p. 1) definem esse tipo de trabalho como:

> [...] alunos trabalhando juntos em grupos pequenos de modo que todos possam participar de uma atividade com tarefas claramente atribuídas. Além disso é esperado que os alunos desempenhem suas tarefas sem supervisão direta e imediata do professor.

As autoras defendem que, quando você, professor, propõe uma atividade em grupo e permite que os estudantes se esforcem sozinhos, inclusive cometendo erros, delega autoridade aos estudantes e essa autoridade é a primeira característica-chave do trabalho em grupo.

A construção de um ambiente propício a esse tipo de trabalho, inclusive em relação à forma de constituição dos grupos, pode ocorrer com diálogo sobre os combinados que envolvem a relação entre professor e estudante e entre os próprios estudantes. Além do estímulo a serem autônomos na tomada de decisões, está a seu cargo fazer com que a turma coloque em jogo as decisões tomadas, vivenciando-as.

A segunda característica-chave do trabalho em grupo, ainda segundo as autoras, é que nenhum dos participantes consegue fazer todas as partes da atividade sozinho, ou seja, todos precisam uns dos outros

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

para completar a atividade. A terceira característica-chave está relacionada à natureza das atividades propostas.

> Se o professor quer que os alunos se comuniquem de maneira autônoma e produtiva, eles vão precisar ter algo a respeito do que irão conversar. Se o professor quer que os alunos se engajem em conversas substantivas e de alta qualidade, a atividade precisa estabelecer problemas complexos ou dilemas, ter diferentes soluções possíveis e contar com a criatividade. (COHEN; LOTAN, 2017, p. 2-3).

Nessa perspectiva, trabalhando em duplas ou em pequenos grupos por meio de atividades diversificadas, que envolvem discussões com os colegas, o estudante tem a oportunidade de levantar hipóteses, argumentar, defender suas ideias, mudar de opinião ao ouvir a argumentação do colega e, assim, desenvolver a empatia e o respeito pelo outro, o que contribui para sua formação humana. Esse exercício de respeito às opiniões dos outros, da valorização das diversas ideias apresentadas, com reflexão constante sobre o que o outro pensa, sem pré-julgamentos, desenvolve a escuta ativa e as competências gerais da BNCC 4, 7 e 9 relacionadas ao uso de diferentes linguagens, à argumentação e ao exercício da empatia, do diálogo, da resolução de conflitos e da cooperação, respectivamente.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Ao estudante que desenvolve um trabalho em grupo é dada a oportunidade de reconhecer as próprias emoções frente a opiniões contrárias às suas, ao ser questionado por seu posicionamento. Conflitos de opiniões são constantes na vida em sociedade e o trabalho em grupo se configura uma experiência única no ambiente escolar, observado sob essa perspectiva, e promove o desenvolvimento integral do estudante.

Quando professores e estudantes compreendem a potencialidade de aprendizagem do trabalho em grupo, e incorporam a cultura desse tipo de trabalho, os resultados se efetivam em um ambiente envolto em compreensão, soluções de conflitos, com orientações claras, perguntas pertinentes, bom convívio, respeito e com parceria entre todos os envolvidos no processo.

Uma sugestão para esse tipo de trabalho, inclusive envolvendo turmas com número grande de estudantes, é constituir grupos permanentes para determinado período, um mês por exemplo. Dessa forma, esse mesmo grupo se reúne sempre que forem propostas atividades coletivas. Entre as vantagens desse tipo de organização está a facilidade de você ficar mais próximo dos estudantes para observar suas necessidades e fazer intervenções em relação a conhecimentos, habilidades, atitudes e valores. Seu olhar para o grupo como um todo possibilita a observação mais aguçada de cada estudante.

Nesse tipo de organização envolvendo grupos mais permanentes, as possibilidades de intervenção que atendam às necessidades individuais dos estudantes também se intensificam. Por exemplo, enquanto todos os grupos desenvolvem determinada atividade, você pode pedir a um ou mais estudantes que tenham necessidades comuns de aprendizagem, que se reúnam com você ou com estudantes que não apresentaram a mesma dificuldade, para que haja um atendimento mais específico. A reorganização dos grupos periodicamente, inclusive com a participação dos estudantes para definir critérios de escolha dos integrantes dos novos grupos, é fundamental para que desenvolvam competências ligadas à incorporação de direitos e responsabilidades, ponderação sobre consequências, participação social e liderança, entre outros.

O trabalho em grupo, incorporado como

cultura, transforma consideravelmente os indivíduos de maneira positiva porque proporciona verdadeiro desenvolvimento pessoal e coletivo. A escola tem a oportunidade de tornar esses momentos propícios para a construção de uma sociedade mais empática, de respeito entre todos, a partir do momento que os estudantes conseguem fazer um paralelo entre suas práticas ao longo do processo de aprendizagem e as atividades cotidianas.

O pensamento computacional

Diferentemente do que se possa imaginar, o pensamento computacional não está necessariamente associado à programação de computadores, ao uso de tecnologias ou à comunicação pela internet.

Veja no esquema a seguir o que se entende por cultura digital, tecnologia digital e pensamento computacional, nas etapas da educação básica.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

DAE

O pensamento computacional se relaciona aos processos de pensamento utilizados para modelar problemas e resolvê-los de forma eficiente, determinando soluções genéricas para classes inteiras de problemas e pode ser decomposto em quatro etapas (PENSAMENTO..., 2019):

- decomposição – divisão de um problema em partes menores;
- padrões – identificação de um ou mais padrões que geram o problema;
- abstração – seleção dos dados essenciais de um problema;
- algoritmo – estabelecimento de uma sequência ou ordem em que o problema será resolvido.

O pensamento computacional se relaciona aos processos de pensamento utilizados para formular e resolver problemas e suas soluções. Ele enfatiza que as soluções precisam ser representadas de tal forma que possam ser realizadas tanto por humanos como por "agentes de processamento de informações". Wing (PENSAMENTO..., 2019), André (PENSAMENTO..., 2019).

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 474), o pensamento computacional possibilita ao estudante "compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos".

Assim, o trabalho voltado para a autonomia do sujeito, por meio da investigação matemática e da resolução de problemas, conforme proposto nesta coleção, contém elementos essenciais para o desenvolvimento do pensamento computacional dos estudantes. Esse trabalho é potencializado nesta obra por meio de um dos eixos que estruturam as unidades de cada livro chamado "Algoritmos e fluxogramas". Informações detalhadas deste eixo encontram-se na explicação da organização do Livro do Estudante, neste manual.

AVALIAÇÃO

A avaliação da aprendizagem dos estudantes deve estar alinhada à proposta metodológica desenvolvida. Mudanças na

concepção de ensino/aprendizagem e na abordagem dos conteúdos implicam repensar as finalidades da avaliação, o que e como se avalia, em um trabalho cotidiano que pressupõe uma variedade de situações de aprendizagem, inclusive coletivas.

Quando se trabalha na perspectiva do desenvolvimento de competências e habilidades, o conceito de avaliação se amplia e deve levar em conta possibilidades de avaliar aprendizagens que vão além dos tópicos de conteúdo específico. Várias competências e habilidades de Matemática dizem respeito à investigação, à discussão de ideias, à capacidade de argumentação que demandam outros tipos de avaliação.

ysclips design/Shutterstock.com

Alinhado à perspectiva metodológica aqui adotada está o conceito de avaliação mediadora proposto por Hoffmann (2006). Segundo a autora:

> O significado primeiro e essencial da avaliação mediadora é o "prestar muita atenção" nas crianças, nos jovens, eu diria "pegar no pé" desse aluno mesmo, insistindo em conhecê-lo melhor, em entender suas falas, seus argumentos, teimando em conversar com ele em todos os momentos, ouvindo todas as suas perguntas, fazendo-lhes novas e desafiadoras questões, "implicantes", até, na busca de alternativas para uma ação educativa voltada para a autonomia moral e intelectual. (HOFFMANN, 2006).

Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) lembram que as investigações matemáticas são atividades de aprendizagem e, como tais, precisam ser avaliadas para que você possa saber se está havendo progresso dos estudantes de acordo com suas expectativas. Caso contrário, precisará fazer possíveis intervenções, retomadas ou replanejamento de seu trabalho. Além disso, por meio da avaliação os estudantes tomam conhecimento de como o desempenho deles é visto por você e podem refletir sobre aspectos em que precisam avançar. Esses autores apresentam algumas possibilidades de instrumentos de avaliação:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- **relatórios escritos**, em que um estudante ou um grupo de estudantes apresenta o trabalho desenvolvido. Nesse tipo de relatório podem ser apresentadas tanto as conclusões como todo o processo percorrido durante a investigação;
- **observação informal** dos estudantes enquanto realizam a tarefa e apresentam suas conclusões à turma. Nesses momentos podem ser observados aspectos tais como o modo de mobilizar os conhecimentos matemáticos formais e informais, o modo como entendem o processo investigativo e qual é o papel de cada estudante no desenvolvimento da atividade proposta. Cabe a você, quando oportuno, fazer perguntas que evidenciem como os estudantes estão pensando;
- **apresentações orais**, nas quais os estudantes têm a oportunidade de apresentar a você e aos colegas os resultados de suas investigações. Esses momentos se constituem uma oportunidade tanto para você avaliá-los quanto para o aprendizado dos

estudantes, uma vez que possibilitam a eles desenvolver processos de comunicação e de argumentação.

Outros tipos de instrumentos podem ser indicados para avaliar os estudantes, de forma coerente com o trabalho desenvolvido nesta obra.

- **Autoavaliação:** o estudante deve interpretar o próprio desempenho em relação a atitudes, habilidades desenvolvidas e desempenho intelectual. Para que esse instrumento seja aplicado de forma adequada, é necessário que os estudantes estejam bem preparados e que os critérios sejam bem definidos. Com a colaboração dos estudantes, podem ser elaboradas fichas para que eles preencham.
- **Prova em duplas:** nesse tipo de avaliação, o estudante tem oportunidade de discutir ideias, exercitar a argumentação, aprender a trabalhar de forma colaborativa e aprimorar as relações sociais. Para favorecer o desenvolvimento dessas habilidades, é fundamental que as questões propostas nesse tipo de prova propiciem o debate entre os estudantes.
- **Prova individual:** na seleção dos conteúdos deve-se dar ênfase àqueles realmente significativos. As questões devem ser planejadas e elaboradas com a intenção de levar o estudante a refletir e a estabelecer relações e não simplesmente repetir informações. No momento da escolha do instrumento de avaliação, observe se é compatível com o tipo de conteúdo a ser avaliado e com os objetivos que se deseja alcançar.
- **Portfólio:** é uma coletânea das produções dos estudantes durante determinado período. Pode conter produções de textos, atividades diversas, trabalhos e avaliações para que o próprio estudante acompanhe a evolução de seu processo de aprendizagem.
- **Provas tipo teste:** de tempos em tempos podem ser aplicados testes que simulem exames de vestibulares, Enem e avaliações de larga escala, uma vez que esse tipo de avaliação faz parte da vida dos estudantes, especialmente os do Ensino Médio. Entretanto, é importante lembrar que não é o treinamento sistemático nesse tipo de prova que vai garantir o sucesso dos estudantes. Mais preparados estarão para se sair bem em qualquer tipo de prova os estudantes que desenvolverem um pensamento matemático articulado e que souberam encontrar estratégias para resolver qualquer tipo de problema.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para a utilização de qualquer um desses instrumentos, devem-se ter bem claros os objetivos que orientam sua aplicação. Vasconcellos (2003) aponta questões fundamentais que servem de reflexão na elaboração de instrumentos de avaliação: Como os instrumentos são preparados? Como são aplicados? Como são analisados/corrigidos? Como os resultados são comunicados? E o mais importante, o que vai se fazer com os resultados?

É importante ressaltar a importância das **avaliações diagnósticas** que, independentemente dos tipos de instrumentos utilizados, devem auxiliá-lo na identificação do ponto de partida dos processos de ensino tendo como referência as aprendizagens ocorridas nos processos anteriores.

Para Frade, Val e Bregunci (2014, p. 39), esse tipo de avaliação:

> [...] é entendida também como a avaliação que ocorre ao longo dos processos de ensino e aprendizagem, visando a sua regulação. Ou seja, a avaliação diagnóstica pode ser entendida como aquela que verifica se o aluno aprendeu aquilo que lhe foi ensinado, a fim de identificar dificuldades de aprendizagem a serem superadas.

Ainda de acordo com as autoras, seja qual for a interpretação, a **avaliação diagnóstica** é parte de um percurso de aprendizagem cuja finalidade é delimitar pontos de partida e/ou de retomada para o ensino.

Cabe a você, professor, na elaboração do planejamento de uma etapa de trabalho, estabelecer momentos de avaliação prevendo, inclusive, um número de aulas para possíveis retomadas, de acordo com as necessidades de aprendizagem dos estudantes, evidenciadas nas avaliações.

Ao compreender o processo de aprendizagem, o educador desenvolve a percepção de que os erros e as dúvidas dos estudantes, numa dimensão educativa, são elementos altamente significativos para o desenvolvimento da ação educacional. São eles que fornecem informações sobre o nível de desenvolvimento das habilidades de cada estudante em resolver problemas, em utilizar adequadamente as diversas formas de linguagem para comunicar suas ideias, no desenvolvimento de raciocínios e análises e na integração de todos esses aspectos para promover seu desenvolvimento, tanto em termos cognitivos quanto pessoais.

É importante lembrar que as avaliações diagnósticas devem considerar, além dos aspectos relativos aos conhecimentos e habilidades, aqueles relacionados a atitudes e valores que os estudantes carregam consigo ao chegar à escola. As atividades em grupo são uma ótima oportunidade para que atitudes e valores sejam avaliados e problematizados, com o objetivo de provocar reflexões que os levem a se desenvolver nos aspectos cognitivo e pessoal. Em alguns casos, podem ser implementados projetos que potencializem atitudes e valores positivos nos estudantes.

Nessa perspectiva a avaliação deixa de ser o momento terminal do processo ensino-aprendizagem para se transformar em um movimento contínuo, com momentos constantes de busca da compreensão dos avanços e das dificuldades do estudante. Aprimorar os processos avaliativos de forma a torná-los mais justos, equilibrados e eficientes é realmente um grande desafio para os educadores.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

A CULTURA JUVENIL, A CONSTRUÇÃO DE UMA CONVIVÊNCIA DE PAZ E O PROJETO DE VIDA

A cultura juvenil

De acordo com Correa, Alves e Maia (2014, p. 15-16) a expressão “culturas juvenis” se refere:

> [...] a modos de vida específicos e práticas habituais dos jovens, que expressam certos significados e valores tanto no âmbito das instituições quanto no âmbito da própria vida cotidiana.

Para essas autoras, são muitas as imagens que se relacionam à ideia de juventude, podendo estar associadas a uma fase da vida, a uma determinada faixa etária, ou ainda, a um jeito de ser.

> Se estivermos considerando a pluralidade de maneiras e símbolos que representam e expressam a juventude, é porque há também variadas formas

> e lugares de construção de identidades juvenis. Para que compreendamos as diferenças e semelhanças, é preciso investigar as experiências que os sujeitos vivenciam em seu contexto social e os significados que atribuem a elas. (CORREA; ALVES; MAIA, 2014, p. 14).

Quanto aos procedimentos para se trabalhar as culturas juvenis, as autoras apontam para a importância da cultura na construção das identidades dos jovens, possibilitando "práticas coletivas e de interesses comuns, sobretudo em torno dos diferentes estilos musicais". (CORREA; ALVES; MAIA, 2014, p. 15).

Elas recomendam música, danças, grafite, esportes e tecnologias como importantes mediadores da construção de vivências de jovens. No portal EMDiálogo (UFF, [20--?]) podem ser encontradas várias sugestões para o trabalho com as culturas juvenis.

Por meio das atividades propostas nesta coleção os jovens terão a oportunidade de exercitar a convivência discutindo ideias, confrontando pontos de vista, argumentando, ouvindo os colegas, desenvolvendo projetos, entre tantas outras possibilidades. Exercitam assim o diálogo, a empatia e resolvem conflitos. Todas essas experiências, vivenciadas no dia a dia e no ambiente escolar, oferecem aos jovens a oportunidade de se desenvolver como sujeitos capazes de construir uma sociedade em que os indivíduos reconheçam que há diferenças entre as pessoas, que essas diferenças são legítimas e devem ser respeitadas para que haja convivência de paz. Em todos os livros da coleção, a última parte intitulada **Conexões & Projetos** oferece várias oportunidades de se trabalhar, por meio de projetos, as culturas juvenis.

A construção de uma convivência de paz

Entre as competências gerais expressas na BNCC, duas são particularmente importantes para a construção dessa convivência de paz. Uma delas é a **competência geral 8**:

> Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas. (BRASIL, 2018, p. 10).

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Essa competência diz respeito ao autocuidado e ao desenvolvimento da autoconsciência, da autoestima, da autoconfiança, do equilíbrio emocional, da saúde e do desenvolvimento físico. Ao longo de todo o Ensino Médio, é seu papel estar atento aos sofrimentos psíquicos dos estudantes e manter um ambiente de diálogo, de escuta e abertura para acolher as demandas deles no que diz respeito à prevenção do suicídio e da automutilação.

HilaryGraphic/Shutterstock.com

Recomenda-se a toda a comunidade escolar – que inclui professores, pais, estudantes e demais funcionários da instituição – a adoção de um olhar atento para prevenir a automutilação e o suicídio entre os estudantes, bem como uma postura ativa no sentido de intervir, quando necessário, para buscar o encaminhamento de situações identificadas para tratamento, na intenção de controlar fatos prejudiciais à saúde mental e evitar a violência autoprovocada.

De acordo com duas pesquisas realizadas pela Universidade Federal de São Paulo (ESTUDOS..., 2019), a atenção às rotinas dos jovens é fundamental como possibilidade de prevenção do suicídio.

Segundo os pesquisadores (TAVARES, 2019), quadros depressivos aliados a sentimentos de desesperança e inutilidade podem desencadear comportamento suicida. As pesquisas revelaram que os rapazes, a partir da puberdade, apresentam taxas de suicídio de 3 a 4 vezes maiores que as meninas. As possíveis causas estão ligadas às características de impulsividade e agressividade, além do uso de drogas, como tabaco e álcool. No caso das meninas, as pesquisas apontaram como possíveis causas crises e instabilidades de ordem financeira, econômica e social.

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, a Constituição Federal, o Estatuto da Criança e do Adolescente, a Política Nacional de Prevenção da Automutilação e do Suicídio e as leis que regem a educação no Brasil, é importante destacar de maneira enfática o posicionamento ético que se espera da escola na sociedade brasileira.

> O governo do Brasil optou pela abordagem interdisciplinar em uma ação conjunta entre os Ministério da Saúde (MS) e da Mulher, da Família e dos Direitos Humanos (MMFDH).
>
> As políticas públicas de prevenção ao suicídio e automutilação pretendem, de modo inédito, realizar ações programáticas que alterem os índices de suicídio e autolesão entre crianças e jovens (PREVENÇÃO..., [2019]).

Diante do que foi exposto, torna-se parte do trabalho de todos os profissionais responsáveis pela educação escolar se abrir ao diálogo em relação aos sofrimentos psíquicos e emocionais dos jovens, buscando caminhos para auxiliá-los quando for o caso. O artigo intitulado "A escola tarnsdisciplinar: lugar para falar sobre saúde mental" (LOPES, 2019) apresenta sugestões de como a escola pode atuar na detecção precoce e na prevenção de casos de suicídio, depressão, ansiedade e outros transtornos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Outra importante competência expressa na BNCC (BRASIL, 2018, p. 10) para a construção de uma convivência de paz entre os jovens é a **competência geral 9**.

> Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

Por meio de diversas atividades propostas nesta obra os estudantes têm a oportunidade de desenvolver essa competência, que diz respeito à valorização da diversidade, ao reconhecimento do outro, ao acolhimento da perspectiva do outro, ao diálogo e à convivência, à colaboração e à resolução de conflitos. Na parte específica deste manual estão indicadas algumas delas.

Entretanto, a convivência diária entre os jovens pode favorecer um tipo de atitude negativa denominada *bullying*.

> De origem inglesa e sem tradução no Brasil, é utilizado para qualificar comportamentos agressivos no âmbito escolar, praticados tanto por meninos quanto por meninas. Os atos de violência (física ou não) ocorrem de forma intencional e repetitiva contra um ou mais alunos que se encontram impossibilitados de fazer frente às agressões sofridas. Tais comportamentos não apresentam motivações específicas ou justificáveis. Em última instância, significa dizer que, de forma "natural", os mais fortes utilizam os mais frágeis como meros objetos de diversão, prazer e poder, com o intuito de maltratar, intimidar, humilhar e amedrontar suas vítimas. (SILVA, 2010, p. 7).

Consiste em um tipo de agressão que se repete intencionalmente e desqualifica o outro na forma de constrangimento, que muitas vezes está relacionado a características físicas ou identitárias da vítima. Cláudio Marques da Silva Neto (2018) afirma que:

> O *bullying* já é considerado um problema de saúde pública no Brasil. Uma pesquisa do Fundo das Nações Unidas para Infância (Unicef) aponta o Brasil como quarto país com maior prática de *bullying* no mundo. Dados mostram que 43% dos estudantes de 11 a 12 anos disseram ter sido vítimas de violência física ou psicológica na escola pelo menos uma vez em outubro do ano passado.

Segundo Ana Beatriz Barbosa Silva (2010, p. 7), as formas de *bullying* são:

- Verbal (insultar, ofender, falar mal, colocar apelidos pejorativos, "zoar")
- Física e material (bater, empurrar, beliscar, roubar, furtar ou destruir pertences da vítima)
- Psicológica e moral (humilhar, excluir, discriminar, chantagear, intimidar, difamar)
- Sexual (abusar, violentar, assediar, insinuar)
- Virtual ou *Ciberbullying* (*bullying* realizado por meio de ferramentas tecnológicas: celulares, filmadoras, internet etc.)

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Ainda segundo a autora, seguem algumas formas de se reconhecer quando uma criança ou adolescente está sofrendo *bullying* na escola:

> No recreio encontram-se isoladas do grupo, ou perto de alguns adultos que possam protegê-las; na sala de aula apresentam postura retraída, faltas frequentes às aulas, mostram-se comumente tristes, deprimidas ou aflitas; nos jogos ou atividades em grupo sempre são as últimas a serem escolhidas ou são excluídas; aos poucos vão se desinteressando das atividades e tarefas escolares; e em casos mais dramáticos apresentam hematomas, arranhões, cortes, roupas danificadas ou rasgadas. (SILVA, 2010, p. 10).

Para que o *bullying* seja combatido ou minimizado na escola, é importante que você esteja atento a esse tipo de situação. No caso de identificar essa prática, o tema deve ser trazido para discussão entre os estudantes e, por meio do diálogo, inclusive com a conscientização dos agressores, devem ser estabelecidos combinados que assegurem o respeito e a dignidade no ambiente escolar.

No artigo intitulado "5 ações para promover a saúde mental na escola" (SEMIS, 2018) são propostas atitudes que visam à prevenção e à promoção da saúde mental dos estudantes. Entre elas estão a atenção permanente ao tema, o investimento no trabalho das competências socioemocionais, conforme já indicamos anteriormente, e o envolvimento e o empoderamento dos alunos. Algumas sugestões de atividades para promover o combate à violência nas escolas, em especial o *bullying*, podem ser encontradas na aula proposta por Lérida Oliveira (2012), no Portal do Professor, no *site* do Ministério da Educação.

Nas *Cartilhas sobre como enfrentar a violência e promover a cultura de paz nas escolas* (CARTILHAS..., [2018]), também podem ser encontradas algumas estratégias para promover a cultura de paz entre os estudantes.

O projeto de vida

A Base Nacional Comum Curricular propõe que no Ensino Médio as escolas organizem suas práticas de modo a contemplar o projeto de vida dos estudantes.

De acordo com Moran (2017),

> O projeto ou plano de vida representa o que o indivíduo quer ser e o que ele vai fazer em certos momentos de sua vida, bem como as possibilidades de alcançá-lo. Projeto de vida, num sentido amplo, é tornar conscientes e avaliar nossas trilhas de aprendizagem, nossos valores, competências e dificuldades e também os caminhos mais promissores para o desenvolvimento em todas as dimensões. É um exercício constante de tornar visível, na nossa linha do tempo, nossas descobertas, valores, escolhas, perdas e também desafios futuros, aumentando nossa percepção, aprendendo com os erros e projetando novos cenários de curto e médio prazo. É um roteiro aberto de autoaprendizagem, multidimensional, em contínua construção e revisão, que pode modificar-se, adaptar-se e transformar-se ao longo da nossa vida.

O compromisso com o desenvolvimento integral dos estudantes pressupõe seu desenvolvimento tanto social como pessoal, incluindo uma formação que possibilite a reflexão e possíveis tomadas de decisão a respeito de seu projeto de vida.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 473):

> [...] é papel da escola auxiliar os estudantes a aprender a se reconhecer como sujeitos, considerando suas potencialidades e a relevância dos modos de participação e intervenção social na concretização de seu projeto de vida. É, também, no ambiente escolar que os jovens podem experimentar, de forma mediada e intencional, as interações com o outro, com o mundo, e vislumbrar, na valorização da diversidade, oportunidades de crescimento para seu presente e futuro.

Ao vislumbrar o futuro, os jovens precisam também se preparar para o mercado de trabalho. A **competência geral 6** da BNCC (BRASIL, 2018, p. 9) deixa claro o compromisso da escola nesse sentido.

> Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

O artigo “Como preparar nossos jovens para o mercado de trabalho do futuro?” (PARENTE, 2018), traz uma reflexão sobre as transformações que a escola precisa fazer para formar jovens com as habilidades necessárias a um mercado de trabalho em mudanças constantes e cada vez mais velozes, e apresenta as seguintes estratégias:

> – Encorajar crianças a explorar novos interesses e a encontrar propósitos em pequenos projetos;
> – Ensinar os estudantes a acolher a diversidade de ideias e comportamentos, e a aceitar *feedbacks* (retornos avaliativos);
> – Encorajar a execução de ideias. Inovações não precisam ser grandiosas, podem ser pequenas implementações que mudam processos e fazem a diferença em um ambiente de trabalho e na comunidade onde vivem;
> – Utilizar a escrita e a arte para lidar com emoções e exercer empatia;
> – Dar espaço para que os estudantes explorem e sejam capazes de imaginar;
> – Criar situações que exponham essas crianças a inovações, como visitas a museus, acesso a leituras e cursos sobre temas atuais;
> – Reconfigurar a relação entre professores e estudantes, com o professor sendo mais um mediador inspirador do que um “chefe”.

Esta coleção, por meio de diversos tipos de atividades, que propiciam diferentes tipos de interação entre os colegas e entre os estudantes e o professor, enquanto vivenciam diferentes experiências, oferece a oportunidade a cada jovem de projetar, definir e redefinir o que deseja para sua vida.

Especialmente no trabalho com os projetos, trazidos em cada livro desta coleção na seção **Conexões & Projetos**, os estudantes têm a oportunidade de viver experiências que podem marcar definitivamente a forma como veem o mundo e atuam nele. Essa parte do livro será detalhadamente explicada nas seções relativas ao Livro do Estudante.

Finalmente, alinhada ao Novo Ensino Médio e à BNCC, comprometida com o referencial teórico acima exposto e com as recomendações para a construção de uma cultura de paz e para o projeto de vida dos jovens, esta coleção foi pensada para que os estudantes tenham experiências que os levem a desenvolver um pensamento matemático consistente, [illegible] que aplicam esse conhecimento a outras áreas do conhecimento, [illegible] mundo real, desenvolvendo-se assim como sujeitos autônomos, capazes de atuar com competência e responsabilidade em uma sociedade cada vez mais complexa.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Boyko.Pictures/Shutterstock.com

A ORGANIZAÇÃO DA OBRA

I. O Manual do Professor

É formado por esta parte geral e uma parte específica, de acordo com cada livro.

1. Parte geral	2. Parte específica
Esta primeira parte consta do Manual do Professor em todos os livros da coleção.	A parte específica de cada livro está distribuída nos tópicos a seguir. • Sobre o livro • Objetivos do livro • Justificativa • Conexões com outras áreas de conhecimento • Temas Transversais abordados no livro • Cronograma

Em cada unidade	Em Conexões & projetos
• Objetivos da unidade • Justificativa • Competências gerais comentadas • Competências específicas • Habilidades comentadas • Resoluções e comentários	• Objetivos • Justificativa • Competências gerais trabalhadas em cada projeto comentadas • Objetivos de cada projeto • Competências específicas trabalhadas em cada projeto • Lista de habilidades de cada projeto • Orientações ao professor
Atividades complementares	
Referências comentadas	

Audiovisual
A coleção é acompanhada de seis videotutoriais, um por livro, em que são apresentados os objetivos, a justificativa, a relação com a BNCC e a estrutura de cada material, fornecendo a você, professor, subsídios para seu planejamento, a preparação e condução dos conteúdos. Por se tratar de outra linguagem, o vídeo pode ser uma ferramenta mais clara e acessível para a compreensão da obra.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

II. O Livro do Estudante

Veja a seguir a descrição detalhada de cada parte que integra o Livro do Estudante.

1. A organização dos livros

A forma de organização dos assuntos levou em conta o conhecimento matemático mobilizado e articulado, diferentemente da organização tradicionalmente apresentada. Para favorecer sua autonomia, professor, esta obra foi concebida tendo a flexibilidade como norte. Os seis livros foram elaborados de forma independente, sem uma ordem preestabelecida. Dessa forma, você pode utilizá-los de acordo com sua realidade e do modo que pretende implementar seu planejamento, escolhendo a ordem em que cada livro será trabalhado. Além disso, na medida do possível, as unidades do mesmo livro podem ser trabalhadas na sequência que você julgar conveniente.

Para viabilizar essa proposta, foram reunidos em um mesmo livro assuntos que se relacionam; porém, os livros da coleção não têm caráter sequencial. Apresentamos a seguir o quadro de conteúdos com o resumo de cada unidade dos seis livros.

1.1 Quadro de conteúdos

Unidade 1 – Função afim	**Objetivos** • Estudar e aplicar o raciocínio proporcional. • Conhecer a função afim, identificar as situações que podem ser modeladas por ela e usar procedimentos algébricos e gráficos para resolvê-la. • Resolver e elaborar problemas que envolvam a função afim.	Competências gerais: 2, 4, 5 e 9 Competências específicas: 1, 3, 4 e 5	Habilidades: EM13MAT101 EM13MAT302 EM13MAT401 EM13MAT404 EM13MAT501 EM13MAT510
Unidade 2 – Progressão aritmética, funções e sistemas lineares	**Objetivos** • Investigar as propriedades de uma progressão aritmética, relacioná-la com a função afim e resolver problemas que a envolvam. • Resolver problemas que envolvem sistemas de equações lineares. • Analisar o crescimento linear em situações de juros simples.	Competências gerais: 2, 4, 5 e 9 Competências específicas: 2, 3, 4 e 5	Habilidades: EM13MAT203 EM13MAT301 EM13MAT302 EM13MAT405 EM13MAT507
Unidade 3 – Raciocínio lógico e tratamento da informação	**Objetivos** • Desenvolver noções básicas de linguagem computacional. • Utilizar algoritmos e fluxogramas para descrever procedimentos de execução de uma atividade. • Localizar e analisar informações em textos, tabelas e gráficos estatísticos, assim como construí-los. • Interpretar taxas e índices socioeconômicos de forma crítica.	Competências gerais: 1, 4, 5, 6, 7 e 9 Competências específicas: 1, 3 e 4	Habilidades: EM13MAT102 EM13MAT104 EM13MAT315 EM13MAT405

Unidade 1 – Unidades de medida	**Objetivos** • Entender o que é medir e como as medidas podem ser obtidas. • Conhecer e utilizar as unidades de medida adotadas ou não no Sistema Internacional de Unidades. • Relacionar grandezas fundamentais e derivadas com as respectivas unidades de medida. • Resolver problemas envolvendo precisão de medidas e notação científica.	Competências gerais: 1, 4, 5, 7, 9 e 10 Competências específicas: 1, 2, 3 e 4	Habilidades: EM13MAT103 EM13MAT201 EM13MAT313 EM13MAT314 EM13MAT315 EM13MAT405
Unidade 2 – O estudo das equações do 2º grau	**Objetivos** • Retomar a resolução de equações do 2º grau e obter a fórmula resolutiva. • Utilizar a resolução de equações do segundo grau para resolver problemas. • Obter relações entre raízes e coeficientes de uma equação do segundo grau.	Competências gerais: 1, 2 e 4 Competências específicas: 3 e 4	Habilidades: EM13MAT302 EM13MAT315 EM13MAT405
Unidade 3 – Função quadrática e inequações do 2º grau	**Objetivos** • Utilizar funções do segundo grau para modelar e resolver problemas. • Construir gráficos de funções quadráticas, assim como identificar e calcular as coordenadas do ponto extremo. • Resolver inequações do segundo grau. • Resolver problemas envolvendo funções definidas por mais de uma sentença.	Competências gerais: 2, 4 e 5 Competências específicas: 3, 4 e 5	Habilidades: EM13MAT302 EM13MAT402 EM13MAT404 EM13MAT405 EM13MAT502 EM13MAT506

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Unidade 1 – Tópicos de Matemática Financeira	**Objetivos** • Compreender e usar os conceitos de juros simples e juros compostos. • Calcular capital aplicado após um período nas duas modalidades de juros, diferenciando-as.	Competências gerais: 2, 4, 5 e 9 Competências específicas: 1, 2, 3 e 4	Habilidades: EM13MAT101 EM13MAT104 EM13MAT203 EM13MAT302 EM13MAT303 EM13MAT315 EM13MAT405
Unidade 2 – Função exponencial e função logarítmica	**Objetivos** • Conhecer os logaritmos e entender como aplicá-los. • Modelar, resolver e elaborar situações de crescimento e decrescimento que envolvam funções exponenciais e funções logarítmicas.	Competências gerais: 1, 2, 4, 5 e 9 Competências específicas: 1, 3 e 4	Habilidades: EM13MAT101 EM13MAT304 EM13MAT305 EM13MAT403
Unidade 3 – Sequências numéricas e progressão geométrica	**Objetivos** • Identificar sequências numéricas e sua formação por meio do termo geral. • Relacionar o cálculo de montantes em juros compostos com crescimento em progressão geométrica. • Usar logaritmo para resolver problemas relacionados à progressão geométrica. • Corresponder os termos de uma progressão geométrica com imagens de função exponencial.	Competências gerais: 2, 4 e 9 Competências específicas: 3, 4 e 5	Habilidades: EM13MAT304 EM13MAT305 EM13MAT405 EM13MAT508

Unidade 1 – Estatística descritiva	**Objetivos** • Interpretar criticamente situações socioeconômicas utilizando medidas de tendência central e medidas de dispersão. • Calcular e analisar medidas de tendência central e de dispersão. • Construir e analisar gráficos e diagramas estatísticos.	Competências gerais: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9 e 10 Competências específicas: 2, 3 e 4	Habilidades: EM13MAT202 EM13MAT316 EM13MAT406 EM13MAT407
Unidade 2 – Análise combinatória	**Objetivos** • Empregar diagrama da árvore na resolução de problemas de contagem. • Calcular número de possibilidades de ocorrência de um evento utilizando estratégias de arranjo, combinação, permutação simples e com repetição. • Utilizar os princípios aditivo e multiplicativo de contagem para resolver problemas e criar situações que possam ser resolvidas por eles.	Competências gerais: 2, 4, 5 e 9 Competências específicas: 3 e 4	Habilidades: EM13MAT310 EM13MAT315 EM13MAT405
Unidade 3 – Probabilidades	**Objetivos** • Identificar situações do cotidiano quanto ao uso das probabilidades. • Calcular a probabilidade condicional de dois eventos simultâneos. • Resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de probabilidades.	Competências gerais: 1, 2, 4, 7 e 9 Competências específicas: 1, 3 e 5	Habilidades: EM13MAT106 EM13MAT311 EM13MAT312 EM13MAT511

Unidade 1 – Geometria plana	**Objetivos** • Compreender relações e empregar diferentes métodos para o cálculo de perímetros e áreas de figuras planas. • Resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de perímetros e áreas de polígonos. • Estabelecer relações entre ângulos de um polígono regular e utilizar o conceito de ângulo para elaborar e resolver problemas de ladrilhamento no plano.	Competências gerais: 1, 2, 4, 5, 7 e 9 Competências específicas: 2, 3 e 5	Habilidades: EM13MAT201 EM13MAT307 EM13MAT505
Unidade 2 – Triângulos e geometria das transformações	**Objetivos** • Identificar e compreender diferentes transformações isométricas e homotéticas e usá-las para resolver e elaborar problemas. • Desenvolver noções de Geometria dos Fractais. • Obter relações métricas a partir de semelhança de triângulos. • Estabelecer relações trigonométricas em triângulos e usá-las para resolver e elaborar problemas.	Competências gerais: 1, 2, 3, 4 e 5 Competências específicas: 1 e 3	Habilidades: EM13MAT105 EM13MAT308
Unidade 3 Funções trigonométricas	**Objetivos** • Identificar e relacionar unidades de medidas de ângulos: grau e radiano. • Conceituar circunferência trigonométrica e definir o seno e o cosseno • Definir, construir gráficos e identificar periodicidade das funções seno e cosseno. • Relacionar as funções trigonométricas com fenômenos periódicos e usá-las para resolver e elaborar problemas.	Competências gerais: 1, 2, 4, 5 e 7 Competência específica: 3	Habilidade: EM13MAT306

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Unidade 1 – Os sólidos geométricos	**Objetivos** • Desenvolver noções sobre o método axiomático. • Resolver e elaborar problemas relacionados aos cálculos de medidas de comprimento associados aos elementos de alguns sólidos geométricos. • Retomar planificações de sólidos geométricos. • Resolver e elaborar problemas envolvendo elementos de poliedros. • Investigar e compreender diferentes projeções cartográficas.	Competências gerais: 1, 2, 3, 4, 5 e 9 Competência específica: 5	Habilidade: EM13MAT509
Unidade 2 – Prismas e cilindros	**Objetivos** • Resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de áreas de superfícies e volumes de cilindros e prismas. • Compreender o princípio de Cavalieri para o cálculo de volume de sólidos geométricos e usá-lo para calcular o volume de prismas e cilindros.	Competências gerais: 1, 2, 4, 5 e 9 Competências específicas: 2, 3 e 5	Habilidades: EM13MAT201 EM13MAT309 EM13MAT504
Unidade 3 – Pirâmides, cones e esferas	**Objetivos** • Resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de áreas de superfícies e volumes de pirâmides, cones e esferas. • Compreender o princípio de Cavalieri para a determinação dos volumes de pirâmides, cones e esferas.	Competências gerais: 1, 2, 4 e 7 Competências específicas: 2, 3 e 5.	Habilidades: EM13MAT201 EM13MAT309 EM13MAT504

Além das três unidades, cada livro contém uma parte importante chamada **Conexões & Projetos**, constituída por dois projetos por meio dos quais os estudantes colocam em ação, de forma articulada, as habilidades trabalhadas nas unidades daquele livro. Esta parte será tratada detalhadamente no item IV deste texto.

Ao final de cada livro encontra-se a **Caixa de ferramentas**, cuja proposta descrevemos a seguir.

- A **Caixa de ferramentas**

Para garantir a independência dos livros, selecionamos alguns tópicos que darão suporte para o desenvolvimento de determinadas unidades e que aparecem em mais de um livro. Dessa forma, não é necessário seguir uma ordem estabelecida para o estudo dos seis livros que compõem a coleção. A **Caixa de ferramentas** de cada livro é constituída dos tópicos relacionados àquele livro e será acessada pelos estudantes quando necessário, favorecendo tanto a autonomia deles quanto a sua, uma vez que possibilita diferentes modos de apresentação e ordenação do conteúdo. O ícone da **Caixa de ferramentas** aparece em um boxe com o respectivo texto na primeira vez que algum tópico é utilizado na unidade.

Os tópicos que integram a **Caixa de ferramentas** são textos relacionados a alguns conhecimentos desenvolvidos nos anos finais do Ensino Fundamental e servem de fonte de consulta e retomadas que se façam necessárias.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 471),

> No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração.

Seguem os tópicos da **Caixa de ferramentas** e as respectivas habilidades dos anos finais do Ensino Fundamental que foram retomadas e/ou aprofundadas.

Tópicos	Habilidades da BNCC
Algoritmos e fluxogramas	EF06MA04, EF06MA34, EF07MA07, EF07MA26, EF07MA28, EF08MA10, EF08MA11, EF08MA16, EF09MA17
Recursos digitais	EF06MA23, EF07MA23, EF08MA23
Unidades de medida	EF06MA24, EF06MA27, EF07MA29, EF07MA30, EF08MA19, EF08MA20, EF08MA21, EF09MA04, EF09MA18
Conjuntos numéricos	EF07MA03, EF07MA10, EF08MA05, EF09MA01, EF09MA02
A linguagem das funções	EF09MA06
Cálculo de áreas	EF07MA31, EF07MA32, EF07MA33, EF08MA19
Pesquisa estatística	EF06MA33, EF07MA36, EF08MA27, EF09MA23
Fundamentos de geometria plana	EF07MA23, EF07MA24, EF08MA15, EF08MA17, EF09MA14, EF09MA12, EF09MA13, EF09MA16, EF09MA17

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Os textos são acompanhados de exemplos que auxiliarão os estudantes na compreensão dos tópicos retomados. A **Caixa de ferramentas** favorece aos estudantes o desenvolvimento dos processos de leitura e pode ser explorada da forma que você julgar conveniente. Veja as duas sugestões a seguir.

- Situação 1: ao fazer o planejamento, selecione previamente, na **Caixa de ferramentas**, o tópico ou os tópicos necessários ao desenvolvimento de determinado assunto.

Oriente, então, os estudantes para que façam um estudo prévio individualmente como tarefa de casa ou, na sala de aula, discutindo com o colega.

- Situação 2: o próprio estudante, quando sentir necessidade, recorre à **Caixa de ferramentas** para estudar o tópico que lhe convier. Espera-se, assim, contribuir para a formação de um jovem autônomo, capaz de identificar suas necessidades de aprendizagem e, com base na própria iniciativa, buscar caminhos para aprender.

2. A organização das unidades

Tendo a resolução de problemas como eixo condutor de todo o trabalho, as unidades que compõem cada livro são constituídas por um percurso de investigação com sucessivas problematizações que possibilitam aos estudantes a elaboração de conclusões e o estabelecimento de novos conceitos. Da forma como estão propostas, as atividades propiciam o desenvolvimento de processos como investigação, construção de modelos e resolução de problemas.

Ao longo de cada unidade, trabalhando ora individualmente, ora em duplas ou em pequenos grupos, os estudantes têm diversas oportunidades de mobilizar sua forma própria de raciocinar, fazer representações, se comunicar e argumentar. São apresentadas situações que os levam a discutir, propor e validar hipóteses, desenvolvendo assim conceitos, representações e procedimentos cada vez mais complexos.

Para propiciar esse trabalho, as unidades são constituídas por **eixos, seções** e **outros recursos**, descritos a seguir.

2.1 Os eixos

Em todos os livros da coleção, sempre que possível, três elementos estão presentes: **Produção de textos**, **Algoritmos e fluxogramas** e **Recursos digitais**.

Por perpassarem as unidades, fazendo a articulação entre os assuntos trabalhados, esses elementos foram denominados **eixos** e garantem a diversidade de atividades, o desenvolvimento de habilidades e a participação dos estudantes como sujeitos ativos no processo de ensino e aprendizagem. Em uma mesma unidade podem aparecer diversos eixos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- **Produção de textos**

A **competência geral 7** da BNCC (BRASIL, 2018, p. 9) propõe que o estudante deve ser capaz de:

> Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

Visando desenvolver essa competência, em todas as unidades de todos os livros da coleção são propostas atividades em que os estudantes produzirão textos tanto oralmente como por escrito. Por meio desses textos eles descrevem formas de pensar, elaboram hipóteses, apresentam argumentações, elaboram problemas, entre outros. Esse eixo favorece, particularmente nos jovens, o desenvolvimento da capacidade de argumentação.

Quanto à elaboração de problemas, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 536) propõe que:

> Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada.

Um dos pontos de destaque que evidenciam a autonomia no desenvolvimento do pensamento matemático é a elaboração de problemas sobre determinado conceito. Saber elaborar uma situação-problema requer um esforço cognitivo muito maior do que uma simples solução, além de necessitar de conhecimento mais profundo sobre o assunto tratado.

- **Algoritmos e fluxogramas**

Esse eixo favorece o desenvolvimento do pensamento computacional, que está presente na BNCC desde o 6º ano do Ensino Fundamental. Esse tipo de pensamento permite que, diante de um problema, o sujeito possa dividi-lo em partes, identificar padrões, imaginar uma solução que seja válida para diversos problemas e definir uma sequência de passos que os resolvam. Esses passos podem ser expressos por meio de um algoritmo, que por sua vez pode ser representado por um fluxograma.

Os algoritmos e fluxogramas são trabalhados nesta coleção como um eixo que perpassa todos os livros, sempre que possível, envolvendo os mais diversos assuntos, visando desenvolver as seguintes habilidades:

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Considerando que nem todos os estudantes tiveram a oportunidade de desenvolver as habilidades relativas à elaboração de algoritmos e fluxogramas propostas na BNCC para o Ensino Fundamental, esse assunto é tratado em um tópico da **Caixa de ferramentas**, onde constam conceitos, como a descrição do que é um algoritmo, para que serve, tipos de algoritmos, fluxograma e os símbolos utilizados na sua elaboração.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- **Recursos digitais**

Em diversas atividades, em todos os livros, os estudantes fazem uso de planilhas eletrônicas, *softwares* de geometria dinâmica ou de calculadoras.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 536),

> [...] o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações.

A importância deste eixo fica evidente devido ao fato de que dezessete habilidades, distribuídas nas cinco competências específicas de Matemática, se referem ao uso das tecnologias digitais para a etapa do Ensino Médio na BNCC.

Neste caso também, a **Caixa de ferramentas** inclui um tópico em que são apresentadas noções básicas de como utilizar planilhas eletrônicas, *softwares* de geometria dinâmica e calculadoras científicas.

2.2 As seções

UNIDADE

Nas **aberturas de unidades** são propostas algumas questões para serem debatidas com a turma, cujo objetivo é mobilizar os conhecimentos anteriores e provocar a necessidade de aquisição de novas habilidades e/ou conteúdos conceituais.

Essas questões podem ser trabalhadas na perspectiva da "sala de aula invertida" (BACICH; MORAN, 2018), em que o estudante, de alguma forma, tem acesso prévio ao assunto que será tratado. Essa é uma das metodologias ativas propostas como forma de colocar o estudante no centro do processo de aprendizagem. Com essa perspectiva, o problema ou as questões na abertura de cada unidade podem ser propostos com antecedência, envolvendo inclusive algum tipo de pesquisa, de modo que ao iniciar a unidade o estudante já tenha tido a oportunidade de pensar sobre o assunto que será abordado. A primeira aula daquela unidade passa a ser, então, um momento de ricas discussões sobre o assunto, com a contribuição de cada estudante.

Para pensar e discutir

Esta seção aparece ao longo de toda a unidade, permeando o texto. O objetivo é colocar o estudante como participante ativo do próprio processo de aprendizagem, potencializando de forma sistemática sua capacidade de fazer inferências pelo aprimoramento de processos de leitura. É constituída por situações que levam o estudante a pensar individualmente, seja durante a aula ou como tarefa de casa. As questões propostas podem envolver investigação de propriedades, elaboração de novos problemas, conclusões ou sínteses que podem ser apresentadas por meio de um texto argumentativo ou de resoluções matemáticas para justificar os argumentos apresentados na discussão, conforme o caso, o que propicia mais uma oportunidade para o desenvolvimento da capacidade de argumentar dos estudantes.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Em seguida, as questões são discutidas em duplas, em grupos ou com toda a turma, sob sua mediação, professor.

Incentivar os estudantes a pensar sobre as questões propostas e apresentar argumentos bem fundamentados é seu papel nesse tipo de atividade. No momento das discussões, cabe também a você garantir um ambiente de respeito e, por meio de novos questionamentos, promover o desenvolvimento de ideias matemáticas e corrigir os conceitos envolvidos.

Para explorar

Os estudantes resolvem as atividades propostas nesta seção sempre em duplas ou em pequenos grupos. Eles trocam ideias ao investigar regras, padrões e propriedades matemáticas e ao fazer análises críticas, criativas e propositivas envolvendo diversos tipos de situações. É hora de observar, testar, comparar, discutir, argumentar, ouvir o colega e explicar seu pensamento.

As atividades propostas nesta seção possibilitam também o desenvolvimento do processo de metacognição (LEITE; DARSIE, 2011), por meio do qual os estudantes têm a oportunidade de pensar sobre como aprendem, promovendo o autoconhecimento, a autonomia intelectual e o controle das próprias atividades cognitivas.

Durante a realização das atividades, cabe a você incentivá-los a se expressarem com clareza, comunicarem suas formas de pensar e apresentarem argumentos que justifiquem suas afirmações.

Para retomar

Esta seção retoma problemas propostos na própria unidade, geralmente no início, aplicando conhecimentos recém-adquiridos. A ideia é trazer diversas formas de abordagem do assunto, relacioná-las e retomá-las, de modo a contribuir para o desenvolvimento de habilidades.

Aproveitando a oportunidade

Seção de aprofundamento de assuntos não especificados na BNCC por meio do processo de investigação, envolvendo problematizações decorrentes dos temas principais trabalhados na unidade. Você tem autonomia para desenvolver ou não esse tópico, de acordo com as necessidades dos estudantes e a disponibilidade de tempo.

Atividades

Blocos de atividades ao final de cada tópico. Podem ser abertas ou fechadas e, em alguns casos, envolver investigações matemáticas, produção de textos ou elaboração de algoritmos e fluxogramas. Nesses blocos podem haver atividades para ser resolvidas em grupos ou em duplas, usando ou não algum tipo de tecnologia digital.

Atividades finais

Relação de atividades envolvendo todo o assunto estudado na unidade. Podem ser abertas ou não. Inclui questões de concursos, de vestibulares e do Enem. Podem ser propostas como tarefa de casa ou para serem resolvidas durante a aula. Você pode selecionar algumas atividades para serem resolvidas em duplas e discutidas coletivamente.

Visando contribuir para a autonomia dos estudantes, as respostas dessas atividades constam no final do Livro do Estudante.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

2.3 Outros recursos

Os seguintes recursos podem aparecer ao longo das unidades, quando oportuno.

Vozes

Dados biográficos de autores, personalidades de destaque e outros, com descrição de suas trajetórias e importância.

Análise e contexto

Textos do cotidiano (notícias, ensaios, divulgação científica) para análise e estudo. São acompanhados de questões.

INFOGRÁFICO

Os infográficos apresentam uma síntese de assuntos relacionados à unidade e podem ou não ser acompanhados de questões para discussão.

3. Conexões & projetos

A quarta parte do livro do estudante, logo depois da terceira unidade, é constituída por uma seção denominada **Conexões & Projetos** formada por dois projetos que visam levar os estudantes a colocar em ação, de forma articulada, as habilidades trabalhadas nas unidades de cada livro. Por meio desses projetos, eles terão a oportunidade de desenvolver competências relacionadas a saberes e vivências da vida cotidiana usando diversos tipos de tecnologia e os conhecimentos matemáticos adquiridos. São abordados temas de interesse dos jovens, como a propagação de *fake news*, e ligados aos Temas Contemporâneos Transversais, como educação financeira e cultura indígena, entre outros.

Esse tipo de trabalho colabora para os estudantes se reconhecerem como sujeitos, considerando suas potencialidades e as possibilidades de participação e intervenção na sociedade em que vivem, o que contribui para a articulação de seu projeto de vida. A escolha dos temas também levou em conta a possibilidade de oferecer aos jovens a oportunidade de conhecer novas realidades, de se aprofundarem em temas relevantes para sua vida e, em alguns casos, fazer intervenções na comunidade. Esse é o caso, por exemplo do projeto sobre ações

sustentáveis, por meio do qual os estudantes desenvolvem ações de impacto social tendo como base o estudo de custos e rendimentos, visando ao melhor aproveitamento dos recursos disponíveis para a solução de um problema coletivo.

É um trabalho que mobiliza competências diversas, como: comunicar-se por meio de instrumentos produzidos pelas tecnologias e pela cultura moderna; ter domínio e responsabilidade diante das mais diversas situações; e respeitar os princípios éticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social.

A proposta de **Conexões & Projetos** visa, de acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 465):

- favorecer a atribuição de sentido às aprendizagens, por sua vinculação aos desafios da realidade e pela explicitação dos contextos de produção e circulação dos conhecimentos;
- garantir o protagonismo dos estudantes em sua aprendizagem e o desenvolvimento de suas capacidades de abstração, reflexão, interpretação, proposição e ação, [illegible] economia pes[illegible] intelectual e política;
- promover a aprendizagem colaborativa, desenvolvendo nos estudantes a capacidade de trabalharem em equipe e aprenderem com seus pares; e
- estimular atitudes cooperativas e propositivas para o enfrentamento dos desafios da comunidade, do mundo do trabalho e da sociedade em geral, alicerçadas no conhecimento e na inovação.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Essa parte da obra oferece, ainda, aos estudantes a oportunidade de (BNCC, 2018, p. 467):

- compreender e utilizar os conceitos e teorias que compõem a base do conhecimento científico-tecnológico, bem como os procedimentos metodológicos e suas lógicas;
- conscientizar-se quanto à necessidade de continuar aprendendo e aprimorando seus conhecimentos;
- apropriar-se das linguagens científicas e utilizá-las na comunicação e na disseminação desses conhecimentos; e
- apropriar-se das linguagens das tecnologias digitais e tornar-se fluentes em sua utilização.

Mais uma vez, pensando na autonomia docente, os projetos são independentes e ambos podem ser desenvolvidos por toda a turma, um de cada vez, de acordo com o cronograma proposto por você. Outra opção é que os estudantes escolham um dos projetos para desenvolver. Analise previamente as propostas, entre nos endereços e *sites* indicados e, se necessário, faça adaptações.

Cabe também a você escolher o melhor momento para dar início ao trabalho. Como o desenvolvimento de um projeto demanda tempo para que as várias etapas sejam cumpridas, sugerimos avaliar a possibilidade de, logo no início de um livro, apresentar a proposta de trabalho e orientar os estudantes para que desenvolvam seus projetos paralelamente ao desenvolvimento das unidades. Essa é mais uma oportunidade de investir na autonomia dos estudantes, uma vez que, caso necessário, podem acessar conteúdos de unidades ainda não trabalhadas mas importantes para o desenvolvimento de seus projetos, o que potencializa seus processos de leitura e compreensão de textos, incluindo o texto matemático. Seu papel é fundamental para incentivá-los a se engajar nesse tipo de trabalho e atender às necessidades específicas de cada grupo.

REFERÊNCIAS COMENTADAS

21 PERGUNTAS e respostas sobre *bullying*. *Nova Escola,* São Paulo, 1 ago. 2009. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/336/bullying-escola. Acesso em: 26 jun. 2020

Nesse artigo, especialistas esclarecem dúvidas e apontam soluções para esse problema que preocupa pais, professores e gestores.

ABRAMOVAY, Miriam; RUA, Maria das Graças. *Violências nas escolas*. Brasília, DF: Unesco Brasil, 2002. Disponível em: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000133967. Acesso em: 26 jun. 2020

Publicação da Unesco que apresenta conceitos e dados acerca de situações de violência escolar, incluindo *bullying*.

ALRO, H.; SKOVSMOSE, O. *Diálogo e aprendizagem em educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

Os autores abordam a relação entre a comunicação na sala de aula e a aprendizagem, enfatizando a importância do diálogo.

BACICH, Lilian; HOLANDA, Leandro. *STEAM em sala de aula*: a aprendizagem baseada em projetos integrando conhecimentos na educação básica. Porto Alegre: Penso Editora, 2020.

Esse livro apresenta a proposta STEAM, sigla em inglês para Ciência, Tecnologia, Engenharia, Artes e Matemática, por meio da qual os estudantes se envolvem em propostas reais para o desenvolvimento de projetos em diversas áreas.

BACICH, Lilian; TANIZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando de Mello. *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso Editora, 2015.

O ensino híbrido é uma abordagem pedagógica que visa colocar o estudante no centro do processo de aprendizagem combinando atividades presenciais e atividades feitas em diferentes ambientes com o uso de tecnologias digitais.

BACICH, Lilian; MORAN, José. *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso Editora, 2018.

Os autores apresentam contribuições teóricas e práticas sobre o ensino e a aprendizagem desenvolvidas por meio das metodologias ativas apoiadas em tecnologias, que visam favorecer a participação ativa do estudante nos processos de aprendizagem.

BENDER, Willian N. *Aprendizagem baseada em projetos:* educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso Editora, 2015.

Explora as formas como os professores podem aplicar a Aprendizagem Baseada em Projetos (ABP) em uma sala de aula real e apresenta diretrizes práticas sobre como usar a ABP em todo o currículo.

BIBIANO, Bianca; SANTOMAURO, Beatriz; MARTINS, Ana Rita. Como agrupo meus alunos? *Nova Escola*, São Paulo, 1 mar. 2009. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/1475/como-agrupo-meus-alunos. Acesso em: 22 maio 2020.

Nesse artigo são apresentadas alternativas para o trabalho em grupos.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto, 2003.

Os autores apresentam os conceitos de modelo e modelagem matemática e propõem a modelagem como método de ensino de matemática.

BNCC COMENTADA para o Ensino Médio. *In:* INSTITUTO REÚNA. São Paulo, c2020. Disponível em: https://institutoreuna.org.br/projeto/base-comentada-para-o-ensino-medio/. Acesso em: 22 maio 2020.

A BNCC Comentada para o Ensino Médio é uma ferramenta que traduz, comenta e explica as competências específicas e as habilidades de cada área de conhecimento desta etapa da educação.

BOALER, Jo. Benefícios do esforço – Parte 3. São Paulo, 23 maio 2018. 1 vídeo (4min33s). Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1_MvTAoH-QJZuhYF9U6Gf_GM65NyHgegh/view. Acesso em: 20 jul. 2020.

Nesse vídeo, gravado durante o I Seminário Mentalidades Matemáticas, a neurocientista Jo Boaler, cofundadora do Youcubed e professora da Universidade de Stanford, apresenta os benefícios do esforço produtivo nas aulas de Matemática.

BOALER, Jo. *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso Editora, 2018.

A autora propõe a ruptura com alguns mitos relativos à aprendizagem da Matemática e apresenta a possibilidade de ensiná-la como uma disciplina criativa e visual.

BORBA, Marcelo C.; SILVA, Ricardo S. R.; GADANIDIS, George. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

Nesse livro, os autores apresentam quatro fases da implementação das tecnologias digitais em Educação Matemática.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática*. São Paulo: Editora Blucher, 2012.

Esse é um clássico de História da Matemática que

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

tem sido texto de referência há mais de 20 anos para aqueles que estudam o assunto.

BRANDT, Celia Finck; BURAK, Dionísio; KLÜBER, Tiago Emanuel. *Modelagem matemática*: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações. Ponta Grossa: Editora da UEPG, 2016. Disponível em: https://static.scielo.org/scielobooks/b4zpq/pdf/brandt-9788577982325.pdf. Acesso em: 21 maio 2020.
Voltado para professores da Educação Básica, o livro apresenta resultados de pesquisas que visam contribuir para tornar o ensino de Matemática mais contextualizado e vinculado à realidade.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 20 maio 2020.
A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que estabelece conhecimentos, competências e habilidades que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da escolaridade básica.

BRASIL. Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes [...]. *Diário Oficial da União*: seção 1, p. 21, 22 nov. 2018. Disponível em: http://www.in.gov.br/materia/-/asset_publisher/Kujrw0TZC2Mb/content/id/51281622. Acesso em: 27 jul. 2020.
A resolução nº 3 atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Regulamenta a implantação do Novo Ensino Médio.

BROUSSEAU, G. *Introdução ao estudo das situações didáticas*: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.
O livro aborda a teoria das situações didáticas, um conceito criado pelo autor há quatro décadas e constante[illegible]

CARAÇA, Bento [illegible] *damentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva, 2000.
Esse livro é referência para o estudo da Matemática e está organizado em três partes: Números, Funções e Continuidade.

CARTILHAS sobre como enfrentar a violência e promover a cultura de paz nas escolas. *In*: PRATTEIN. São Paulo, [2018]. Disponível em: http://prattein.com.br/home/index.php?option=com_content&view=article&id=767:cartilhas-sobre-como-enfrentar-a-violencia-epromover-a-cultura-de-paz-nas-escolas&catid=124:violencia-na-escola&Itemid=216. Acesso em: 13 jun. 2020.
Seleção de cartilhas para entender e enfrentar a violência e promover a cultura de paz nas escolas.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. *Estudar matemáticas*: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.
O livro aborda o estudo da Matemática considerando a educação como um projeto em que os principais protagonistas são os estudantes.

CHICA, Cristiane. Explorando problemas no painel de soluções. *In*: MATHEMA. São Paulo, 20 set. 2019. Disponível em: https://mathema.com.br/jogos-e-atividades/explorando-problemas-no-painel-de-solucoes/. Acesso em: 23 jun. 2020.
Nesse artigo, por meio de exemplos, a autora apresenta como trabalhar com painel de soluções nas aulas de Matemática.

COHEN, Elizabeth G.; LOTAN, Rachel A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. Porto Alegre: Penso Editora, 2017.
Apresenta os referenciais teóricos e a pesquisa que dão suporte ao trabalho em grupo e descreve passos importantes para sua concretização na sala de aula.

COMPETÊNCIAS gerais da BNCC. *In*: MOVIMENTO PELA BASE. [*S. l.*], 1 mar. 2018. Disponível em: http://movimentopelabase.org.br/acontece/competencias-gerais-de-bncc/. Acesso em: 22 maio 2020.
A página esclarece o que são as competências gerais. Inclui um vídeo de Anna Penido que explica como cada uma das competências gerais se articula ao trabalho desenvolvido no cotidiano da escola, passando por todas as disciplinas.

CORREA, Licinia Maria; ALVES, Maria Zenaide; MAIA, Carla Linhares (org.). *Cadernos temáticos*: juventude brasileira e Ensino Médio. Belo Horizonte: Editora da UFMG, 2014. Disponível em: http://observatoriodajuventude.ufmg.br/publication/colecao-cadernos-tematicos-culturas-juvenis-e-tecnologias/. Acesso em: 13 jul. 2020
Esse caderno visa oferecer aos professores referenciais teórico, metodológico, didático e pedagógico que lhes possibilite dialogar com a diversidade juvenil, principalmente com as juventudes imersas no cotidiano das escolas.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *O que é matemática?*: uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2000.
Esse livro trabalha a Matemática de forma construtiva e orgânica, como base para o pensar e agir científicos.

DAVID, Maria Manuela S.; LOPES, Maria da Penha. Falar sobre matemática é tão importante quanto fazer matemática. *Presença pedagógica*, Belo Horizonte, v. 6, n. 32, p. 17-24, 2000.
Nesse artigo, as autoras defendem a importância do falar sobre Matemática para promover o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes e analisam os papéis que o professor pode desempenhar em sala de aula visando socializar o "fazer Matemática".

DAVID, Maria Manuela M. S.; TOMAZ, Vanessa Sena. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.
O livro apresenta e discute situações de sala de aula que evidenciam abordagens interdisciplinares.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

EDUMATEC. *Softwares* de geometria. Porto Alegre: UFRGS, c2008. Disponível em: http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/softwares/soft_geometria.php. Acesso em: 22 maio 2020.
No *site* são encontradas várias indicações de aplicativos e *softwares* para desenvolver atividades nas aulas de Matemática.

ESTUDOS da EPM/Unifesp detalham perfil de casos de suicídio na adolescência no Brasil. *In*: UNIFESP. São Paulo, 5 set. 2019. Disponível em: https://www.unifesp.br/campus/sao/noticias/1144-estudos-da-epm-unifesp-detalham-perfil-de-casos-de-suicidio-na-adolescencia-no-brasil. Acesso em: 26 jun. 2020
Artigo que relata duas pesquisas realizadas pela Universidade Federal de São Paulo (Unifesp), entre os anos de 2006 e 2015, sobre o suicídio entre jovens.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.
O livro traz a história da Matemática desde a Antiguidade até os tempos modernos e apresenta exercícios ao final de cada capítulo como recurso pedagógico.

FANTE, Cleo. *Fenômeno* bullying: como prevenir a violência nas escolas e educar para a paz. Rio de Janeiro: Verus Editora, 2005.
O livro apresenta o *bullying* como um fenômeno que vem sendo tema de preocupação e de interesse nos meios educacionais e sociais em todo o mundo.

FRADE, Isabel Cristina Alves da Silva; VAL, Maria da Graça Costa; BREGUNCI, Maria das Graças de Castro (org). *Glossário Ceale*: termos de alfabetização, leitura e escrita para educadores. Belo Horizonte: UFMG; Faculdade de Educação, 2014.
Voltado para educadores em geral, inclui aproximadamente 200 verbetes escritos por colaboradores de diferentes instituições do país e do exterior, na área de especialização de cada um.

HERNÁNDEZ, Fernando. *Transgressão e mudança na educação*: os projetos de trabalho. Porto Alegre: Artmed, 2007.
A obra apresenta os pressupostos teóricos sobre o trabalho com projetos, com base em uma visão histórica.

HOFFMANN, Jussara. *Avaliação mediadora*: uma prática em construção da Pré-Escola à universidade. Porto Alegre: Mediação, 2006.
A autora propõe uma avaliação mediadora, da reflexão para a ação.

INSTITUTO AYRTON SENNA. Estante do educador. São Paulo, [20--?]. Disponível em: https://www.institutoayrtonsenna.org.br/pt-br/conteudos/estante-do-educador.html. Acesso em: 23 maio 2020.
Disponibiliza diversos *e-books* para auxiliar o professor a desenvolver uma prática que promova a educação integral dos estudantes.

INSTITUTO INSPIRARE. São Paulo, 2012. Disponível em: http://inspirare.org.br/. Acesso em: 26 maio 2020.
Nesse *site* são encontrados materiais relativos à promoção do desenvolvimento integral dos estudantes e sua preparação para a vida no mundo atual.

INSTITUTO REÚNA. São Paulo, c2020. Disponível em: https://institutoreuna.org.br/. Acesso em: 26 jun. 2020.
O *site* disponibiliza ferramentas e conteúdos práticos alinhados à BNCC e apresenta soluções para inovações na sala de aula.

LEITE, Eliana Alves Pereira; DARSIE, Marta Maria Pontin. Implicações da metacognição no processo de aprendizagem da Matemática. *Reveduc*, São Carlos, v. 5, n. 2, p. 179-191, nov. 2011. Disponível em: http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/250. Acesso em: 22 jun. 2020.
Artigo que apresenta implicações identificadas por diferentes autores entre metacognição e aprendizagem, e mais especificamente entre metacognição e aprendizagem da Matemática.

LOPES, Celi Espasandin; NACARATO, Adair Mendes (org.). *Educação matemática, leitura e escrita*: armadilhas, utopias e realidade. Campinas: Mercado de Letras, 2009.
O livro aborda a comunicação em sala de aula valorizando o estudante como protagonista do processo de aprendizagem, que interage com os colegas, o professor e a Matemática num ambiente de exploração.

LOPES, Celi Aparecida Espasandin; NACARATO, Adair Mendes (org.). *Escritas e leituras na educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.
Esses artigos abordam como a comunicação de ideias, interações, práticas discursivas, representações matemáticas, argumentações e negociações de significados podem contribuir para o ensino da Matemática.

LOPES, Marina. A escola também é lugar para falar sobre saúde mental. *In*: PORVIR. São Paulo, 30 set. 2019. Disponível em: https://porvir.org/escola-tambem-e-lugar-para-falar-sobre-saude-mental/. Acesso em: 13 jul.2020.
Esse artigo apresenta resultados de pesquisas relativas ao assunto, além de estratégias para a promoção da saúde mental nas escolas.

LUCKESI, Cipriano Carlos. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. São Paulo: Cortez, 2014.
O autor é referência em estudos sobre a avaliação da aprendizagem escolar e reuniu nesse livro um conjunto de artigos publicados por ele ao longo de anos de trabalho sobre o tema.

MÃO na massa. *In*: PORVIR. São Paulo, [201-]. Disponível em: https://porvir.org/mao-na-massa/. Acesso em: 22 maio 2020.
Nesse *site* são apresentadas diversas ferramentas e sugestões para colocar em prática as inovações e transformar a sala de aula, levando o estudante

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

a ser protagonista do processo de aprendizagem.

MORAN, José. A importância de construir projetos de vida na educação. *In*: EDUCAÇÃO TRANSFORMADORA. São Paulo, 2017. Disponível em: http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2017/10/vida.pdf. Acesso em: 26 jun. 2020.
O autor discute o que significa a construção de um projeto de vida para indivíduos e sugere alguns passos para desenvolver o projeto de vida dos estudantes na escola.

MOVIMENTO PELA BASE. [*S. l.*], [2015]. Disponível em: http://movimentopelabase.org.br/. Acesso em: 22 maio 2020.
Guias, vídeos e outros materiais que ajudam a entender a BNCC na prática.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na educação matemática*. Campinas: Mercado de Letras, 2013.
Nesse livro estão reunidos ensaios e narrativas, relatos e argumentos que discutem possibilidades de apropriação de práticas de letramento, incluindo o numeramento.

OLIVEIRA, Lérida. *Bullying*: conhecendo para combater. *In*: BRASIL. Ministério da Educação. *Portal do Professor*. [Brasília, DF], 3 jul. 2012. Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=41387. Acesso em: 13 jul. 2020.
A autora apresenta sugestão de atividades para conhecer e combater o *bullying*.

PAIS, Luiz Carlos. *Didática da Matemática*: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.
A obra apresenta os conceitos fundamentais de uma tendência que ficou conhecida como "didática francesa", desenvolvida por educadores franceses como um modo próprio de ver a educação centrada no ensino da Matemática.

PARENTE, Ra[illegible] jovens para o mercado de trabalho do futuro? *In*: PORVIR. São Paulo, 8 ago. 2018. Disponível em: https://porvir.org/como-preparar-nossos-jovens-para-o-mercado-de-trabalho-do-futuro/. Acesso em: 14 jul. 2020.
Apresenta a visão de alguns especialistas sobre as transformações que a escola precisa fazer para formar jovens com as habilidades necessárias a um mercado de trabalho cada vez mais novo.

PENSAMENTO computacional em sala de aula: muito além da programação. *In*: FUNDAÇÃO TELEFÔNICA VIVO. São Paulo, 28 nov. 2019. Disponível em: http://fundacaotelefonica.org.br/noticias/pensamento-computacional-em-sala-de-aula-muito-alem-da-programacao/. Acesso em: 22 jun. 2020.
Artigo que define o pensamento computacional e apresenta os pilares que o orientam.

PENSAMENTO computacional e programação como ferramentas de aprendizagem. *In*: INSTITUTO AYRTON SENNA. São Paulo, 13 set. 2019. Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/pt-br/meu-educador-meu-idolo/materialdeeducacao/pensamento-computacional-e-programacao-como-ferramentas-de-aprendizagem.html. Acesso em: 22 jun. 2020.
Esse artigo apresenta os elementos que caracterizam o pensamento computacional de acordo com Wing e descreve as etapas por meio das quais esse tipo de pensamento se organiza.

PERRENOUD, Philippe. *Avaliação*: da excelência à regulação das aprendizagens: entre duas lógicas. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.
O livro trata da avaliação como um problema complexo, que pode estar a serviço da aprendizagem.

PERRENOUD, Philippe. *Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.
Com base na participação na elaboração de um referencial de competências adotado em Genebra, em 1996, para formação continuada de professores, o autor elencou 10 competências necessárias à atividade docente.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1978. v. 2.
O livro apresenta a ideia de que por mais simples que seja um problema, ele desafia a curiosidade e quem o resolve pelos próprios meios coloca em jogo a criatividade e experimenta o prazer da descoberta.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
Os autores analisam, tomando como base pesquisas feitas com estudantes, de que modo as práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser levadas para a sala de aula e contribuir para a educação matemática.

PORVIR. São Paulo, 2012. Disponível em: https://porvir.org/. Acesso em: 26 jun. 2020.
Plataforma de conteúdos e mobilização sobre inovações educacionais do Brasil. Desde 2012, mapeia, produz e difunde referências para inspirar e apoiar transformações que garantam equidade e qualidade na educação a todos os estudantes brasileiros.

POZO, Juan Ignácio. *A solução de problemas*: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.
O eixo principal deste livro é a ideia de que nas diversas etapas da vida os estudantes devem adquirir não somente conhecimentos já elaborados e estruturados nas diversas disciplinas, mas habilidades e estratégias que permitam a eles aprender por si mesmos novos conhecimentos.

PREVENÇÃO ao suicídio e autolesão provocada sem intenção suicida entre adolescentes e jovens *In*: BRASIL. Ministério da Mulher, da Família e dos Direitos Humanos. [Brasília, DF], [2019]. Disponível em: https://www.gov.br/mdh/pt-br/navegue-por-temas/observatorio-nacional-da-familia/politicas-de-prevencao-ao-suicidio-e-autolesao-provocada-sem-intencao-suicida-entre-adolescentes-e-jovens. Acesso em: 26 jun. 2020.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Artigo que apresenta alguns sinais de alerta em relação à possibilidade de suicídio e, também, em linhas gerais, as políticas governamentais de prevenção.

PROJETO FUNDÃO – UFRJ. Rio de Janeiro, [201-?]. Disponível em: http://www.matematica.projetofundao.ufrj.br/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=12&Itemid=109. Acesso em: 22 maio 2020.

Nesse *site* são apresentadas as publicações do Projeto Fundão para o ensino de Matemática.

RICO, Luis. Errores y dificuldades en el aprendizaje de las matemáticas. *In*: CORE. [*S. l.*], 1995. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/12341117.pdf. Acesso em: 20 jul. 2020.

O autor analisa o papel do erro na aprendizagem da Matemática.

SEMIS, Laís. 5 ações para promover a saúde mental na escola. *Nova Escola*, São Paulo, 23 out. 2018. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/12912/5-acoes-para-promover-a-saude-mental-na-escola. Acesso em: 13 jul. 2020.

Nesse artigo são apresentadas ações que visam melhorar o clima na escola, estimular os professores e criar estratégias para lidar com casos de *bullying* e automutilação entre os estudantes.

SEMIS, Laís. O que são as competências gerais da BNCC e o que eu preciso saber sobre elas? *Nova Escola*, São Paulo, 27 fev. 2020. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/18902/o-que-sao-as-competencias-gerais-da-bncc-e-o-que-eu-preciso-saber-sobre-elas?utm_source=facebook&utm_medium=post-. Acesso em: 22 maio 2020.

Nesse artigo são apresentadas as 10 competências gerais propostas na BNCC e sua articulação com as práticas pedagógicas.

SILVA, Ana Beatriz Barbosa. *Bullying*: Cartilha 2010 – Projeto Justiça [...]. Brasília: Conselho Nacional de Justiça, 2010. Disponível em: http://www.truzzi.com.br/blog/wp-content/uploads/2010/10/Cartilha_Bullying_CNJ.pdf. Acesso em: 26 jun. 2020.

Cartilha produzida pelo Conselho Nacional de Justiça que explica como identificar e combater o *bullying* nas escolas.

SILVA NETO, Cláudio Marques da. Como combater o *bullying* na escola. *Nova Escola Gestão*, São Paulo, 6 abr. 2018. Disponível em: https://gestaoescolar.org.br/conteudo/1974/como-combater-o-bullying-na-escola. Acesso em: 7 jun. 2020.

A matéria aborda a importância e as maneiras de combater o *bullying* nas escolas, pois é um problema de saúde pública em todo o Brasil.

SMOLE, Kátia; DINIZ, Maria Ignez. *Ler e resolver problemas*: habilidades básicas para aprender Matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

A obra é referência no ensino de Matemática e tem como eixo condutor a resolução de problemas, além de contribuir para a reflexão sobre o desenvolvimento de habilidades e competências nas aulas de Matemática.

STERNBERG, R. J. *Psicologia cognitiva*. Tradução: Maria Regina Borges Osório. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2001.

Estudo sobre a psicologia cognitiva, equilibra a citação e a descrição de estudos clássicos com igual atenção às contribuições recentes ao campo.

TAVARES, Marcus. O que as escolas podem fazer para prevenir o suicídio entre os adolescentes e os jovens? *In*: TVESCOLA. Rio de Janeiro, 24 out. 2019. Disponível em: http://hotsite.tvescola.org.br/conexaoescolas/suicidio_escolas/. Acesso em: 26 jun. 2020.

Artigo da TV Escola relativo a duas pesquisas realizadas na Unifesp sobre o suicídio entre jovens.

UFF. *EMDiálogo*. Rio de Janeiro, [20--?]. Disponível em: http://www.emdialogo.uff.br/. Acesso em: 13 jul. 2020.

Portal feito por uma rede de universidades cujo objetivo é estimular debates e compartilhar conhecimentos e experiências que contribuam para a melhoria do Ensino Médio público.

VASCONCELLOS, Celso dos S. *Avaliação da aprendizagem*: práticas de mudança – por uma práxis transformadora. São Paulo: Libertad, 2003.

Nessa obra, o autor analisa as práticas concretas de avaliação da aprendizagem, por meio das representações e, sobretudo, pelas observações do cotidiano escolar.

VIOLÊNCIA escolar e *bullying*: relatório sobre a situação mundial. *In*: UNESDOC. [Paris], 2019. Disponível em: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000368092. Acesso em: 11 jun. 2020.

Publicação da Unesco que apresenta conceitos e dados acerca de situações de violência escolar, incluindo *bullying*. Rico material para discussão e para subsidiar o enfrentamento desse grave problema.

WIGGINS, Grant; MCTIGHE, Jay. *Planejamento para a compreensão*: alinhando currículo, avaliação e ensino por meio da prática do planejamento reverso. Porto Alegre: Penso Editora, 2019.

Esse livro se propõe a conduzir os professores à reflexão sobre planejamento, avaliação e ensino com o objetivo de contribuir para a promoção de uma aprendizagem mais engajadora e eficaz em qualquer etapa de ensino, seja na Educação Básica ou no Ensino Superior.

ZABALA, Antoni. *A prática educativa*: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

O livro propõe critérios que possibilitam a articulação de uma prática reflexiva e coerente. Apresenta o conceito de sequência didática e propõe o ensino segundo quatro tipos de conteúdo: factuais, conceituais, procedimentais e atitudinais. No último capítulo, aborda a avaliação em uma perspectiva formativa.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS PARA ESTE LIVRO

Neste livro, os estudantes terão a oportunidade de estudar as características de uma função do 1º grau, de relacionar as progressões aritméticas às funções do 1º grau de domínio discreto e de utilizá-las para modelar e resolver problemas em vários contextos, inclusive aqueles ligados à Matemática Financeira. O estudo das inequações do 1º grau e dos sistemas lineares também estará a serviço da resolução de problemas.

Além disso, eles se aprofundarão no desenvolvimento de algoritmos e fluxogramas e na análise e interpretação de gráficos veiculados pela mídia, bem como interpretarão os principais índices socioeconômicos e taxas usados no país e conhecerão seus usos e formas de cálculo.

A articulação dos diversos conteúdos trabalhados ocorre por meio de atividades de investigação, exploração de situações-problema, elaboração de problemas para os colegas resolverem, análise de gráficos e índices socioeconômicos, debates entre os estudantes, produção de textos, além da realização dos projetos de **Conexões & projetos**. Dessa forma, trabalhando individualmente, em duplas ou em grupos, os estudantes desenvolvem as habilidades propostas na BNCC, e os objetivos definidos para cada unidade vão sendo atingidos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Objetivos

- Usar a função do 1º grau e as progressões aritméticas para modelar e resolver problemas, tanto em contextos matemáticos quanto em contextos relacionados a outras áreas.
- Desenvolver o pensamento computacional por meio do trabalho com algoritmos e fluxogramas.
- Analisar gráficos e tabelas veiculados em diversos meios de comunicação.
- Interpretar, obter e analisar índices socioeconômicos.

Justificativas

Visando contribuir para a formação de jovens que se apropriem do conhecimento matemático, utilizando-o com propriedade em diversas situações, o trabalho com as funções do 1º grau, as sequências e as progressões geométricas tem como objetivo a modelagem e a resolução de problemas. O estudo algébrico e gráfico das funções, assim como o desenvolvimento e a sistematização de algumas técnicas envolvendo a resolução de equações, inequações e sistemas, tem como objetivo assegurar aos estudantes o domínio de recursos que os permitam, além reconhecer o tipo de modelo que resolve determinado problema, usar as técnicas necessárias para resolvê-lo.

O trabalho com algoritmos e fluxogramas visa desenvolver, por meio do pensamento computacional, competências como raciocínio lógico e capacidade de planejamento, necessárias para resolver problemas da vida cotidiana, individual ou coletivamente.

Ao analisar e interpretar gráficos e tabelas veiculados em diferentes meios de comunicação, além de índices socioeconômicos, os estudantes desenvolvem o senso crítico para lidar com situações de seu dia a dia.

Conexões com outras áreas do conhecimento

Unidade 1 – O tema sobre o sistema de cotas nas universidades, tratado nas páginas 18 e 19, pode ser desenvolvido e aprofundado em um trabalho conjunto com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Os professores dessa mesma área de conhecimento podem também ser convidados a participar da discussão proposta na página 33 sobre o pagamento do Imposto de Renda de acordo com as faixas salariais estabelecidas no nosso país.

Unidade 2 – Na seção **Para retomar** da página 82 e nas atividades 3, 4 e 5 da página seguinte, os estudantes equilibram equações químicas utilizando sistemas lineares desenvolvendo a habilidade EM13CNT101 de Ciências da Natureza e suas tecnologias.

Unidade 3 – A discussão sobre desigualdade social pode envolver os professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Esse tema aparece na abertura da unidade e nas páginas 110 a 112.

Conexões & projetos – No Projeto 1, os estudantes elaboram um infográfico cujo objetivo é situar o leitor sobre o IDH brasileiro no cenário mundial, informando sua evolução a cada cinco anos entre 1990 e 2020.

O envolvimento dos professores de Arte e da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas pode enriquecer muito esse trabalho.

O Projeto 2, no qual os estudantes analisam dados sobre a evolução da população indígena no Brasil através dos anos, também apresenta uma oportunidade de conexão com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Temas Contemporâneos Transversais abordados no livro

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Educação das relações étnico-raciais e ensino de história e cultura afro-brasileira, africana e indígena

O tema é abordado na Unidade 1, nas páginas 18 e 19, por meio da discussão sobre o sistema de cotas nas universidades brasileiras e no Projeto 2 de **Conexões & projetos**, que trata da progressão da população indígena no Brasil ao longo das últimas décadas.

Saúde, vida familiar e social

Na abertura da Unidade 3, os estudantes fazem uma discussão sobre desigualdade social. Nessa mesma unidade, nas páginas 110 a 112, analisam o IDH de alguns países, comparando-os com o do Brasil, e leem sobre três critérios que indicam o grau de desenvolvimento de um país relacionados à qualidade de vida da população: saúde, educação e renda. Esse tema também aparece no Projeto 1 de **Conexões & projetos**, no qual os estudantes elaboram um infográfico e apresentam informações atuais sobre o IDH brasileiro, destacando pontos fundamentais que contribuem para o seu cálculo: expectativa de vida, renda *per capita* e escolaridade. Além do IDH, a partir da página 113, são trabalhados os índices e as taxas de natureza socioeconômica: IPCA, INPC, PIB e o índice de Gini.

Educação financeira e fiscal

O cálculo do Imposto de Renda, abordado nas páginas 33 e 34 da Unidade 1, contribui para a educação financeira dos estudantes.

Trabalho, ciência e tecnologia

Este tema é tratado na Unidade 3, na seção **Aproveitando a oportunidade** da página 95, em que os estudantes pesquisam diferentes linguagens de programação e as comparam apontando as vantagens e as desvantagens de cada uma. Nas atividades 2, 3, 5 e 7 das páginas 102 a 105 eles analisam gráficos do IBGE cujo tema é o mundo do trabalho. Com base nos dados apresentados nos gráficos, fazem comparações, sínteses e produzem textos argumentativos sobre o assunto.

Cronograma

Unidades	Sugestão de número de aulas
Unidade 1	20
Unidade 2	22
Unidade 3	18
Conexões & projetos	6

Essa é apenas uma referência para a distribuição das aulas. Fica a critério do professor adequar o cronograma de acordo com a realidade e a necessidade dos estudantes.

UNIDADE 1 Função afim

Objetivos

- Estudar o raciocínio proporcional e aplicá-lo em situações cotidianas em que existe proporcionalidade direta.
- Conhecer a função linear e relacionar sua taxa de variação com a proporção direta entre grandezas.
- Entender quais situações podem ser modeladas por meio de uma função afim.
- Utilizar procedimentos algébricos e gráficos para resolver problemas envolvendo a função afim.

Justificativa

O trabalho com a função afim a partir da análise de grandezas diretamente proporcionais, por meio de situações reais representadas algébrica ou graficamente, favorece a consolidação de habilidades que permitem resolver problemas dos mais variados contextos que envolvem a função do 1º grau.

Competências e habilidades da BNCC trabalhadas nesta unidade

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

Competências gerais

Competências gerais 2, 4 e 5: Essas competências são desenvolvidas em diversas situações propostas nesta unidade. Na atividade de exploração que consta na página 26, por exemplo, os estudantes escolhem um *software* de elaboração de gráficos e, em duplas, representam gráficos de várias funções lineares. Em seguida, discutem o que esses gráficos têm em comum, o que muda de um gráfico para outro e como os valores dos coeficientes das funções alteram os respectivos gráficos. Por exercerem a curiosidade intelectual ao investigarem situações, explorando ideias e conexões, interpretando dados, desenvolvendo hipóteses, explicando evidências e fazendo sínteses, desenvolvem a **competência geral 2**. Como utilizam tecnologias digitais para se comunicar de maneira significativa, desenvolvem a **competência geral 5** e, ao utilizarem diferentes linguagens, incluindo a verbal, a gráfica e a algébrica para se comunicarem, desenvolvem a **competência geral 4**.

Competência geral 9: Ao longo de toda a unidade são propostas situações em que os estudantes trocam ideias e fazem discussões, em duplas ou em grupos, exercitando a empatia, o diálogo e a resolução de conflitos. Na página 32, por exemplo, na seção **Para explorar**, fica evidente o desenvolvimento dessa competência, uma vez que os estudantes, em duplas, elaboram hipóteses sobre a representação gráfica de uma função afim dadas algumas condições, testam essas hipóteses para, em seguida, estabelecer uma classificação para as funções afim. Por trabalharem em duplas, exercitam a convivência, aprendendo a respeitar e acolher a perspectiva do outro, desenvolvendo, assim, uma cultura de paz.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competências específicas 1, 3, 4 e 5

Habilidades

EM13MAT101 e EM13MAT510: Nas atividades propostas na página 30, os estudantes analisam a quantidade de água que uma mangueira despeja em uma piscina em função do tempo e utilizam retas para

representar e resolver as diversas situações envolvendo as duas variáveis. Além disso, interpretam e comparam a variação de grandezas pela análise dos gráficos das funções representadas e das respectivas taxas de variação.

EM13MAT302: Por meio de uma situação real que envolve o consumo de combustível por quilômetro rodado em uma viagem, nas atividades da página 22, os estudantes representam algebricamente os dados de uma tabela por meio de uma função linear, analisam esses dados e concluem que esse tipo de função representa a relação entre duas grandezas diretamente proporcionais.

EM13MAT401: Nas atividades da página 26, os estudantes utilizam um *software* de elaboração de gráficos para esboçar diversas funções lineares e analisam suas características de acordo o valor do coeficiente *a*.

EM13MAT404: Nas atividades das páginas 33 e 34, com base na leitura de um texto e na tabela do Imposto de Renda, os estudantes representam funções que definem cada faixa de imposto para, em seguida, associá-las a uma função definida por mais de uma sentença e estudar as características desse tipo de função.

EM13MAT501: Na atividade 2 da página 34, os estudantes representam graficamente os dados da tabela de Imposto de Renda e, em seguida, na seção **Para explorar**, discutem as características do gráfico obtido e fazem inferências.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Resoluções e comentários

Página 11

Abertura

Os estudantes podem utilizar estratégias diversas para resolver a atividade, utilizando seus conhecimentos prévios. O importante nesse momento é fazer um diagnóstico da turma e informar que o capítulo vai aprofundar os conhecimentos de proporcionalidade e regra de três para que seja possível conhecer as funções que modelam esse tipo de problema.

1. Usando regra de três:

Seja x a largura da boneca maior.

Altura (cm)	Largura (cm)
1	0,4
23	x

$1 \cdot x = 23 \cdot 0{,}4$

$x = 9{,}2$

Portanto, a largura da maior figura será de 9,2 cm.

Sem o uso da regra de três:

Se a boneca maior tem altura 23 vezes maior que a boneca menor, sua largura será $23 : 0{,}4 = 9{,}2$ cm.

2. Usando função afim:

Sejam y a altura da boneca e x a posição na sequência. Temos $y = xm + b$. Então:

Boneca 1:

$1 = 1m + b$

$b = 1 - m$ (I)

Boneca 12:

$23 = 12m + b$

$b = 23 - 12m$ (II)

Igualando (I) e (II), obtemos o valor de m:

$23 - 12m = 1 - m$

$11m = 22$

$m = 2$

Substituindo o valor de m na equação (I), obtemos o valor de b:

$b = 1 - m$

$b = 1 - 2$

$b = -1$

Logo, temos a lei de formação para a altura de todas as bonecas, em função da posição x: $y = 2x - 1$.

Vamos determinar a altura da 2ª boneca substituindo $x = 2$ nessa fórmula:

$y = 2 \cdot 2 - 1$

$y = 3$

Agora vamos determinar a diferença entre as alturas das duas primeiras bonecas da sequência.

3 cm − 1 cm = 2 cm

Portanto, 2 cm é a diferença entre a altura de uma boneca e altura da boneca seguinte.

Sem o uso da função afim:

Colocando as alturas das bonecas em ordem crescente temos:

1	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	23
1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	11ª	12ª

Como somamos um valor x para obter a altura da segunda boneca e repetimos essa soma mais 10 vezes até obter a altura da 12ª boneca, temos $1 + 11x = 23$. Logo, $x = 22 : 11 = 2 \Rightarrow 2$ cm.

3. Sim. A altura de cada boneca é igual à altura da boneca anterior acrescida de 2 cm. Por recorrência e sabendo que a primeira boneca tem 1 cm de altura, conclui-se que para saber a altura de uma boneca qualquer na n-ésima posição basta somar $(n - 1)$ vezes 2 cm ao 1 cm inicial. A fórmula seria $H = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1$, sendo H a altura de uma boneca qualquer e n seu número de ordem na sequência.

   Particularmente, sendo n o número de bonecas na coleção, H é a altura da maior boneca, mas os estudantes terão maior autonomia para deduzir essas relações após avançarem na unidade.

Página 13

Para pensar e discutir

1. A reportagem apresenta o alto volume de chuva que caiu em São Paulo nos primeiros 11 dias de março de 2019.
2. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que a informação isolada não diz se isso é muita ou pouca chuva, pois depende da quantidade de chuva prevista para o mês.
3. A quantidade de chuva prevista para o mês e a quantidade de chuva que caiu até 11 de março.
4. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que o acontecido foge ao esperado.
5. Resposta pessoal. Encaminhe a discussão entre os estudantes, abordando as unidades de medida de volume, como o metro cúbico, seus múltiplos e submúltiplos, e as medidas de capacidade, como o litro, seus múltiplos e submúltiplos.
6. Respostas pessoais. Explore as situações em que são usadas unidades de medida de comprimento e peça aos estudantes que levantem hipóteses sobre como medir a quantidade de chuva usando essas unidades.

Página 14

Para explorar

1. Espera-se que os estudantes percebam que 160 mm equivalem a 160 L/m². Portanto, o volume de chuva foi de 160 litros por metro quadrado.
2. $160 \text{ L/m}^2 \cdot 5 \text{ m}^2 = 160 \cdot 5 \frac{\text{L}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^2 = 800 \text{ L}$

   Portanto, 800 litros de chuva teriam se precipitado sobre uma área de 5 m² na cidade de São Paulo.
3. Multiplicação. Resposta pessoal.

   Espera-se que os estudantes entendam que quando temos "x para cada y" e temos $n \cdot y$ devemos multiplicar $n \cdot x$.
4.

Zona	Área	Área	Cálculo	Volume de água
Leste	380,7 km²	380 700 000 m²	160 380 700 000	60 912 000 000 L
Norte	296 km²	296 000 000 m²	160 296 000 000	47 360 000 000 L
Oeste	128 km²	128 000 000 m²	160 128 000 000	20 480 000 000 L
Sul	607 km²	607 000 000 m²	160 607 000 000	97 120 000 000 L

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

5. **a)** $\frac{160,8}{177,4} \cong 0,91 = 91\%$

   b) $\frac{57,8}{177,4} \cong 0,33 = 33\%$

   c) $\frac{57,8}{160,8} \cong 0,36$ ou 36%
6. **a)** As porcentagens apresentadas na reportagem estão com aproximações corretas.

   b) O prefeito errou ao dizer que, em uma única noite, choveu 80% do esperado para o mês. O correto seria aproximadamente 33%, conforme calculado acima.

Página 16

Para explorar

Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que, para esse tipo de problema, é preciso partir de uma relação inicial entre duas grandezas. Assim, dado um valor para uma delas, descobre-se o valor correspondente para a outra. Os problemas criados pelos estudantes devem fornecer um valor em reais e solicitar a quantidade de produtos ou oferecer uma quantidade de produtos e perguntar o valor em reais. É muito importante solicitar que os estudantes compartilhem os problemas criados para que todos identifiquem as regularidades presentes em problemas de proporcionalidade e possam aplicá-las na resolução de outras situações.

Página 17

Atividades

1. **a)** Temos que 2h30min equivalem 2,5h. Assim:

$$\frac{200\text{ km}}{2{,}5\text{ h}} = 80$$

Logo, a velocidade média é de 80 km/h.

b) Temos que 0,01 m^3 = 10 000 cm^3. Assim:

$$\frac{500\text{ g}}{10\,000\text{ cm}^3} = 0{,}05$$

Logo, a densidade é de 0,05 g/cm^3.

2. Do enunciado sabemos que com R$ 79,00 é possível comprar 20 litros de gasolina. Com essas informações, vamos determinar o preço do litro da gasolina:

$$\frac{79}{20} = 3{,}95$$

Ou seja, o litro da gasolina custa R$ 3,95. Então:

Cálculo	Preço	Litros
5 · 3,95	R$ 19,75	5
10 · 3,95	R$ 39,50	10
20 · 3,95	R$ 79,00	20
30 · 3,95	R$ 118,50	30
40 · 3,95	R$ 158,00	40
45 · 3,95	R$ 177,75	45
55 · 3,95	R$ 217,55	55

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

3.

Marca	Preço (R$)	Quantidade de rolos	Comprimento do rolo (m)	Cálculo	Preço por metro (R$/m)
A	22,50	16	30	$\frac{22{,}50}{16 \cdot 30} = 0{,}046875$	0,046875
B	27,50	12	50	$\frac{27{,}50}{12 \cdot 50} = 0{,}045833...$	0,045833...

Portanto, a marca B é mais barata.

4. **Resolução 1**:

Do enunciado, temos que uma criança recebe 20 tíquetes por período e que a bicicleta custa 9 200 tíquetes, ou seja, $\frac{9\,200}{20} = 460$. Logo, a criança precisa de 460 períodos para obter 9 200 tíquetes. Como cada período custa R$ 3,00; então:

460 · 3 = 1 380

Portanto, a criança precisa gastar R$ 1.380,00 em créditos para obter a quantidade de tíquetes e trocar pela bicicleta.

Resolução 2:

Seja x o valor em reais gastos com créditos para obter a quantidade de 9200 tíquetes. Então:

Valor gasto (R$)	Número de tíquetes
3	20
x	9200

$$3 \cdot 9200 = 20x$$
$$3 \cdot \frac{9200}{20} = x$$
$$x = 460 \cdot 3$$
$$x = 1380$$

Portanto, a criança precisa gastar R$ 1.380,00 em créditos para obter a quantidade de tíquetes e trocar pela bicicleta.

Alternativa **d**.

Páginas 18–19

Análise e contexto

A análise dos textos deve levar os estudantes a reconhecer a importância social do raciocínio proporcional e incentivá-los a usar dados numéricos como base de argumentação. Aqui pode ser interessante reforçar que a proporção ocorre justamente quando a razão entre duas grandezas se mantém em diferentes contextos.

Espera-se que percebam que a razão entre a quantidade de negros e pardos e o total da população no Brasil não se reflete na razão entre essas mesmas grandezas na universidade. Essa percepção justifica o fato de a reportagem dizer que negros e pardos são proporcionalmente sub-representados nas universidades e pode ser usada como argumento favorável à criação de cotas.

Os estudantes devem perceber que as cotas são criadas para resolver essa sub-representação, de modo que qualquer argumentação contrária às cotas deve partir disso. Em uma instância mais abrangente, os estudantes podem perceber que o fato de termos uma maioria negra na sociedade e uma minoria na universidade pode dar a falsa impressão de que os cidadãos negros têm menor capacidade de acesso à universidade (já que a entrada é meritocrática), quando, na verdade, esse retrato é uma consequência histórica do lugar do negro na sociedade.

Ao elaborar problemas utilizando dados do texto, espera-se que eles utilizem as técnicas desenvolvidas anteriormente para criar situações que colaborem na reflexão sobre essas desigualdades. Esse processo deve auxiliá-los na compreensão do significado do termo “políticas afirmativas”, ressaltando que são ações provisórias que visam reparar injustiças para que a equidade de direitos leve à igualdade civil.

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.
3. Resposta pessoal.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 22

Para pensar e discutir

1. Sendo x o número de quilômetros por litro, temos:

$$x = \frac{1978}{172} = \frac{1932}{168} = \frac{1702}{148} = \frac{1771}{154} = \frac{1679}{146} = \frac{1702}{148} = 11{,}5$$

Portanto, o carro de Karina fez 11,5 km/L em cada mês.

2. Podemos dizer que entre a quantidade de quilômetros rodados e a quantidade de litros de gasolina consumidos pelo carro de Karina há uma taxa de variação constante, pois o valor foi o mesmo em cada mês, ou seja, o carro de Karina fez 11,5 km/L em cada mês.
3. Sim, pois a razão entre a quantidade de quilômetros e a quantidade de litros é constante.
4. Sabemos que o carro de Karina faz 11,5 km/L. Então:

$11{,}5 \text{ km/L} \cdot 51 \text{ L} = 586{,}5 \text{ L}$

Portanto, o carro de Karina consegue rodar 586,5 quilômetros com o tanque cheio.

5. $y = 11{,}5x$, em que x é a quantidade de litros de combustível e y é a quantidade de quilômetros rodados.

Página 23

Para pensar e discutir

1. Temos que o valor de y é sempre o dobro de x, ou seja, $y = 2x$. Assim, a razão de y e x é:

   $\frac{y}{x} = \frac{2x}{x} = 2$

   Portanto, 2 é a razão entre dois valores quaisquer de y e x.

2. $y = f(x) = 2x$ e, nesse caso, $a = 2$.

   Logo, 2 é o valor do coeficiente a dessa função.

3. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que o coeficiente a é dado pela razão entre y e x.

4. Sendo x e y diretamente proporcionais, temos $\frac{y}{x} = k$, sendo $x \neq 0$ e k uma constante real. Logo, podemos dizer que $y = kx$. Como o coeficiente da variável x nesse caso é k, temos $a = k$.

Para explorar

1. Dados que vamos usar na resolução do problema:
   - Média de quilômetros rodados por dia: 60 km
   - Total de quilômetros da viagem de ida: 210 km
   - Quilômetros que o carro roda por litro de álcool, em média: 7,5 km/L
   - Preço do álcool por litro no posto em que abasteceram: R$ 3,36

   Karina pretende rodar uma média de quilômetros 20% maior do que roda normalmente por dia. Então:

   20% de 60 km = 0,2 · 60 km = 12 km

   60 km + 12 km = 72 km

   Logo, Karina vai [illegible] média de 72 km por dia.

   Como Karina vai passar cinco dias na cidade. Então:

   5 · 72 km = 360 km

   Logo, ela vai rodar 360 km no total de cinco dias de viagem.

   Total de quilômetros de ida e volta da viagem:

   210 km + 210 km = 420 km

   Total de quilômetros que Karina pretende rodar de carro na viagem:

   420 km + 360 km = 780 km

   Como Karina vai abastecer o carro com álcool, temos:

   $\frac{780 \text{ km}}{7{,}5 \text{ km/L}} = 104 \text{ L}$

   Valor gasto com o álcool:

   104 · 3,36 = 349,44

   Logo, R$ 349,44 é o valor gasto com o combustível.

   Karina vai dividir o valor do combustível com mais dois amigos. Então:

   $\frac{\text{R\$ } 349{,}44}{3} = \text{R\$ } 116{,}48$

   Portanto, cada um dos três vai gastar R$ 116,48 com combustível nessa viagem.

2. Respostas pessoais.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 24

Para explorar

Respostas pessoais.

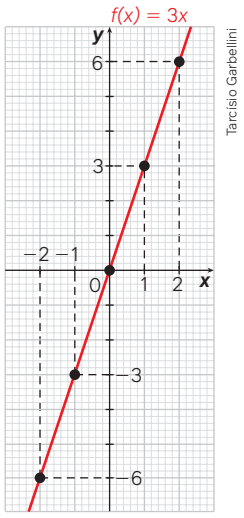
Exemplo de resposta:

I. $y = f(x) = 3x$

II. $f(0) = 3 \cdot 0 = 0$

III. e **IV.**

x	$y = 3x$	y
−2	$y = 3 \cdot (-2)$	−6
−1	$y = 3 \cdot (-1)$	−3
0	$y = 3 \cdot 0$	0
1	$y = 3 \cdot 1$	3
2	$y = 3 \cdot 2$	6



Tarcísio Garbellini

1. Resposta pessoal.

   Espera-se que o estudante perceba que $f(0) = 0$, para qualquer valor de x, ou seja, que não depende do valor do coeficiente a escolhido, pois, $f(0) = ax = 0$, com $a \in \mathbb{R}^*$.

2. Resposta pessoal.

3. **a)** $x = 2$ e $y = 3 \rightarrow B(2; 3)$

   b) $\frac{y}{x} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

   c) $f(x) = 1{,}5x$, ou seja, $a = 1{,}5$.

d) Temos:

$A(1; 1{,}5) \rightarrow f(1) = 1{,}5 \cdot 1 = 1{,}5$

Portanto, o ponto $A(1; 1{,}5)$ pertence à função $f(x)$, pois $f(1) = 1{,}5$.

e) Temos:

$(3; 4) \rightarrow f(3) = 1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5$

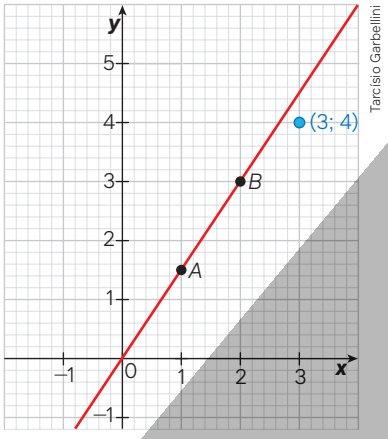
Portanto, o ponto $(3; 4)$ não pertence à função $f(x)$, pois $f(3) = 4{,}5$.

f) Temos:

$(0; 0) \rightarrow f(0) = 1{,}5 \cdot 0 = 0$

Portanto, o ponto $(0; 0)$ pertence à função $f(x)$, pois $f(0) = 0$.

g)



Portanto, o ponto $(3, 4)$ não está alinhado com os pontos A e B.

4. Resposta pessoal. Os estudantes devem notar que, dado um conjunto de pontos, se estes estão alinhados, então pertencem à mesma função linear. Da mesma forma, todos os pontos que pertencem à mesma função linear estão alinhados.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir

1. $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$.

2. O ponto $(0; 0)$ não pertence a essa função, pois o ponto 0 não está no domínio.

3. O gráfico dessa função não pode ser uma reta, pois a função não está definida para valores não naturais de x.

Página 26

Para explorar

1. Sim. Espera-se que os estudantes observem que em todos os casos o gráfico da função linear é uma reta que passa pelos pontos $(0; 0)$ e $(1; a)$.

2. O gráfico é uma reta sobre o eixo das abscissas.

3. Respostas pessoais. Os estudantes podem ou não perceber que a reta é a bissetriz dos quadrantes ímpares. Esses casos serão retomados adiante.

4. Quando $a > 0$ o gráfico é uma reta crescente e quando $a < 0$ o gráfico é uma reta decrescente. Embora os conceitos de função crescente e decrescente não estejam formalizados, espera-se apenas que os estudantes sejam capazes de descrever imageticamente essas características. Eles podem usar termos como "a reta sobe" ou "a reta desce", por exemplo.

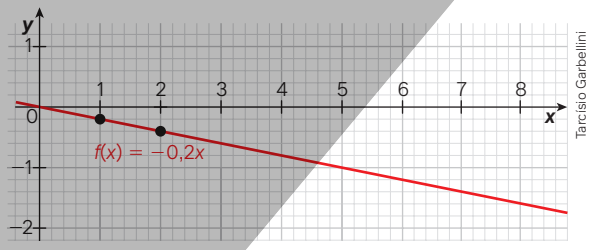
Página 27

Para pensar e discutir

1. $f(x) = -0{,}2x$

2. $f(1) = -0{,}2 \cdot 1 = -0{,}2$

$f(2) = -0{,}2 \cdot 2 = -0{,}4$



Página 28

Atividades

1. Sendo y o número de inscritos e x o número de semanas passadas desde a inauguração do perfil, temos a função identidade $y = x$.

Então a taxa de variação é 1 ou 100%.

2. Seja c o custo original da refeição e p o valor total da conta. Do enunciado, temos que o custo tem um aumento de 10% referente aos impostos e outros 10% relativos aos serviços. Assim:

$p = (1 + 10\%) \cdot (1 + 10\%) \cdot c$

$p = (1 + 0{,}1) \cdot (1 + 0{,}1) \cdot c$

$p = 1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot c$

$p = 1{,}21 \cdot c$

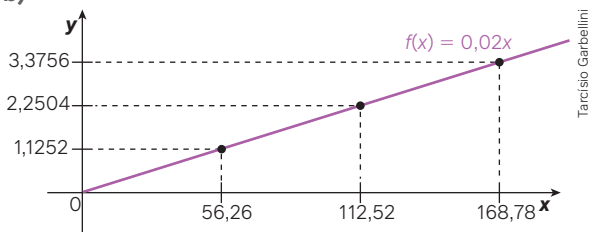
$c = \dfrac{p}{1{,}21}$

Portanto, o cliente estará desembolsando $\dfrac{p}{1{,}21}$ reais pelo custo original da refeição.

Alternativa **b**.

3. **a)** Temos que x é o valor da parcela e y é o valor da multa. Pelo boleto, será paga uma multa de 2% por atraso de pagamento, isto é $y = f(x) = 0{,}02x$.

b)



Portanto, o gráfico de $f(x) = 0{,}02x$ é crescente.

4. Considerando que x, y e z representem, respectivamente, o número de embalagens de 50 g, de 100 g e de 200 g que serão compradas, temos que a soma S deve ser mínima, isto é:

$S = 2x + 3{,}6y + 6{,}4z + 10$ (I)

Além disso, temos:

$2x + 4y + 6z = 12$ (II)

Atribuímos os seguintes valores naturais às ternas (x, y, z):

(6; 0; 0), (0; 3; 0), (0; 0; 2), (4; 1; 0), (3; 0; 1), (2; 2; 0) e (1; 1; 1)

A terna que verifica as duas condições é (0; 3; 0).

Então, temos:

$S = 2 \cdot 0 + 3{,}6 \cdot 3 + 6{,}4 \cdot 0 + 10$

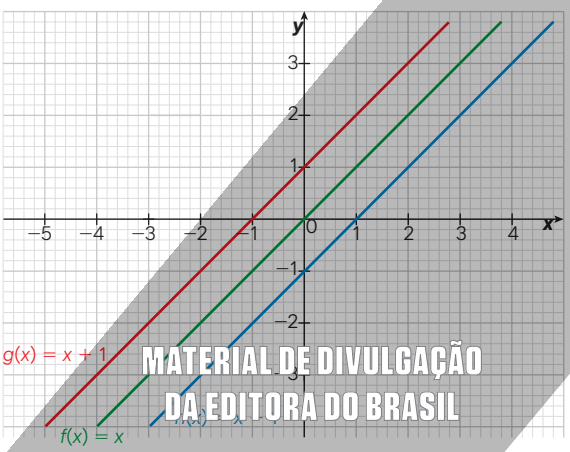
$S = 20{,}80$

Portanto, a menor quantia a ser gasta por essa menina e que possibilita levar o bichinho de pelúcia nessa promoção é R$ 20,80.

Alternativa **c**.

Página 29

Para explorar



Tarcísio Garbellini

1. Muitas respostas podem surgir. Por exemplo, os estudantes podem dizer apenas que os três gráficos são retas. Espera-se que percebam que os gráficos são retas paralelas, pois possuem a mesma taxa de variação.
2. A variedade de respostas também pode ser grande aqui. Espera-se que percebam que há um deslocamento das retas, de modo que elas cortam o eixo das ordenadas em pontos diferentes.
3. São os pontos em que o gráfico intersecta o eixo das ordenadas. Pode ser que os estudantes notem que esses também são os pontos em que as retas cortam o eixo das abscissas. Nesse caso, saliente que a reta $f(x) = x + 1$, por exemplo, corta o eixo das **ordenadas** no ponto (0; 1), embora corte o eixo das abscissas no ponto (0; −1). A ideia é levá-los a relacionar o valor do coeficiente b com sua representação gráfica.

Página 30

Para pensar e discutir

1. **a)** Espera-se que os estudantes reconheçam que a vazão é a taxa de variação entre o volume de água e os minutos. Sendo a essa vazão, temos $a = 8$ litros por minuto.

   b) $a = 8$ L/min

   c) A vazão não mudaria.

   d) Sendo y a quantidade de litros de água na piscina e x o tempo, em minutos, temos $y = 500 + 8x$.
2. O coeficiente a é a taxa de variação estabelecida entre as variáveis.
3. **a)** $a = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{1500 - 500}{2} = \frac{1000}{2} = 500$

   Logo, a taxa de variação é $a = 500$ L/h.

   b) A taxa de variação de f e g são iguais às de h, pois as retas são paralelas.
4. Basta dividir a diferença entre os valores de $f(x)$ pela diferença entre os respectivos valores de x.

Página 31

Para pensar e discutir

1. **a)** $f(0) = a \cdot 0 + 2 = 0 + 2 = 2$

   Logo, $f(0) = 2$.

   b) Não, pois 2 é o valor inicial da função.
2. **a)** Do gráfico, observamos que, para $x = 0$, temos $y = 2$, ou seja, $f(0) = 2$.

   b) Sim, $b = 2$. É possível encontrar esse valor pois, sendo o gráfico uma reta, sabemos que a função que gera o gráfico é do tipo $f(x) = ax + b$. Como $f(0) = 2$, então $0 + b = 2$, ou seja, $b = 2$.

Para pensar e discutir

1. Para calcular quanto tempo falta, bastar dividir o número de páginas do capítulo pelo tempo médio da leitura por página. Temos que o capítulo tem 40 páginas e o tempo médio de leitura é de 0,5 minuto. Então:

   $\frac{40}{0{,}5} = 20$

   Portanto, faltam 20 minutos para o leitor terminar o capítulo.
2. Para cada página lida, o tempo diminui 0,5 minuto.
3. 20 é o valor de b e 0,5 é o valor de a em $f(x) = ax + b$.
4. f: {0; 1; 2; 3; ...; 40} → [0; 20]; $f(x) = 20 - 0{,}5x$

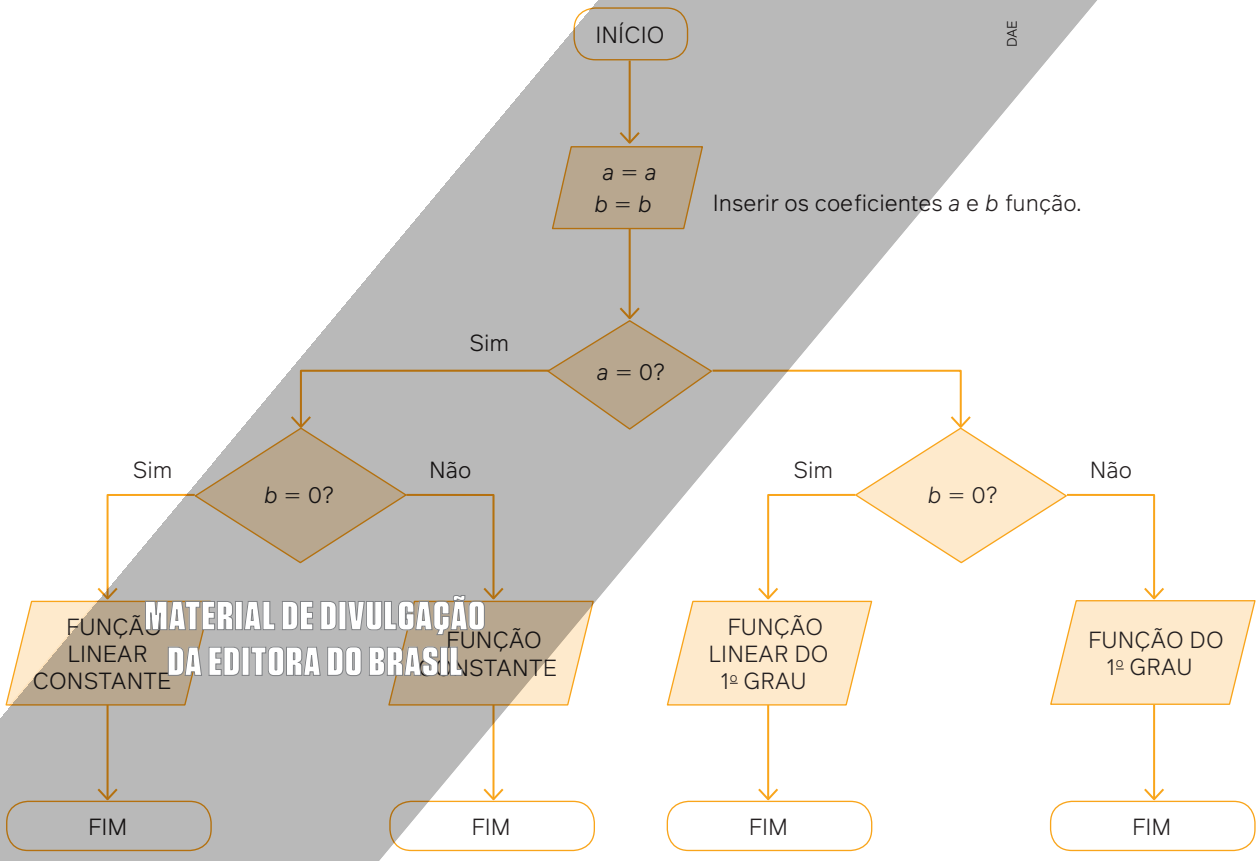
Página 32

Para explorar

1. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam, observando os ângulos de inclinação das retas, que a função constante é paralela ao eixo das abscissas.
2. Resposta pessoal. Depende da hipótese criada pelos estudantes.
3.

Funções afim	$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
$b = 0$	Função do 1º grau Função decrescente Função linear	Função constante Função linear	Função do 1º grau Função crescente Função linear
$b \neq 0$	Função do 1º grau Função decrescente	Função constante	Função do 1º grau Função crescente

4. Respostas pessoais. Exemplo de resposta:



DAE

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

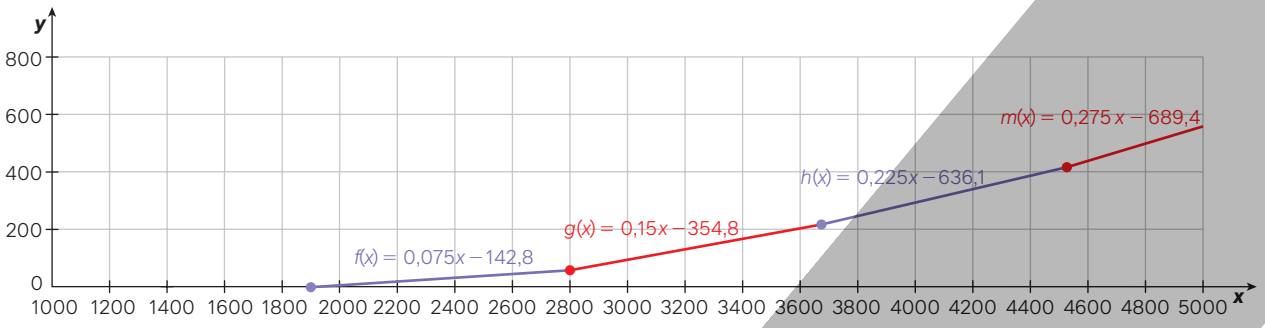
Páginas 33-34

Para pensar e discutir

A tabela utilizada neste bloco de questões refere-se às taxas de imposto praticadas em 2020. Para a realização das atividades pode ser interessante solicitar que os estudantes pesquisem e utilizem uma tabela atualizada. As respostas a seguir referem-se aos valores da tabela dada no livro.

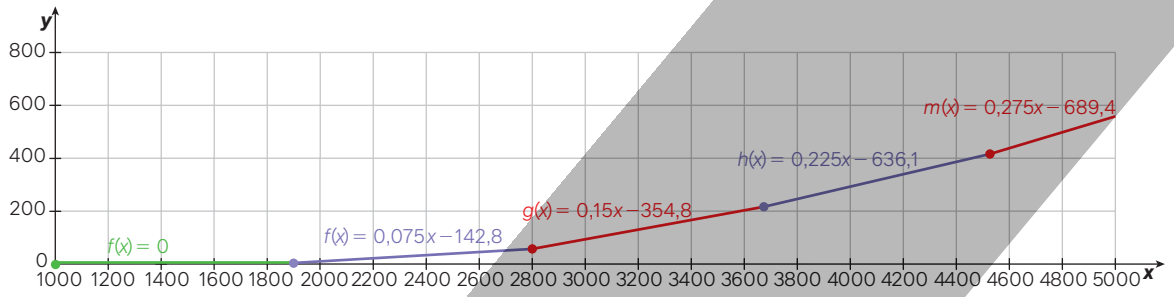
1. **a)** $f(x) = 0{,}075x - 142{,}8$
   b) $g(x) = 0{,}15x - 354{,}8$
   c) $h(x) = 0{,}225x - 636{,}1$
   d) $m(x) = 0{,}275x - 869{,}4$

2.



Tarcísio Garbellini

3.



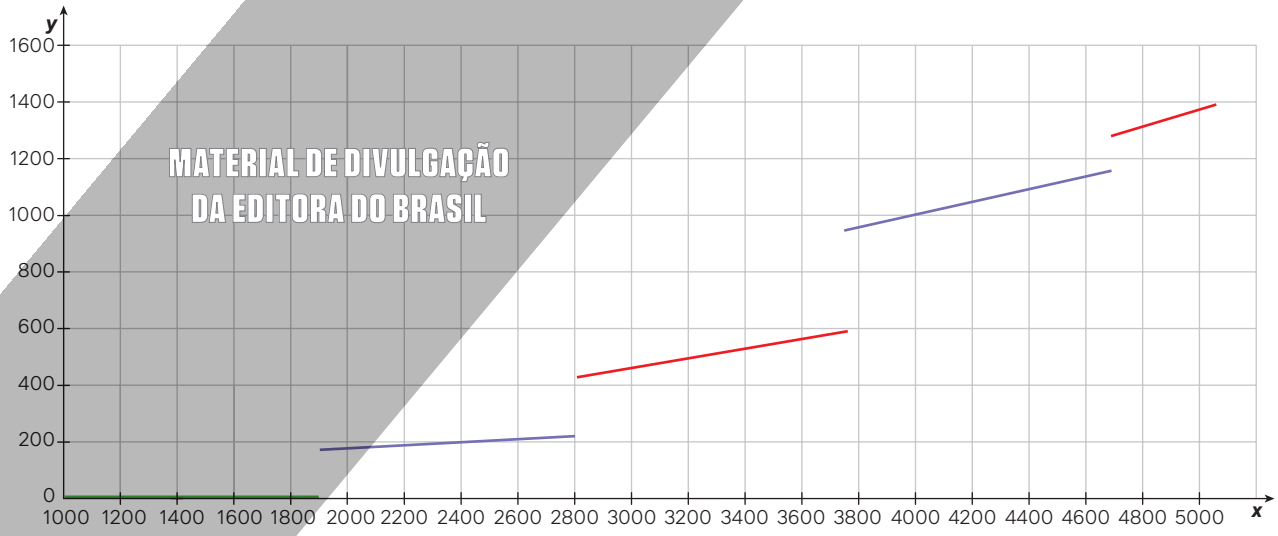
Tarcísio Garbellini

$f(x) = 0$. Essa função é linear constante.

Página 34

Para explorar

1. Resposta pessoal. Os valores de dedução garantem que a função seja contínua, ou seja, que quem está no extremo superior de um intervalo do domínio pague o mesmo imposto de quem está no extremo inferior do intervalo seguinte. Se não existissem as parcelas, o gráfico teria saltos de uma faixa salarial para a seguinte.



Tarcísio Garbellini

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

2. Respostas pessoais. É bem importante tratar desse assunto com outras áreas do conhecimento para que os estudantes tenham uma noção global de como funciona e para que serve o Imposto de Renda. Eles devem construir a ideia de que os impostos são um meio de o governo arrecadar dinheiro para a manutenção de serviços públicos. Além disso, devem ser capazes de entender de forma mais profunda que, no sistema econômico em que vivemos, esses impostos devem ser maiores para a parcela da população que ganha mais. A discussão sobre as faixas salariais pode chegar ao debate sobre taxações de grandes fortunas. Sendo esse um assunto bastante delicado, é importante trazer para os estudantes embasamentos históricos e sociais que os auxiliem na compreensão e na argumentação.

Página 35

Para pensar e discutir

1. Porque essa função só é válida após 3 horas de estacionamento.
2. A função seria composta de várias sentenças do tipo $f(x) = b$. O gráfico seria composto de vários segmentos de reta horizontais.
3. $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ para } 0 \leqslant x < 1 \\ 10, \text{ para } 1 \leqslant x < 2 \\ 20, \text{ para } 2 \leqslant x < 3 \\ 30, \text{ para } 3 \leqslant x < 4 \end{cases}$

Para pensar e discutir

Vamos determinar a fórmula para a altura das bonecas.

Temos $h(1) = 1$ e $h(12) = 23$ e sabemos que a função é da forma $h(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, sendo x o número da sequência da boneca. Então:

$h(1) = 1 \Rightarrow a + b = 1$ (I)

$h(12) = 23 \Rightarrow 12a + b = 23$ (II)

Subtraindo (I) de (II), obtemos o valor de a:

$11a = 22 \Rightarrow a = 2$

Substituindo o valor de a na equação (I), obtemos o valor de b:

$2 + b = 1 \Rightarrow b = -1$

Logo, $h(x) = 2x - 1$.

De modo análogo, vamos determinar a fórmula para a largura das bonecas

Temos $l(1) = 0{,}4$ e $l(12) = 9{,}2$ e sabemos que a função é da forma $l(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, sendo x o número da sequência da boneca. Então:

$l(1) = 1 \Rightarrow a + b = 0{,}4$ (I)

$h(12) = 9{,}2 \Rightarrow 12a + b = 9{,}2$ (II)

Subtraindo (I) de (II), obtemos o valor de a:

$11a = 8{,}8 \Rightarrow$

Substituindo o valor de a na equação (I), obtemos o valor de b:

$0{,}8 + b = 0{,}4 \Rightarrow b = -0{,}4$

Logo, $l(x) = 0{,}8x - 0{,}4$.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 36

Aproveitando a oportunidade

1. Para valores de $x < 2$ podemos afirmar que $|2 - x|$ é igual a $2 - x$.
2. Para valores de $x \geqslant 2$ podemos afirmar que $|2 - x|$ é o oposto de $2 - x$.
3. **a)** $|2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$, pois $2 - \sqrt{2} \geqslant 0$.

   b) $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$, pois $2 - \sqrt{3} \geqslant 0$.

   c) $|2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2$, pois $2 - \sqrt{5} \leqslant 0$.

   d) $|2 - \pi| = -(2 - \pi) = \pi - 2$, pois $2 - \pi \leqslant 0$.

Página 37

Para explorar

1. Temos:

   $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

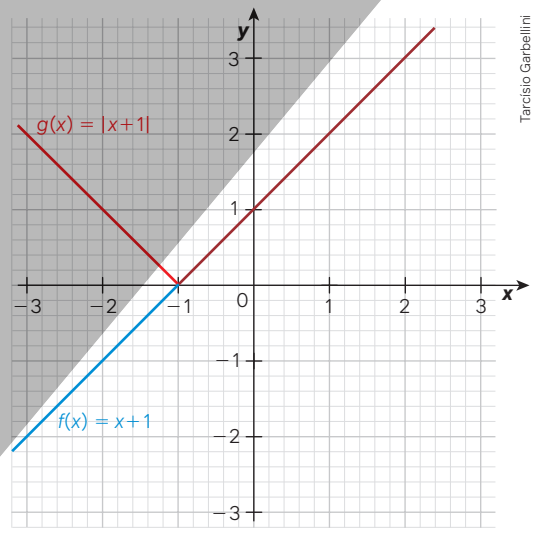
   Então:

   $|x + 1| = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \geqslant -1 \\ -x - 1, \text{ se } x < -1 \end{cases}$

   Logo, a função pode ser definida como uma função de duas sentenças:

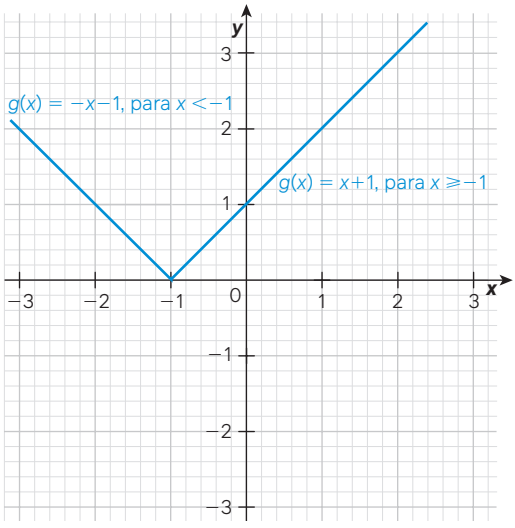
   $f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ para } x \geqslant -1 \\ -x - 1, \text{ para } x < -1 \end{cases}$
2. Exemplo de resposta:

   Sejam $f(x) = x + 1$ e $g(x) = |x + 1|$. Temos os gráficos representados abaixo.



Tarcísio Garbellini

Podemos obter com facilidade o gráfico de $g(x) = |f(x)| = |x + 1|$ espelhando a parte do gráfico de $f(x)$ que fica abaixo do eixo x, refletindo-a para cima desse eixo.



Tarcísio Garbellini

Páginas 38-41

Atividades finais

1. Sejam x e y os montantes aplicados nos bancos B e C, respectivamente.

Então, sabemos que:

Montante aplicado no banco A: R$ 1.000,00.

Montante aplicado no banco B: x reais

Montante aplicado no banco C: y reais.

Assim:

$1000 + x + y = 6000 \Rightarrow x + y = 5000 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 5000 - y$ (I)

Nos investimentos de baixo risco, temos:

$0{,}8 \cdot 1000 + 0{,}2x + 0{,}5y = 2700 \Rightarrow$

$\Rightarrow 800 + 0{,}2x + 0{,}5y = 2700$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos o valor de y:

$800 + 0{,}2 \cdot (5000 - y) + 0{,}5y = 2700$

$800 + 1000 - 0{,}2y + 0{,}5y = 2700$

$0{,}3y = 900$

$y = 3000$

Substituindo o valor de y na equação (I), obtemos o valor de x:

$x = 5000 - 3000 = 2000$

Logo, foram investidos R$ 2.000,00 no banco B e R$ 3.000,00 no banco C.

Notemos que o total aplicado nos bancos A, B e C foi de R$ 6.000,00.

Vamos determinar as medidas dos ângulos α, β e γ.

Calculamos o percentual do capital investido em cada tipo de aplicação:

Alto risco: $\frac{1152}{6000} = 0{,}2415 = 24{,}15\%$

Então, temos o ângulo $\alpha = 0{,}2415 \cdot 360° \cong 87°$.

Baixo risco: $\frac{2700}{6000} = 0{,}45 = 45\%$

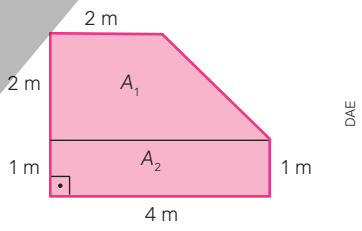
Então, temos o ângulo $\beta = 0{,}45 \cdot 360° = 162°$

Médio risco: $\frac{1850}{6000} \cong 0{,}308 = 30{,}8\%$

Então, temos o ângulo $\gamma = 0{,}308 \cdot 360° \cong 111°$.

Logo, as medidas dos ângulos α, β e γ são, respectivamente, 87°, 162° e 111°.

2. a) Vamos calcular a área do jardim:



DAE

$A_1 = 4\text{ m} \cdot 1\text{ m} = 4\text{ m}^2$

$A_2 = \frac{(4\text{ m} + 2\text{ m}) \cdot 2\text{ m}}{2} = 6\text{ m}^2$

Assim, a área total é:

$A_{Total} = A_1 + A_2 = 4\text{ m}^2 + 6\text{ m}^2 = 10\text{ m}^2$

Logo, a área do jardim é 10 m².

Vamos determinar a massa, em quilogramas, de calcário necessária para a correção do solo.

Área (m²)	Massa (g)
1	300
10	x

$x = 10 \cdot 300$

$x = 3000$

Portanto, 3000 g, ou seja, 3 kg é a massa de calcário necessária para a correção do solo do jardim.

b) Vamos determinar a massa de $MgCO_3$ no calcário dolomítico.

Seja x a massa de MgO, então:

Calcário (g)	MgO (g)
100	20
3000	x

$100x = 20 \cdot 3000$

$x = 600$

Seja y a massa de $MgCO_3$, então:

MgO + CO_2 (g)	$MgCO_3$ (g)
40	84
600	y

$40y = 600 \cdot 84$

$y = \frac{50\,400}{40}$

$y = 1260$

Vamos determinar a porcentagem da massa de $MgCO_3$:

Massa (g)	Porcentagem
3000	100
1260	p

$3000p = 1260 \cdot 100$

$p = \frac{126\,000}{3000}$

$p = 42$

Portanto, há 42%, em massa, de carbono de magnésio no calcário dolomítico adquirido pelo jardineiro.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

3. a) Calculamos a variação percentual c do cafezinho do estabelecimento A para o estabelecimento B:

$c = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$

Logo, a variação percentual do cafezinho é de 50%.

Calculamos agora a variação percentual cl do cafezinho com leite do estabelecimento A para o estabelecimento B:

$cl = \frac{4 - 2{,}50}{2{,}50} = \frac{1{,}50}{2{,}50} = 0{,}6 = 60\%$

Logo, a variação percentual do cafezinho com leite é de 60%.

b) No cafezinho com leite, temos $\frac{2}{3} \cdot 60$ mL $= 40$ mL de café.

Sabemos que, no estabelecimento B, 60 mL de cafezinho custa R$ 3,00. Então, vamos determinar quanto custam 40 mL.

Preço (R$)	Volume (mL)
3	60
x	40

$60x = 3 \cdot 40$

$x = \frac{120}{60}$

$x = 2$

Logo, 40 mL de café estão sendo vendidos por R$ 2,00.

Assim, os 20 mL de leite são vendidos no estabelecimento B por R$ 4,00 − R$ 2,00 = R$ 2,00.

Vamos determinar quanto custa, então, 1 L de leite (ou seja, 1000 mL) nesse estabelecimento.

Preço (R$)	Volume (mL)
2	20
x	1000

$20x = 2 \cdot 1000$

$x = \frac{2000}{20}$

$x = 100$

Logo, 1 L de leite é vendido por R$ 100,00 no estabelecimento B.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

4. Do enunciado, podemos estabelecer o volume armazenado (va), o volume útil (vu), que é de 982 bilhões de litros, e o volume da reserva técnica (rt), que é de 287 bilhões de litros.

Então, temos o volume total (vt):

$vt = vu + rt = 982 + 287 = 1269$

Logo, são 1269 bilhões de litros de volume total.

a) O índice 1 corresponde ao percentual do volume armazenado (va) em relação ao volume útil (vu). Então:

$\frac{va}{vu} = \frac{1269}{982} \cong 1{,}2923 = 129{,}23\%$

Portanto, o índice 1 é aproximadamente 129,23%

b) Sabendo que o índice 1 é de 50%, calculamos o volume armazenado (va):

$50\% = \frac{va}{vu}$

$0{,}5 = \frac{va}{vu}$

$0{,}5 = \frac{va}{982}$

$va = 0{,}5 \cdot 982$

$va = 491$

Sabendo esse valor, calculamos os demais índices:

Índice 2: $\frac{va}{vt} = \frac{491}{1269} \cong 0{,}3869 = 38{,}69\%$

Índice 3: $\frac{va - rt}{vt} = \frac{491 - 287}{982} = \frac{204}{982} \cong 0{,}2077 = 20{,}77\%$

Portanto, o índice 2 é aproximadamente 38,69% e o índice 3 é aproximadamente 20,77%.

c) Sabendo que o índice 3 é de −10%, calculamos o volume armazenado (*va*):

$-10\% = \frac{va - rt}{vt}$

$-0{,}1 = \frac{va - rt}{vt}$

$-0{,}1 = \frac{va - 287}{982}$

$va - 287 = -0{,}1 \cdot 982$

$va = 287 - 98{,}2$

$va = 188{,}8$

Assim:

Índice 2: $\frac{va}{vt} = \frac{188{,}8}{1\,269} \cong 0{,}1488 = 14{,}88\%$

Portanto, o índice 2 é aproximadamente 14,88%

5. Pelo enunciado, temos:

- Cidade *A*: o valor fixo da bandeirada é de R$ 3,45 e são cobrados mais R$ 2,05 por quilômetro rodado.
- Cidade *B*: o valor fixo da bandeirada é de R$ 3,60 e são cobrados mais R$ 1,90 por quilômetro rodado.

Vamos determinar qual é o valor que a pessoa gastou nas duas cidades para percorrer 6 km.

Cidade *A*:

$V_A = 3{,}45 + 6 \cdot 2{,}05$

$V_A = 3{,}45 + 12{,}3$

$V_A = 15{,}75$

Logo, o serviço de táxi na cidade *A* saiu por R$ 15,75.

Cidade *B*:

$V_B = 3{,}60 + 6 \cdot 1{,}90$

$V_B = 3{,}60 + 11{,}40$

$V_B = 15$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Logo, o serviço de táxi na cidade *B* saiu por R$ 15,00.

Agora, vamos determinar o custo médio por quilômetro rodado em cada corrida.

Cidade *A*: $\frac{15{,}75}{6} = 2{,}625 \cong 2{,}63$

Logo, R$ 2,63 é o custo médio do quilômetro rodado na cidade *A*.

Cidade B: $\frac{15}{6} = 2{,}5$

Logo, R$ 2,50 é custo médio do quilômetro rodado na cidade *B*.

Por fim, vamos determinar a diferença *d* entre as médias de custo por quilômetro rodado nas duas cidades.

$d = x_A - x_B$

$d = 2{,}63 - 2{,}50$

$d = 0{,}13$

Portanto, a diferença é de R$ 0,13.

Alternativa **e**.

6. Temos que *y* é a quantidade de trabalhadores e *x* é o número de meses a partir de janeiro. Também temos que o incremento de 4300 trabalhadores é sempre o mesmo em cada mês, nos seis primeiros meses, ou seja, 4300*x*.

Em fevereiro, há 880605 trabalhadores e, nesse mês, houve dois incrementos de 4300 trabalhadores (o de janeiro e o de fevereiro). Então, determinamos quantos trabalhadores havia no início do ano.

$880\,605 - 2 \cdot 4\,300 = 880\,605 - 8\,600 = 872\,005$

Logo, havia 872 005 trabalhadores no início do ano.

Assim, a expressão que relaciona a quantidade y de trabalhadores e o número de meses x, a partir de janeiro, é $y = 872\,005 + 4\,300x$.

Alternativa **c**.

7. Considerando x e y, respectivamente, o número de meninos e o de meninas da turma, temos:

$$\frac{2}{x - 2} = 0{,}08$$

$2 = (x - 2) \cdot 0{,}08$

$2 = 0{,}08x - 0{,}16$

$2{,}16 = 0{,}08x$

$$x = \frac{2{,}16}{0{,}08} = 27$$

Logo, na turma há 27 meninos.

$$\frac{1}{y - 3} = 0{,}05$$

$1 = (y - 3) \cdot 0{,}05$

$1 = 0{,}05y - 0{,}15$

$1{,}15 = 0{,}05y$

$$y = \frac{1{,}15}{0{,}05} = 23$$

Logo, na turma há 23 meninas.

Cálculo do percentual do número de meninos nos dias em que a turma está completa:

$$p = \frac{27}{27 + 23}$$

$$p = \frac{27}{50} = 0{,}54 = 54\%$$

Portanto, há 54% de meninos nos dias em que a turma está completa.

Alternativa **c**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

8. A expressão algébrica do nível da água y em função do número x de dias é da forma $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, e $x \in \mathbb{N}$.

Pelos dados da tabela, temos $f(5) = 6{,}35$ e $f(10) = 6{,}70$. Então:

$f(5) = 6{,}35 \Rightarrow 5a + b = 6{,}35$ (I)

$f(10) = 6{,}70 \Rightarrow 10a + b = 6{,}70$ (II)

Subtraindo (I) de (II), obtemos o valor de a:

$5a = 0{,}35$

$$a = \frac{0{,}35}{5}$$

$a = 0{,}07$

Substituindo o valor de a na equação (I), obtemos o valor de b:

$5 \cdot 0{,}07 + b = 6{,}35$

$b = 6{,}35 - 0{,}35$

$b = 6$

Logo, $y = f(x) = 0{,}07x + 6$

Alternativa **e**.

9. Na situação descrita, paga-se um valor fixo de 24 dólares anuais e mais 3 dólares por hora extra se quiser estender a pedalada, ou seja, $3x + 24$, em que x é o número de horas extras. Assim, a expressão que relaciona o valor $f(x)$ pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam x horas extras nesse período, é $f(x) = 3x + 24$.

Alternativa **d**.

10. A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível y no tanque e a distância x percorrida pelo automóvel é da forma $y = f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Pelo gráfico, temos $f(0) = 50$. Então:

$f(0) = 50$

$0 \cdot a + b = 50$

$b = 50$

Pelo gráfico também temos $f(500) = 0$. Então:

$f(500) = 0$

$500a + b = 0$

$500a + 50 = 0$

$500a = -50$

$$a = -\frac{50}{500}$$

$$a = -\frac{1}{10}$$

Logo, $y = -\frac{1}{10}x + 50 = -\frac{x}{10} + 50$.

Alternativa **b**.

11. A expressão algébrica que relaciona as grandezas convergência máxima $C_{máx}$ e idade T é da forma $y = C_{máx}(T) = aT + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Pelo gráfico, temos $C_{máx}(10) = 8$ e $C_{máx}(60) = 0$. Então:

$C_{máx}(60) = 0 \Rightarrow 60 \cdot a + b = 0 \Rightarrow b = -60a$ (I)

$C_{máx}(10) = 8 \Rightarrow 10a + b = 8$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$10a - 60a = 8$

$-50a = 8$

$$a = -\frac{8}{50}$$

$a = -0{,}16$

Substituindo o valor de a na equação (I), obtemos o valor de b:

$b = -60 \cdot (-0{,}16)$

$b = 9{,}6$

Logo, $C_{máx} = -0{,}16T + 9{,}6$.

Alternativa **e**.

12. Notemos que as temperaturas são relacionadas por uma função afim dada por $F = C \cdot 1{,}8 + 32$.

Quando $F = 0$, temos:

$$F = C \cdot 1{,}8 + 32$$
$$0 = C \cdot 1{,}8 + 32$$
$$1{,}8C = -32$$
$$C \cong -17{,}8$$

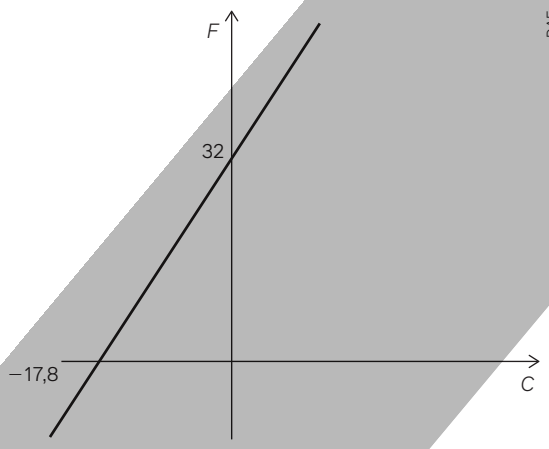
Logo, o gráfico intersecta o eixo das abscissas no ponto $-17{,}8$.

Quando $C = 0$, temos:

$$F = C \cdot 1{,}8 + 32$$
$$F = 0 \cdot 1{,}8 + 32$$
$$F = 32$$

Logo, o gráfico intersecta o eixo das ordenadas no ponto 32.

Portanto, o gráfico dessa função é:



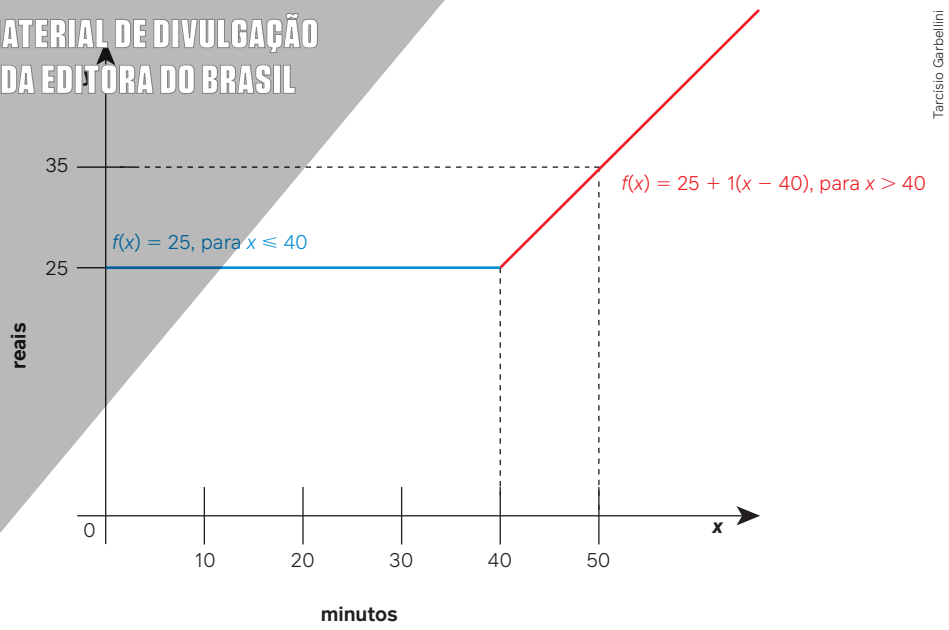
DAE

Alternativa **b**.

13. Temos um plano que custa R$ 25,00 mensais para até 40 minutos de conversação mensal e R$ 1,00 por minuto que exceda o tempo estipulado. Com esses dados podemos estabelecer a função e construir o gráfico:

$$y = f(x) = \begin{cases} 25, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 40 \\ 25 + 1 \cdot (x - 40), \text{ se } x > 40 \end{cases}$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL



Tarcisio Garbellini

Alternativa **b**.

UNIDADE 2 Progressão aritmética, funções e sistemas lineares

Objetivos

- Associar progressão aritmética com montantes de capital aplicado a uma taxa fixa e juros simples.
- Relacionar progressão aritmética com função afim.
- Identificar a razão de uma progressão aritmética com a taxa de crescimento de uma função afim.
- Investigar e obter as propriedades da progressão aritmética.
- Compreender a obtenção da fórmula do termo geral de uma progressão aritmética.
- Resolver e elaborar situações relacionadas ao termo geral de uma progressão aritmética.
- Compreender a obtenção da fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética.
- Resolver e elaborar situações relacionadas à soma dos termos de uma progressão aritmética.
- Resolver e elaborar problemas relacionados à progressão aritmética.

Justificativa

O trabalho com sequências e progressões aritméticas possibilita a investigação de propriedades e o estabelecimento de conjecturas matemáticas. A construção de modelos empregando as funções polinomiais de 1º grau, que podem também envolver inequações, sistemas lineares e progressões aritméticas, propicia resolver problemas de contextos variados, científicos ou da vida cotidiana, como situações da área financeira.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Competências e habilidades da BNCC trabalhadas nesta unidade

Competências gerais

Competências gerais 2, 4 e 9: Em várias situações propostas nesta unidade, os estudantes têm a oportunidade de desenvolver a **competência geral 2** ao exercitar a curiosidade intelectual, recorrendo a abordagens próprias das ciências (tais como a investigação e a criatividade) para elaborar e testar hipóteses e para formular e resolver problemas. Por exemplo, na seção **Para explorar** da página 55, eles investigam relações entre os elementos de uma progressão aritmética, elaboram progressões aritméticas e as explicitam por meio de seu termo geral, além de elaborarem problemas que envolvam interpolação aritmética para os colegas resolverem. Como todo esse trabalho é desenvolvido em duplas, mobilizam também a **competência geral 4** ao utilizar diferentes linguagens (como a verbal, a oral e a escrita, além da matemática) para expressar ideias e partilhar informações. Nessas atividades, os estudantes desenvolvem ainda a **competência geral 9** quando exercitam a empatia, o diálogo e a cooperação acolhendo e valorizando a perspectiva do outro.

Competência geral 5: As tecnologias digitais são utilizadas em diversos momentos ao longo desta unidade de maneira crítica, significativa e reflexiva, mobilizando, assim, a **competência geral 5**. Na seção **Para explorar** da página 60, por exemplo, os estudantes utilizam uma planilha eletrônica para elaborar uma tabela e um gráfico para analisar uma situação envolvendo juros simples. Além disso, elaboram e analisam uma situação que envolve um empréstimo feito nessa modalidade de juros, tendo a oportunidade de exercer o protagonismo e a autoria.

Competências específicas e habilidades de Matemática: 2, 3, 4, 5

Habilidades

EM13MAT203 e EM13MAT302: Na seção **Para explorar** da página 66, os estudantes utilizam uma planilha eletrônica para representar e analisar a situação de uma empresa que envolve lucro e prejuízo. Ao final, elaboram um texto explicando as conclusões obtidas com base nos valores atribuídos e informando a quantidade produzida da qual foi possível obter lucro. Essa análise leva em conta o emprego da função de 1º grau para resolver problemas. O estudo das inequações de 1º grau é desenvolvido como mais uma maneira de modelar e resolver problemas em vários contextos, por exemplo, o que está proposto na atividade 4 da página 73.

EM13MAT301: O trabalho realizado com as equações lineares simultâneas envolve a resolução de problemas do cotidiano, como os exemplificados na seção **Para pensar e discutir** da página 76. A atividade envolve o número de cédulas que podem ser retiradas em um caixa eletrônico quando se faz o saque de determinada quantia. As equações lineares simultâneas também são utilizadas para fazer o balanceamento de equações químicas, como nas atividades 3, 4 e 5 da página 83.

EM13MAT405: Na atividade 5 da página 48, os estudantes utilizam um algoritmo para descrever uma figura formada por uma sequência de quadrados.

EM13MAT507: Na página 61, os estudantes analisam o gráfico de uma função afim e o relacionam a uma progressão aritmética.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Resoluções e comentários

Página 43

Abertura

1. A semana é formada por 7 dias. Como os números dados são múltiplos de 7, estarão no mesmo dia da semana do mesmo mês.
2. O ano de 2004 foi bissexto. O ano 1900 não foi bissexto. E o ano 2000 foi bissexto.
   Há uma atividade nesta unidade que explica isso.

Página 44

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal. Espera-se que o estudante argumente que, por exemplo, os correios precisam utilizar números para localização.
2. Resposta pessoal. Espera-se que o estudante comente que de um lado da rua aparecem, números pares e do outro lado, números ímpares.

Página 45

Para explorar

1. Resposta pessoal que dependerá da pesquisa que os estudantes farão. Uma sugestão interessante de leitura e pesquisa é o livro *O diabo dos números*, escrito por Hans Magnus Enzensberger. No capítulo "A sexta noite", eles encontrarão tudo a respeito dessa intrigante sequência. A leitura dessa obra poderá ser também utilizada para instigá-los a conhecer um pouco melhor a história dos números, de uma forma muito mais lúdica.
2. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765.
3. Resposta pessoal que dependerá da pesquisa que os estudantes farão. Existem diversas e intrigantes curiosidades a respeito da sequência de Fibonacci que podem servir de pretexto para essa pesquisa. O número de ouro, a natureza e a sequência de Fibonacci são apenas alguns exemplos.
4. $F(n + 2) = F(n + 1) + F(n)$, com $n \geqslant 1$ e $F(1) = F(2) = 1$

Para pensar e discutir

1. Na figura 1, marcamos os pontos médios de cada um dos três lados que delimitam o triângulo. Unimos esses três pontos médios e obtemos quatro triângulos, cuja medida do lado, é a metade da medida do lado da figura 1, e a área é $\frac{1}{4}$ da área da figura 1. Assim:

$$\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$$

Portanto, na figura 2, cada um dos triângulos equiláteros congruentes representa 25% da área do triângulo equilátero da figura 1.

2.

	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5
Triângulos brancos	0	1	4	13	40
Triângulos pretos	1	3	9	27	81

Página 47

Para pensar e discutir

1. O sexto termo é igual a 21.
Observando a regularidade na sequência, temos que os primeiros números triangulares são (1; 3; 6; 10; 15; 21; ...)
Os acréscimos de um termo para o outro vão aumentando 1 unidade. Assim, do 1º para o 2º termo acrescentam-se 2, do 2º termo para o 3º termo acrescentam-se 3, do 3º termo para o 4º termo, 4, do 4º termo para o 5º termo acrescentam-se 5, e assim sucessivamente.
2. Na sequência dos números quadrados, temos que $Q_n = n^2$, sendo n um número natural diferente de zero. Então:
$Q_{10} = 10^2 = 100$
Portanto, $Q_{10} = 100$.
3. O 5º número pentagonal é igual a 35.
O padrão a ser observado é que do 1º para o 2º termo acrescentam-se 4, do 2º para o 3º termo acrescentam-se 7, do 3º para o 4º termo acrescentam-se 10, do 4º para o 5º termo acrescentam-se 13, e assim por diante.
4. Resposta pessoal.
É importante que os estudantes externem oralmente como essas sequências são formadas.
Uma sugestão de atividade: solicite que elaborem (em equipe) um algoritmo para descrever as três sequências numéricas.

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal. A soma dos n primeiros números naturais ímpares e consecutivos resulta no quadrado de n. Assim, a soma dos 6 primeiros números naturais ímpares e consecutivos resulta no quadrado de 6.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

2. Resposta pessoal, pois o estudante terá que investigar. A soma dos números pares e consecutivos resulta na sequência (0; 2; 6; 12; 20; ...). Nela, os acréscimos de um termo para o outro são: 2, 4, 6, 8, 10, ..., o que resultará numa sequência denominada progressão aritmética (os acréscimos), assunto a ser estudado nesta unidade.

Página 48

Atividades

A ideia central destas atividades é levar os estudantes a pensar nos padrões observados em diversas situações. A identificação de padrões é o primeiro passo para que depois eles consigam fazer algumas generalizações. Sugerimos que algumas dessas atividades sejam feitas individualmente em sala de aula com correções coletivas. Assim, verifica-se a compreensão do que está sendo desenvolvido.

1. a) 8 quadradinhos. Justificativa pessoal.

Espera-se que os estudantes percebam que as quantidades de quadradinhos na sequência aumentam de 2 em 2, ou seja, 2; 4; 6; 8, ...

b) Seguindo o mesmo raciocínio do item **a**, 20 é quantidade de quadradinhos que farão parte da Figura 10.

c) Podemos obter a quantidade de quadradinhos que farão parte da enésima figura por $Q_n = 2n$, sendo n um número natural diferente de zero.

2. a)

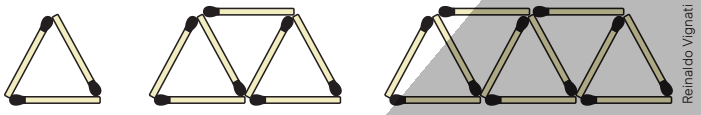


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Reinaldo Vignati

b)

Figura	Números de palitos	Números de triângulos
1	3	1
2	7	3
3	11	5
4	15	7
5	19	9
6	23	11
7	27	13
8	31	15
9	35	17
10	39	19
11	43	21
12	47	23
13	51	25
14	55	27
15	59	29
16	63	31
17	67	33
18	71	35
19	75	37
20	79	39

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

3. A curiosidade é que os números seguem um padrão na escrita por extenso – **d**ois, **d**oze, **d**ezesseis, **d**ezessete, **d**ezoito, **d**ezenove – todos começam pela letra **d**. Assim, o próximo número que começará pela letra **d** é **d**uzentos. Portanto, 200 é o número que falta.
4. Resposta pessoal.
   Incentive os estudantes a pesquisar desafios que estejam relacionados à formação de sequências de números ou mesmo de figuras. A ideia é envolvê-los na busca de padrões e relações.
5. A resposta dependerá de como os estudantes interpretarão a formação dos quadrados.
   Exemplo de resposta: No quadrado maior, localize os pontos médios e ligue-os consecutivamente por meio de segmentos para formar um novo quadrado; pinte a região entre os dois quadrados; com os pontos médios do segundo quadrado forme um terceiro quadrado; com os pontos médios do terceiro quadrado forme um quarto quadrado; pinte a região entre o terceiro quadrado e o quarto quadrado; com os pontos médios do quarto quadrado forme um quinto quadrado; pinte o quinto quadrado.

Página 49

Para pensar e discutir

1. 10º termo: $4 \cdot 9 = 36$
   20º termo: $4 \cdot 19 = 76$
2. A expressão matemática que representa o n-ésimo termo é $4(n - 1)$.
3. Substituindo n nessa expressão por 22, obtemos o 22º termo da sequência.

Página 50

Para explorar

A elaboração de uma fórmula de termo geral possibilita que os estudantes constatem que podemos gerar sequências diversas por meio de expressões que relacionam o termo com sua posição na sequência. É preciso cuidar para que a variável que indica a posição do termo na sequência (1º termo, 2º termo, 3º termo etc.) seja um número natural maior ou igual a um.

1. Resposta pessoal, pois dependerá da elaboração de cada dupla.
2. Resposta pessoal.
3. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes cheguem à conclusão de que anos bissextos são todos aqueles que são múltiplos de 4, exceto os que são múltiplos de 100. Entretanto, dos múltiplos de 100, também são anos bissextos os que são múltiplos de 400.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Páginas 50-51

Atividades

Nestas atividades temos um segundo passo importante para o trabalho com as sequências numéricas, que é associar a ordem de um termo a uma relação matemática chamada de termo geral. É necessário chamar a atenção para o fato de que usamos números naturais para identificar os termos (1º termo; 2º termo etc.), motivo pelo qual as fórmulas dos termos gerais de sequências também são expressas em função de números naturais. Isso não significa que os termos da sequência serão números naturais, porém serão obtidos de números naturais dados com base na posição do termo que se deseja na sequência.

1. **a)** (5; 9; 13; 17; 21; 25)
   b) Seguindo a sequência do item **a**, temos esta sequência: (5; 9; 13; 17; 21; 25; 29; 33; 37; 41; 45; ...).
   Portanto, 41 é o 10º termo da sequência.
   c) De fato, o termo geral é a expressão dada. O estudante pode explicar afirmando que atribuiu valores para n (1, 2, 3 etc.) e verificou se geravam a sequência.
2. **a)** $\left(\sqrt{1}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{4}; \sqrt{5}; \sqrt{6}\right)$ ou $\left(1; \sqrt{2}; \sqrt{3}; 2; \sqrt{5}; \sqrt{6}\right)$
   b) Os cinco primeiros números naturais dessa sequência são: 1, 2, 3, 4 e 5. Basta fazer n igual a 1, 4, 9, 16 e 25, respectivamente.
3. **a)** (2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29)

b) A sequência dos números naturais que são cubos perfeitos é dada por $C_n = n^3$, sendo n um número natural (pois o primeiro número natural que é um cubo perfeito é o zero). Logo, $C_9 = 9^3 = 729$.

Portanto, 729 é o 10º termo da sequência dos números naturais que são cubos perfeitos.

4. a) (3; 6; 10; 15; 21)

b) (1; 4; 9; 16; 25)

5. a) Na etapa 6, a figura será formada por 46 triângulos.

b) Resposta pessoal. Resposta possível: (1; 1 + 3; 4 + 6; 10 + 9; 19 + 12; 31 + 15; ...). Cada número (correspondente à quantidade de triângulos) a partir do segundo é o anterior acrescido de um múltiplo de 3, iniciando em 3.

6. a) (1; 6; 15; 20; 15; 6; 1)

b) (1; 2; 4; 8; 16; 32; ...)

c)

1ª linha	1										
2ª linha	1	1									
3ª linha	1	2	1								
4ª linha	1	3	3	1							
5ª linha	1	4	6	4	1						
6ª linha	1	5	10	10	5	1					
7ª linha	1	6	15	20	15	6	1				
8ª linha	1	7	21	35	35	21	7	1			
9ª linha	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
10ª linha	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
11ª linha	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Logo, a soma dos números da 11ª linha é:
1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 1024

d) Resposta pessoal. Sugestão de resposta: Cada linha começa e termina com o número 1. A partir da terceira linha, os demais números (exceto o primeiro e o último) de cada linha sempre resultam da soma de dois números consecutivos da linha imediatamente acima.

7. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

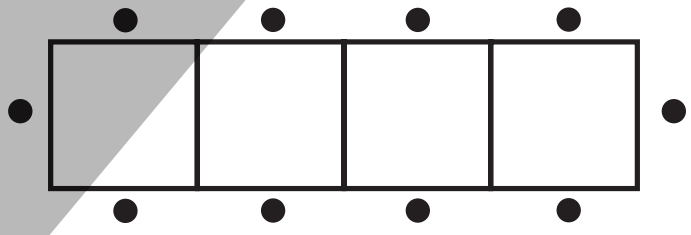
Nessa atividade os estudantes poderão elaborar por exemplo sequências formadas pelo número de palitos em cada figura, sequências com o número de quadrados de mesmo tamanho em cada figura, sequências com as medidas de áreas etc.

Página 52

Para pensar e discutir

1. Ao se juntarem 2 mesas, perdem-se 2 lugares e, ao se juntarem 3 mesas, perdem-se 4 lugares.

2.



Tarcísio Garbellini

Portanto, 10 pessoas podem ser acomodadas juntando-se 4 mesas.

3. **Resolução 1**

Número de mesas	Número de pessoas
1	4
2	6
3	8
4	10
5	12
6	14
7	16
8	18
9	20
10	22
11	24
12	26
13	28
14	30

Portanto, serão necessárias 14 mesas para juntar 30 pessoas.

Resolução 2

Podemos usar o algoritmo $P_n = 2(n + 1)$, sendo n um número natural diferente de zero, para representar o número de pessoas conforme o número de mesas.

Vamos determinar o número de mesas que são necessárias para juntar 30 pessoas, ou seja, $P_n = 30$ e $n = ?$

$30 = 2(n + 1)$

$15 = n + 1$

$n = 14$

Portanto, são necessárias 14 mesas para juntar 30 pessoas.

4. A sequência é (4; 6; 8; 10; 12; ...). Pode-se explicar afirmando que, a partir do número 4 (primeiro termo da sequência), cada termo é o anterior com o acréscimo de 2. Pode-se também simplesmente dizer que, para cada mesa acrescentada, aumentam-se dois lugares.

Página 53

Para pensar e discutir

1. A razão deve ser maior que zero ($r > 0$).
2. Progressão aritmética constante.
3. A progressão aritmética é decrescente.

Página 54

Para pensar e discutir

1. O 7º termo é $a_7 = a_1 + 6r$.
2. O 100º termo é $a_{100} = a_1 + 99r$.
3. Representa o 503º termo, isto é, a_{503}.
4. O n-ésimo termo é representado por $a_n = a_1 + (n - 1)r$.

   Essa discussão é fundamental para que os estudantes obtenham a generalização. Caso encontrem dificuldade para chegar à resposta do item 4, sugerimos que você desenvolva mais alguns termos em função do primeiro e da razão da progressão aritmética.

Página 55

Para explorar

1ª parte

1. Na sequência dos números naturais ímpares consecutivos temos $a_1 = 1$, $r = 3 - 1 = 2$. Queremos saber $a_{10} = ?$

   $a_n = a_1 + (n - 1)r$

   $a_{10} = 1 + (10 - 1) \cdot 2$

   $a_{10} = 1 + 9 \cdot 2$

   $a_{10} = 1 + 18$

   $a_{10} = 19$

   Portanto, o 10º termo é 19.

2. $a_{20} = 1 + (20 - 1) \cdot 2$

   $a_{20} = 1 + 19 \cdot 2$

   $a_{20} = 1 + 38$

   $a_{20} = 39$

   $a_{100} = 1 + (100 - 1) \cdot 2$

   $a_{100} = 1 + 99 \cdot 2$

   $a_{100} = 1 + 198$

   $a_{100} = 199$

   Portanto, o 20º termo é 39 e o 100º termo é 199.

3. Temos $a_1 = 1$ e $r = 2$. Então:

   $a_n = a_1 + (n - 1)r$

   $a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2$

   $a_n = 1 + 2n - 2$

   $a_n = 2n - 1$

   Portanto, a fórmula do termo geral dessa progressão aritmética é $a_n = 2n - 1$.

2ª parte

1. Resposta pessoal: depende das progressões aritméticas elaboradas.

   Exemplos de resposta:

   S_1: (2; 5; 8; 11; 14)

   S_2: (5; 5; 5; 5; 5)

   S_3: (18; 16; 14; 12; 10)

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

2. Considerando os exemplos do item **a**:

S_1: $a_1 = 2$ e $r = 3$. Então:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 3$
$a_n = 2 + 3n - 3$
$a_n = 3n - 1$
S_2: $a_1 = 5$ e $r = 0$. Então:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_n = 5 + (n - 1) \cdot 0$
$a_n = 5 + 0$
$a_n = 5$
S_3: $a_1 = 18$ e $r = -2$. Então:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_n = 18 + (n - 1) \cdot (-2)$
$a_n = 18 - 2n + 2$
$a_n = 20 - 2n$

3ª parte

1. Resposta pessoal. Sugestão: Interpolar meios aritméticos entre dois números dados significa colocar, entre esses números, certa quantidade de outros números para que a sequência resultante formada pelos dois números dados e os números inseridos seja uma progressão aritmética.

Calculamos a razão sendo $a_1 = 10$ e $a_{16} = 400$.
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$400 = 10 + (16 - 1)r$
$400 = 10 + 15r$
$15r = 400 - 10$
$r = \frac{390}{15}$
$r = 26$

Logo, a razão da progressão aritmética será 26 e a progressão aritmética será (10; 36; 62; 88; 114; 140; 166; 192; 218; 244; 270; 296; 322; 348; 374; 400).

2. Resposta pessoal que depende da situação elaborada. Oriente os estudantes para que utilizem como exemplo o item anterior da interpolação aritmética.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Atividades

Embora sejam poucas, estas atividades são importantes para a identificação e a obtenção do termo geral de uma progressão aritmética. É desejável que, ao final delas, os estudantes tenham compreendido que o termo geral de uma progressão aritmética representa, como o próprio nome diz, uma generalização. Outra compreensão esperada é que, conhecendo-se o primeiro termo de uma PA e a razão dessa sequência, pode-se determinar seu termo geral, isto é, a fórmula que possibilita obter qualquer termo conhecendo-se a posição do termo da sequência (o termo geral a_n representa uma função de n).

Escolha algumas dessas atividades para serem feitas individualmente como tarefa. A ideia é desenvolver a autonomia de resolução dos estudantes. Sugestão: atividades de 1 a 6.

1. **a)** Temos $a_1 = 20$ e $r = 15 - 20 = -5$. Então:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_n = 20 + (n - 1) \cdot (-5)$
$a_n = 20 - 5n + 5$
$a_n = -5n + 25$

b) $a_{15} = -5 \cdot 15 + 25 = -50$
Portanto, o 15º termo é $a_{15} = -50$.

2. **a)** Temos $a_n = 4_n - 1$. Então:

$a_1 = 4 \cdot 1 - 1 = 3$
$a_2 = 4 \cdot 2 - 1 = 7$
$a_3 = 4 \cdot 3 - 1 = 11$
$a_4 = 4 \cdot 4 - 1 = 15$
Portanto, os 4 primeiros termos são (3; 7; 11; 15).

b) $a_{25} = 4 \cdot 25 - 1 = 99$
Portanto, o 25º termo é $a_{25} = 99$.

3. a) Temos $r = -7{,}2$ e $a_1 = 100$. Então:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_{20} = 100 + (20 - 1) \cdot (-7{,}2)$
$a_{20} = 100 - 136{,}8$
$a_{20} = -36{,}8$
Portanto, o 20º termo é $a_{20} = -36{,}8$.

b) $a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_n = 100 + (n - 1) \cdot (-7{,}2)$
$a_n = 100 - 7{,}2n + 7{,}2$
$a_n = -7{,}2n + 107{,}2$
Logo, a fórmula do termo geral é $a_n = -7{,}2n + 107{,}2$.

4. a) Sim, pois cada termo, a partir do segundo, corresponde ao termo anterior adicionando-se a constante $-1 - \sqrt{2}$.

b) Temos $a_1 = 3 - \sqrt{2}$, $r = -1 - \sqrt{2}$. Então:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_{20} = (3 - \sqrt{2}) + (20 - 1) \cdot (-1 - \sqrt{2})$
$a_{20} = 3 - \sqrt{2} - 19 - 19\sqrt{2}$
$a_{20} = -16 - 20\sqrt{2}$
Portanto, o 20º termo é $a_{20} = -16 - 20\sqrt{2}$.

5. a) O primeiro múltiplo de 3 maior que 100 é 102. Então, se $a_1 = 102$ e $r = 3$, obtemos:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_n = 102 + (n - 1) \cdot 3$
$a_n = 102 + 3n - 3$
$a_n = 3n + 99$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

b) O primeiro número par maior que 1 é 2. Então, se $a_1 = 2$ e $r = 2$, obtemos:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 2$
$a_n = 2 + 2n - 2$
$a_n = 2n$

c) O primeiro múltiplo de 4 maior que 50 é 52. Então, se $a_1 = 52$ e $r = 4$, obtemos:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_n = 52 + (n - 1) \cdot 4$
$a_n = 52 + 4n - 4$
$a_n = 4n + 48$

6. a) Temos $a_3 = 16$, $r = -6$ e $a_1 = ?$
$a_3 = a_1 + (3 - 1) \cdot (-6)$
$16 = a_1 + 2 \cdot (-6)$
$16 = a_1 - 12$
$a_1 = 16 + 12$
$a_1 = 28$
Então, sabendo que $a_1 = 28$ e $r = -6$, obtemos:
$a_8 = 28 + (8 - 1) \cdot (-6)$
$a_8 = 28 + 7 \cdot (-6)$
$a_8 = 28 - 42$
$a_8 = -14$
Logo, o 8º termo é $a_8 = -14$.

b) Temos $a_1 = -2$, $r = 3 - (-2) = 5$ e $a_n = 48$. Então:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$48 = -2 + (n - 1) \cdot 5$
$48 = -2 + 5n - 5$
$48 = 5n - 7$
$5n = 55$
$n = 11$
Portanto, a progressão aritmética finita tem 11 termos.

c) Temos $a_{10} = 39$, $r = 4$ e $a_1 = ?$
$a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot 4$
$39 = a_1 + 9 \cdot 4$
$39 = a_1 + 36$
$a_1 = 3$
Portanto, o primeiro termo é 3.

d) O primeiro múltiplo de 7 maior que 30 é 35 e menor que 250 é 245. Então, $a_1 = 35$, $r = 7$ e $a_n = 245$.

Resolução 1
Determinamos a fórmula do termo geral:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_n = 35 + (n - 1) \cdot 7$
$a_n = 35 + 7n - 7$
$a_n = 7n + 28$
Determinamos a quantidade de termos tal que $a_n = 245$:
$a_n = 7n + 28$
$245 = 7n + 28$
$7n = 217$
$n = \frac{217}{7}$
$n = 31$

Resolução 2
Determinamos a quantidade de termos:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$245 = 35 + (n - 1) \cdot 7$
$245 = 35 + 7n - 7$
$7n = 217$
$n = \frac{217}{7}$
$n = 31$
Portanto, existem 31 múltiplos de 7 entre 30 e 250.

e) Resposta pessoal que depende da situação elaborada pelo estudante. Ele poderá pensar, por exemplo, na quantidade de múltiplos de 11 entre dois números naturais; em quantos múltiplos naturais de 11 são formados por três algarismos etc.

7. a) $(x - r; x; x + r)$

b) $(x - 2r; x - r; x; x + r, x + 2r)$

c) Utilizando o artifício de três números em progressão aritmética e considerando que a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é igual a 180°, temos:

$x - r + x + x + r = 180°$

$3x = 180°$

$x = \frac{180°}{3}$

$x = 60°$

d) Utilizando o artifício de três números em progressão aritmética e o teorema de Pitágoras, temos:

$(x + r)^2 = x^2 + (x - r)^2$

$x^2 + 2xr + r^2 = x^2 + x^2 - 2xr + r^2$

$x^2 - 4xr = 0$

$x(x - 4r) = 0$

$x = 0$ ou $x = 4r$ ($x = 0$ não convém)

Portanto, os lados medem $(3r, 4r, 5r)$. Assim, as medidas dos lados são proporcionais às medidas dos lados de um triângulo de medidas 3, 4 e 5. A razão da progressão aritmética representará a constante de proporcionalidade.

Página 56

Para pensar e discutir

1. Sendo x o segundo termo da PA e r a razão, então, o termo anterior a ele é $x - r$ e o termo posterior é $x + r$.
   Logo, os três termos podem ser representados por $(x - r; x; x + r)$.
2. Nesse momento, é importante que os estudantes tentem resolver o desafio usando as próprias hipóteses e estratégias. É um bom momento para você, professor, observar a forma como eles pensam para tentar resolvê-lo. Esse desafio será retomado e resolvido na página 58.

Página 57

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal, mas espera-se que os estudantes tenham feitos progressões aritméticas diferentes.
2. As quatro afirmações são verdadeiras em qualquer progressão aritmética.
3. Resposta pessoal, mas espera-se que todos os estudantes tenham chegado à mesma conclusão, independentemente da progressão aritmética que foi elaborada.
   Essa investigação possibilita que os estudantes no mínimo "desconfiem" da existência de certa regularidade em relação às afirmações. Comente com eles que essas afirmações valem para quaisquer progressões aritméticas. Encontram-se aqui propriedades de uma progressão aritmética.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 58

Para explorar

1ª parte

1.

60			n	
45	65	z		
30		y		130
15		75		
0				

2. Calculamos os valores de z e y, tendo $x = 15$.

   $130 = 3x + z$

   $130 = 3 \cdot 15 + z$

   $z = 130 - 45$

$z = 85$

$y = \frac{z + 75}{2}$

$y = \frac{85 + 75}{2}$

$y = \frac{160}{2}$

$y = 80$

Assim:

60			n	
45	65	85	85 + 20 = 105	105 + 20 = 125
30		80		130
15		75		
0				

Usando os elementos que já conhecemos na 3ª, 4ª e 5ª linha, podemos completá-las:

60			n	
45	65	85	85 + 20 = 105	105 + 20 = 125
30	30 + 25 = 55 ou 80 − 25 = 55	80	80 + 25 = 105 ou 130 − 25 = 105	130
15	15 + 30 = 45 ou 75 − 30 = 45	75	75 + 30 = 105	105 + 30 = 135
0				

Agora, usando os elementos que já conhecemos na 2ª à 5ª coluna, completamos:

60	65 + 10 = 75	85 + 5 = 90	105	125 − 5 = 120
45	65	85	105	125
30	55	80	105	130
15	45	75	105	135
0	45 − 10 = 35	75 − 5 = 70	105	135 + 5 = 140

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Portanto:

60	75	90	105	120
45	65	85	105	125
30	55	80	105	130
15	45	75	105	135
0	35	70	105	140

2ª parte

1. e 2. Resposta pessoal que depende da tabela formada pela dupla. Exemplo de resposta:

			21	
	13			
				n
		15		
0				

Resposta dessa tabela:

12	15	18	**21**	24
9	**13**	17	21	25
6	11	16	21	**26**
3	9	**15**	21	27
0	7	14	21	28

Página 59

Para pensar e discutir

1. Não. Os juros aumentam sempre R$ 1.000,00, correspondentes a 10% do valor emprestado.
2. Sim. Os montantes aumentam sempre R$ 1.000,00 correspondentes a 10% do valor emprestado.
3. Nessa situação, temos $a_1 = 11\,000$, $r = 1\,000$ e $a_{10} = ?$

   $a_n = a_1 + (n - 1)r$

   $a_{10} = 11\,000 + (10 - 1) \cdot 1\,000$

   $a_{10} = 11\,000 + 9 \cdot 1\,000$

   $a_{10} = 20\,000$

   Portanto, a dívida ao final de 10 anos será de R$ 20.000,00 caso Júlia não efetue nenhum pagamento.

Página 60

Para pensar e discutir

1. $M_4 = C(1 + 4i)$
2. $M_{10} = C(1 + 10i)$

   Essas questões possibilitam verificar se os estudantes conseguem, aos poucos, generalizar, sistematizar. É bem provável que a maioria consiga até externar oralmente a relação para o montante em n meses.

Para explorar

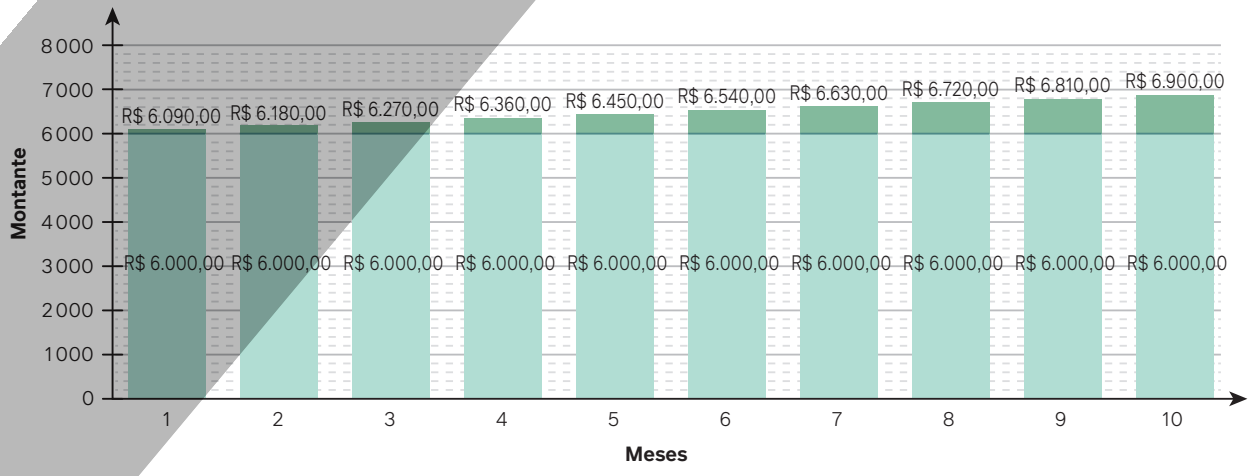
1ª parte

Número de meses	Valor inicial da dívida	Taxa	Montante
1	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.090,00
2	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.180,00
3	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.270,00
4	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.360,00
5	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.450,00

Número de meses	Valor inicial da dívida	Taxa	Montante
6	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.540,00
7	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.630,00
8	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.720,00
9	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.810,00
10	R$ 6.000,00	1,5%	R$ 6.900,00

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Dívida a juros [illegible]



Tarcísio Garbellini

2ª parte

Resposta pessoal. Incentive os estudantes a usar uma taxa de juros mensais no contexto atual para que reflitam sobre a realidade de percentuais praticados, mesmo que a situação envolva juros simples, que não são utilizados normalmente em transações comerciais, principalmente naquelas de empréstimos contraídos em instituições financeiras.

Página 61

Para pensar e discutir

1. O coeficiente da variável n é chamado de taxa de crescimento da função e, na progressão aritmética, indica o valor da razão. O valor de $f(10)$ corresponde ao 10º termo da progressão aritmética.
2. Para $f(x) = -5x + 20$, temos:
   $f(1) = -5 \cdot 1 + 20 = -5 + 20 = 15$
   $f(2) = -5 \cdot 2 + 20 = -10 + 20 = 10$
   Então:
   $r = f(2) - f(1) = 10 - 15 = -5$
   Logo, a razão dessa PA é $r = -5$.

Para pensar e discutir

1. A taxa de crescimento da função é 2. Provavelmente o estudante identifica essa taxa com base no estudo de função afim do capítulo anterior.
2. Enquanto as abscissas aumentam de 1 em 1, as ordenadas aumentam de 2 em 2.
3. A progressão aritmética tem razão 2, e essa razão é igual à taxa de crescimento da função afim.

Essa discussão pode ser ampliada propondo-se outras funções afim para que os estudantes façam os gráficos e observem o comportamento da função correspondente.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 62

Atividades

São propostas a seguir apenas seis atividades. Embora em número reduzido, elas exigirão um pouco mais dos estudantes pelo fato de estarem relacionando progressão aritmética com função afim, com juros simples, além de envolverem propriedades de uma progressão aritmética. No caso das atividades com juros simples é importante ressaltar que essa modalidade não é comum em transações financeiras. Entretanto, ela poderia ser utilizada em economias mais estáveis.

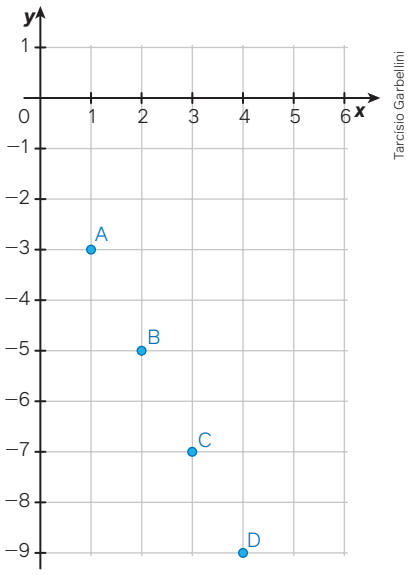
1. **a)** É uma PA, pois é formada pelos valores de uma função afim. Determinamos os termos da sequência $(f(1); f(2); f(3); ...)$:
   $f(x) = 2x - 10$
   $f(1) = 2 \cdot 1 - 10 = 2 - 10 = -8$
   $f(2) = 2 \cdot 2 - 10 = 4 - 10 = -6$
   $f(3) = 2 \cdot 3 - 10 = 6 - 10 = -4$
   Então, calculamos a razão:
   $r = f(2) - f(1) = -6 - (-8) = -6 + 8 = 2$
   Portanto, a sequência é a PA $(-8; -6; -7; ...)$, de razão $r = 2$.

   b) $f(30) - f(29) = r = 2$
   O valor da diferença é 2 e corresponde à razão da progressão aritmética.
2. **a)** Temos $a_1 = 10$ e $r = 8 - 10 = -2$. Então:
   $a_n = a_1 + (n - 1)r$
   $a_n = 10 + (n - 1) \cdot (-2)$
   $a_n = 10 - 2n + 2$
   $a_n = -2n + 12$
   Logo, o termo geral é dado por $a_n = -2n + 12$.

   b) Usamos a fórmula do termo geral para calcular a_{120}:
   $a_{120} = 10 + (120 - 1) \cdot (-2)$
   $a_{120} = 10 + 119 \cdot (-2)$
   $a_{120} = 10 - 238$
   $a_{120} = -228$
   Logo, o 120º termo da sequência é $a_{120} = -228$.
3. **a)** Pela propriedade 1 de uma PA, temos:
   $$\frac{4x + (-x - 6)}{2} = x + 2$$
   $4x - x - 6 = 2x + 4$
   $3x - 2x = 4 + 6$
   $x = 10$

   b) Analogamente:
   $$\frac{x^2 - 1 + (x + 5)}{2} = 4x - 1$$
   $x^2 + x + 4 = 8x - 2$
   $x^2 - 7x + 6 = 0$
   $$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$
   $$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2}$$
   $$x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2}$$
   $$x = \frac{7 \pm 5}{2}$$
   $$x = \frac{12}{2} = 6 \text{ ou } x = \frac{2}{2} = 1$$
4. **a)** Calculamos alguns valores da função $f(x) = -2x - 1$:
   $f(1) = -2 \cdot 1 - 1 = -2 - 1 = -3$
   $f(2) = -2 \cdot 2 - 1 = -4 - 1 = -5$
   $f(3) = -2 \cdot 3 - 1 = -6 - 1 = -7$
   Logo, o conjunto imagem dessa função tem infinitos elementos: $(-3; -5; -7; ...)$.

b)



Os pontos dessa função estão alinhados. O domínio dessa função é formado pelos números naturais diferentes de zero.

5. a)

Mês	Juros	Montantes
1	R$ 30,00	R$ 1.530,00
2	R$ 30,00	R$ 1.560,00
3	R$ 30,00	R$ 1.590,00
4	R$ 30,00	R$ 1.620,00
5	R$ 30,00	R$ 1.650,00
6	R$ 30,00	R$ 1.680,00
7	R$ 30,00	R$ 1.710,00
8	R$ 30,00	R$ 1.740,00

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

b) $8 \cdot$ R$ 30,00 = R$ 240,00

Logo, Juliana deverá pagar R$ 240,00 de juros.

c) Pela tabela, Juliana deverá pagar R$ 1.740,00.

6. Resposta pessoal.

Incentive os estudantes a fazer essa atividade para que, ao final, comparem o resultado com o da atividade anterior, observando diferenças e semelhanças.

Exemplo de resposta: Everton contraiu uma dívida de R$ 3.500,00 com um colega do trabalho. Combinou que pagaria 3% ao mês de juros na modalidade de juros simples e que pagaria o empréstimo e os juros correspondentes em um só pagamento 5 meses após o empréstimo.

a) Elabore uma tabela contendo, mês a mês, os juros e os montantes correspondentes.

b) No final, qual valor ele deverá pagar somente de juros?

c) E qual valor total deverá pagar?

Resolução

a)

Mês	Juros	Montantes
1	R$ 105,00	R$ 3.605,00
2	R$ 105,00	R$ 3.710,00
3	R$ 105,00	R$ 3.815,00
4	R$ 105,00	R$ 3.920,00
5	R$ 105,00	R$ 4.025,00

b) $5 \cdot$ R$ 105,00 = R$ 525,00

Logo, Everton deverá pagar R$ 525,00 de juros.

c) Pela tabela, Everton deverá pagar R$ 4.025,00.

Página 63

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal. Resposta esperada: Ele observou que dois termos equidistantes dos extremos sempre tinham a mesma soma, 101. Assim, como são 100 números, o total é 101 multiplicado por 50 (número de pares que podem ser formados).
2. Usando o mesmo procedimento, os termos equidistantes dos extremos têm soma 2 + 104 = 106. São 52 números, então multiplicamos 106 por 26 e obtemos o resultado 2756.
3. A propriedade de que a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos termos extremos.

Página 64

Atividades

Ao trabalhar a soma dos termos de uma progressão aritmética, abordam-se também os assuntos anteriores, tais como propriedades e termo geral de uma PA. Desse modo, essas atividades exigirão um empenho maior dos estudantes, mesmo que sejam em pequena quantidade.

Sugerimos que todas as atividades desse tópico sejam corrigidas coletivamente, pois é um bom momento para verificar o entendimento do assunto progressão aritmética, que se encerra aqui.

1. a) O primeiro número natural ímpar é 1 e o 100º é 199. Então temos a PA (1; 3; 5; 7; ...; 199), com $a_1 = 1$, $a_{100} = 199$ e $r = 2$. Assim:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

$$S_{100} = \frac{(1 + 199)}{2} \cdot 100$$

$$S_{100} = 200 \cdot 50$$

$$S_{100} = 10\,000$$

b) A sequência do n primeiros naturais ímpares é a PA (1; 3; 5; 7; ...; n), com $a_1 = 1$, $a_n = n$ e $r = 2$. Então:

$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2$
$a_n = 1 + 2n - 2$
$a_n = 2n - 1$

Assim:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{(1 + 2n - 1) \cdot n}{2}$$

$$S_n = \frac{2n \cdot n}{2}$$

$S_n = n^2$

2. a) Para determinar o primeiro termo da PA basta substituir $n = 1$.

$S_n = 2n^2$
$S_1 = 2 \cdot 1^2$
$S_1 = 2$

Portanto, $a_1 = S_1 = 2$.

b) Para determinar o segundo termo da PA, vamos primeiro calcular a soma de 2 elementos, ou seja, para $n = 2$.

$S_n = 2n^2$
$S_2 = 2 \cdot 2^2$
$S_2 = 8$

Então:

$a_1 + a_2 = 8$
$2 + a_2 = 8$
$a_2 = 8 - 2$
$a_2 = 6$

Portanto, $a_2 = 6$.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

c) $r = a_2 - a_1 = 6 - 2 = 4$

Portanto, a razão é $r = 4$.

d) Temos $a_1 = 2$, $r = 4$ e $a_{20} = ?$

$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_{20} = 2 + (20 - 1) \cdot 4$
$a_{20} = 2 + 19 \cdot 4$
$a_{20} = 78$

Portanto, o 20º termo dessa sequência é $a_{20} = 78$.

3. a) Temos $a_1 = -10$, $r = -6 - (-10) = 4$ e $a_n = ?$

$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_n = -10 + (n - 1) \cdot 4$
$a_n = -10 + 4n - 4$
$a_n = 4n - 14$

Portanto, a fórmula do termo geral é dada por $a_n = 4n - 14$.

b) Usando a fórmula do termo geral, determinamos S_n.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{(-10 + 4n - 14) \cdot n}{2}$$

$$S_n = \frac{(4n - 24) \cdot n}{2}$$

$$S_n = \frac{4n^2 - 24n}{2}$$

$S_n = 2n^2 - 12n$

Portanto, a soma dos n termos é dada por $S_n = 2n^2 - 12n$.

4. Respostas pessoais. Exemplo de resposta:

a) PA (7; 5, 3; 1; -1; -3; -5, ...)

b) Dada essa sequência, temos $a_1 = 7$, $r = 5 - 7 = -2$ e $a_n = ?$

$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_n = 7 + (n - 1) \cdot (-2)$
$a_n = 7 - 2n + 2$
$a_n = 9 - 2n$

c) Usando a fórmula do termo geral, determinamos S_n.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{(7 + 9 - 2n) \cdot n}{2}$$

$$S_n = \frac{(16 - 2n) \cdot n}{2}$$

$$S_n = \frac{16n - 2n^2}{2}$$

$S_n = 8n - n^2$

5. a) Temos $a_1 = 2$, $S_{10} = 200$ e $a_{10} = ?$

$$S_n = \frac{(b_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

$$S_{10} = \frac{(2 + a_{10}) \cdot 10}{2}$$

$$200 = \frac{(2 + a_{10}) \cdot 10}{2}$$

$200 = (2 + a_{10}) \cdot 5$

$$2 + a_{10} = \frac{200}{5}$$

$a_{10} = 40 - 2$
$a_{10} = 38$

Logo, o 10º termo é $a_{10} = 38$.

b) Nessa PA, temos $a_3 = 10$ e $a_{98} = 90$. Os termos a_3 e a_{98} são equidistantes dos termos extremos, ou seja:

$a_1 + a_{100} = a_3 + a_{98} = 10 + 90 = 100$

Então, $a_1 + a_{100} = 100$.

Agora vamos determinar a soma dos 100 termos dessa PA.

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2}$$

$S_{100} = 100 \cdot 50$

$S_{100} = 5000$

Logo, a soma dos termos dessa PA é $S_{100} = 5000$.

c) Temos $a_1 = 3$, $a_n = 31$, $S_n = 136$ e $n = ?$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

$$136 = \frac{(3 + 31) \cdot n}{2}$$

$$136 = \frac{34n}{2}$$

$136 = 17n$

$$n = \frac{136}{17}$$

$n = 8$

Portanto, essa PA tem 8 termos.

Página 65

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.
3. Resposta pessoal.
4. Resposta pessoal.
5. Resposta pessoal.
6. Resposta pessoal.

Aqui se pode ampliar a discussão. Os estudantes do Ensino Médio logo farão parte (alguns até já fazem) do mercado de trabalho. Jovens empreendedores atuam de forma cada vez mais forte ao empreenderem. Quais cuidados devem ser tomados diante de uma ideia de empreendimento? Como tantas outras, as questões financeiras são fundamentais.

Página 66

Para pensar e discutir

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1. $L = V - C$
2. Lúcia tem um gasto de R$ 1.600,00 mais R$ 0,90 por trufa produzida. Produzindo 200 trufas, temos:

   $C = 1600 + 0{,}90 \cdot 200 = 1600 + 180 = 1780$

   Logo, o custo na produção das trufas é de R$ 1.780,00.

   Vendendo as 200 trufas produzidas por R$ 3,50 cada uma, Lúcia terá o valor de venda de:

   $V = 3{,}50 \cdot 200 = 700$

   Logo, ela vai obter um valor de venda de R$ 700,00.

   Assim:

   $L = V - C = 700 - 1780 = -1080$

   Portanto, Lucia terá prejuízo de R$ 1.080,00.
3. Fazemos os cálculos como na atividade 2:

   $C = 1600 + 0{,}90 \cdot 800 = 1600 + 720 = 2320$

   $V = 3{,}50 \cdot 800 = 2800$

   Assim:

   $L = V - C = 2800 - 2320 = 480$

   Portanto, Lucia terá lucro de R$ 480,00.
4. Essa questão será retomada no decorrer do capítulo.

Para explorar

1 e 2.

Quantidade	Valor de venda	Valor de custo	Lucro/Prejuízo
1	R$ 3,50	R$ 1.600,90	−R$ 1.597,40
2	R$ 7,00	R$ 1.601,80	−R$ 1.594,80
3	R$ 10,50	R$ 1.602,70	−R$ 1.592,20
4	R$ 14,00	R$ 1.603,60	−R$ 1.589,60
5	R$ 17,50	R$ 1.604,50	−R$ 1.587,00
6	R$ 21,00	R$ 1.605,40	−R$ 1.584,40
7	R$ 24,50	R$ 1.606,30	−R$ 1.581,80
8	R$ 28,00	R$ 1.607,20	−R$ 1.579,20
9	R$ 31,50	R$ 1.608,10	−R$ 1.576,60
10	R$ 35,00	R$ 1.609,00	−R$ 1.574,00
⋮	⋮	⋮	⋮
610	R$ 2.135,00	R$ 2.149,00	−R$ 14,00
611	R$ 2.138,50	R$ 2.149,90	−R$ 11,40
612	R$ 2.142,00	R$ 2.150,80	−R$ 8,80
613	R$ 2.145,50	R$ 2.151,70	−R$ 6,20
614	R$ 2.149,00	R$ 2.152,60	−R$ 3,60
615	R$ 2.152,50	R$ 2.153,50	−R$ 1,00
616	R$ 2.156,00	R$ 2.154,40	R$ 1,60
617	R$ 2.159,50	R$ 2.155,30	R$ 4,20

3. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que Lúcia terá lucro se produzir e vender pelo menos 616 trufas.

Recomendamos a utilização de planilha eletrônica; entretanto, os estudantes também podem elaborar tabelas no caderno e, com cálculos simples, chegar aos valores correspondentes. Para ampliar formas de argumentar diante de situações resolvidas, é importante que redijam um texto como se fosse um relatório da atividade.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 67

Para pensar e discutir

1. Para que a função seja constante, devemos ter $a = 0$.
2. Para que a função seja crescente, devemos ter $a > 0$ e, para ser decrescente, $a < 0$.
3. Quando o coeficiente do termo em x for diferente de zero.
4. Pode ter apenas um ponto em comum ou nenhum ponto em comum com o eixo das abscissas quando o domínio da função for o conjunto dos números reais.
5. O gráfico é o próprio eixo das abscissas. Portanto, haverá infinitos pontos em comum com o eixo das abscissas.

Página 68

Para pensar e discutir

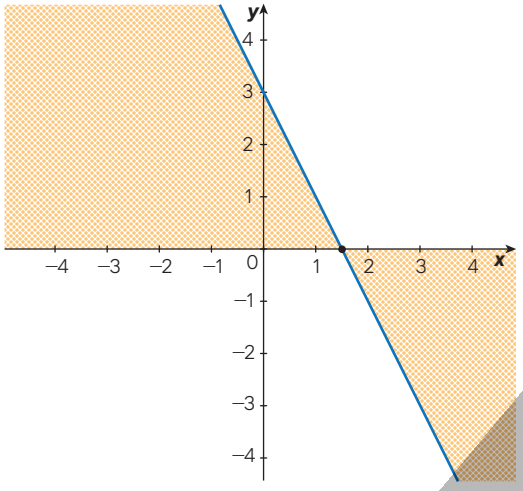
1. Para $x = -2$, para $x = 1$ e para $x = 3$.
2. Para $-2 < x < 1$ ou para $x > 3$.
3. Para $x < -2$ ou para $1 < x < 3$.

Página 69

Para explorar

1 e 2.

- $f_1(x) = -2x + 3$



a) $y = 0$ para $x = \frac{3}{2}$

b) $y > 0$ para $x < \frac{3}{2}$

c) $y < 0$ para $x > \frac{3}{2}$

- $f_2(x) = 4x$

Gráficos: Tarcísio Garbellini

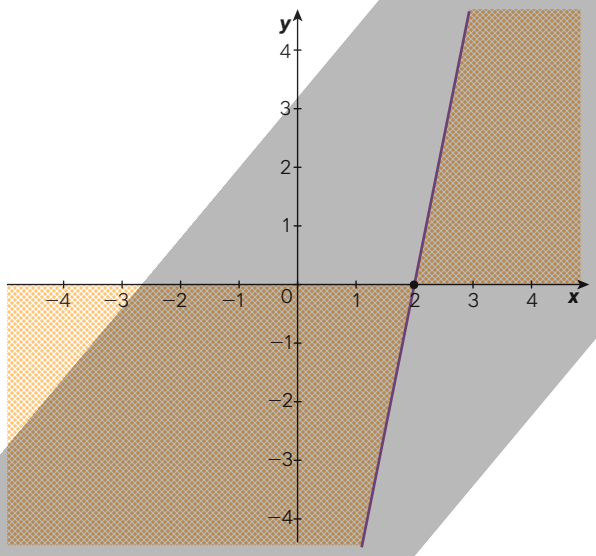
MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

a) $y = 0$ para $x = 0$

b) $y > 0$ para $x > 0$

c) $y < 0$ para $x < 0$

- $f_3(x) = 5x - 10$



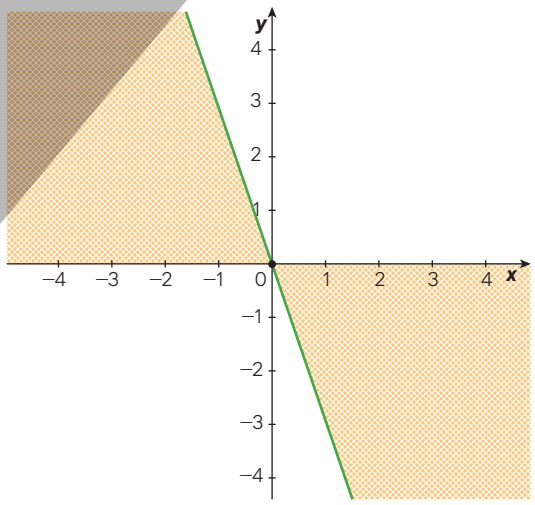
a) $y = 0$ para $x = 2$

b) $y > 0$ para $x > 2$

c) $y < 0$ para $x < 2$

- $f_4(x) = -3x$

Gráficos: Tarcísio Garbellini



a) $y = 0$ para $x = 0$

b) $y > 0$ para $x < 0$

c) $y < 0$ para $x > 0$

Atividades

O estudo do sinal de uma função afim representa uma preparação para a resolução de inequações do 1º grau. Assim, oriente os estudantes, quando da resolução das atividades a seguir, para que façam esboços dos gráficos (ou utilizem recursos digitais) para a análise do sinal de uma função. Essas atividades devem ser resolvidas de forma individual, algumas

em sala, outras como tarefa, conforme escolha do professor.

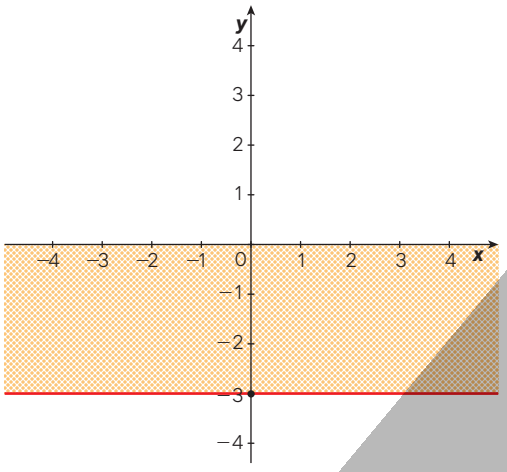
1. Se $f(x) = 2$ é uma função constante, logo, para qualquer valor de x, y vai ser sempre igual a 2.

a) Para nenhum valor de x.

b) Para todos os valores de x.

c) Para nenhum valor de x.

2.



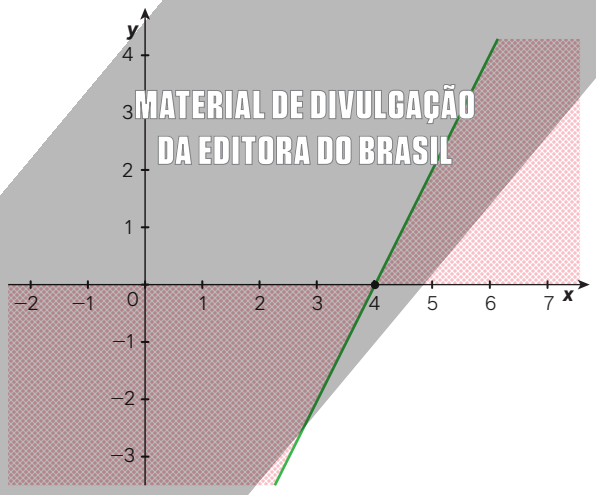
Se $f(x) = -3$ é uma função constante, logo, para qualquer valor de x, y vai ser sempre igual a -3.

a) Para nenhum valor de x.

b) Para nenhum valor de x.

c) Para todos os valores de x.

3.



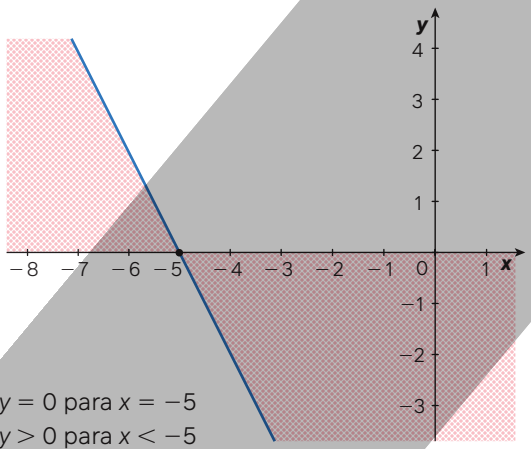
MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

a) $y = 0$ para $x = 4$

b) $y > 0$ para $x > 4$

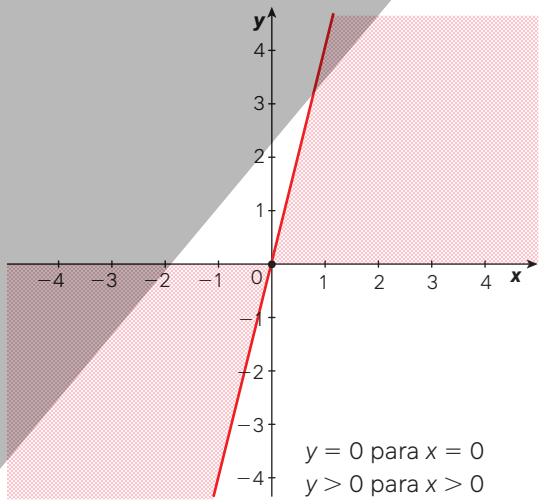
c) $y < 0$ para $x < 4$

4. a)



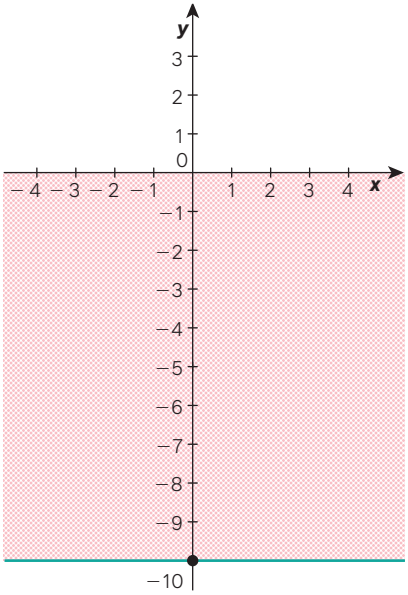
$y = 0$ para $x = -5$
$y > 0$ para $x < -5$
$y < 0$ para $x > -5$

b)



$y = 0$ para $x = 0$
$y > 0$ para $x > 0$
$y < 0$ para $x < 0$

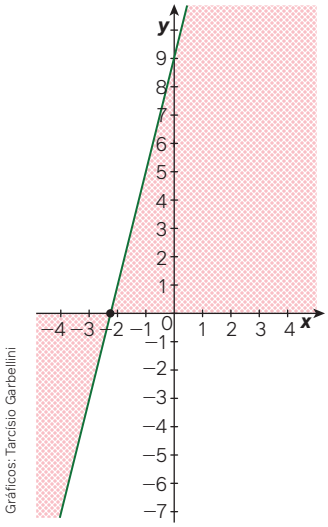
c)



Se $f(x) = -10$ é uma função constante, logo, para qualquer valor de x, y vai ser sempre igual a -10.
$y < 0$ para qualquer valor de x

Gráficos: Tarcísio Garbellini

d)



$y = 0$ para $x = -\frac{9}{4}$

$y > 0$ para $x > -\frac{9}{4}$

$y < 0$ para $x < -\frac{9}{4}$

5. Resposta pessoal.

Exemplo de resposta: $f(x) = 2x - 6$.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

$y = 0$ para $x = 3$

$y > 0$ para $x > 3$

$y < 0$ para $x < 3$

6. **a)** Exemplo de resposta: $x = -4$ e $x = -10$ (existem infinitas respostas).

b) Exemplo de resposta: $x = 4$ e $x = 5$ (existem infinitas respostas).

c) $x < 3$

d) $x > 3$

e) $x = 3$

Página 70

Para pensar e discutir

1. Vamos determinar a abscissa do ponto A:

$L(x) = 0 \Leftrightarrow 2{,}60x - 1600 = 0 \Leftrightarrow 2{,}60x = 1600 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{1600}{2{,}6} \Leftrightarrow x \cong 615{,}38$

Portanto, a abscissa é aproximadamente 615,38. Essa abscissa representa o zero da função L.

2. Os valores de x são positivos e estão relacionados a valores positivos para L.

3. Representa a quantidade de trufas produzidas e vendidas.

4. Para ter lucro é necessário produzir e vender pelo menos 616 trufas.

É importante observar que, nessa situação, x representa um número natural.

Página 71

Para pensar e discutir

1. Na passagem (I) foram subtraídos $2x$ membro a membro e, na passagem (II), foram adicionados 7 membro a membro.

2. Na passagem (III), todos os membros, um a um, foram divididos 3.

3. Não, pois não apresentam o mesmo conjunto solução.

4. Sim, pois apresentam o mesmo conjunto solução.

Página 72

Para pensar e discutir

1. Os dois gráficos crescem linearmente.

2. Não. O primeiro gráfico é uma linha continua (x é um número real), enquanto o segundo é formado por pontos isolados, pois x é um número natural.

Página 73

Para pensar e discutir

1. Quando temos "x maior ou igual a 20", consideramos que x pode ser 20 ou qualquer valor superior a 20. Para $x > 20$, consideramos apenas os números maiores que 20. Analogamente, quanto temos "x menor ou igual a 20", consideramos que x pode ser 20 ou qualquer valor inferior a 20. Se $x < 20$, temos apenas os números menores que 20.

2. Os dois membros de cada inequação foram multiplicados por 7.

3. Todos os termos em x foram agrupados no primeiro membro, enquanto os termos independentes de x, no segundo membro. Isso é feito para obtermos o valor ou os valores de x que satisfazem as inequações.

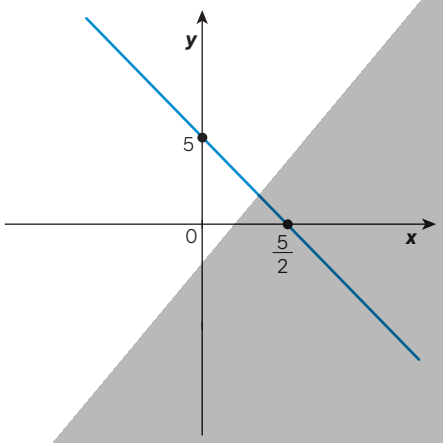
4. Considerando que x representa a quantidade de produtos, ele deve ser um número natural. Assim, $x = 18$ seria a resposta.

Atividades

É esperado que os estudantes não sintam dificuldade para resolver as atividades que envolvem inequações, pois o estudo do sinal de uma função afim teve o objetivo de melhor prepará-los para tal. Mesmo que algumas dessas inequações possam ser resolvidas pelo procedimento de isolar a incógnita, o recurso para a análise de sinal da função correspondente representa algo mais significativo neste estágio da escolarização.

1. Para resolver as inequações pelo estudo do sinal da função afim correspondente, precisamos traçar o gráfico de cada uma delas.

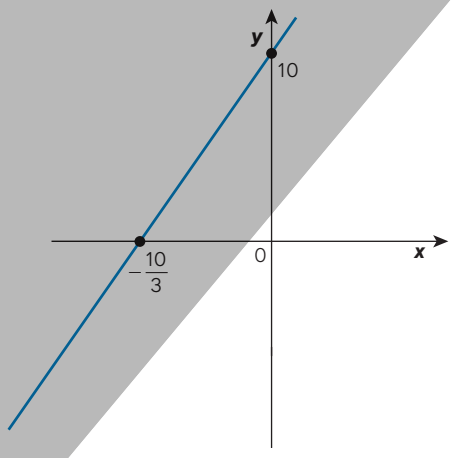
a) $f(x) = -2x + 5 \geqslant 0$



Gráficos: Tarcisio Garbellini

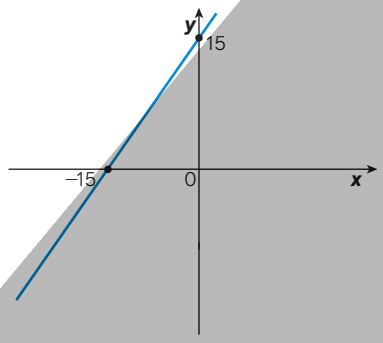
$y \geqslant 0$ para $x \leqslant \frac{5}{2}$

b) $f(x) = 3x + 10 > 0$



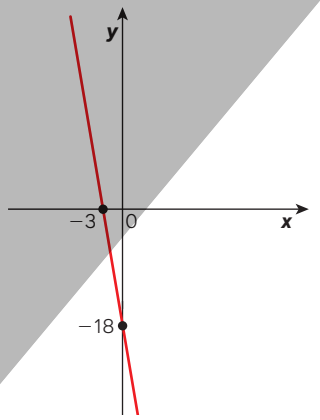
$y < 0$ para $x < -\frac{10}{3}$

c) $f(x) = x + 15$



$y \leqslant 0$ para $x \leqslant -15$

d) $f(x) = -6x - 18$



$y < 0$ para $x > -3$

2. **a)** Juliana dividiu todos os termos da inequação por 2.

b) Todos os x tais que $\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$, isto é, $\left]\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right[$.

c) Infinitas soluções reais.

d) Os números inteiros são: 1, 2 e 3.

3. **a)** $-3 \leqslant 4x \leqslant 8$

$$-\frac{3}{4} \leqslant \frac{4x}{4} \leqslant \frac{8}{4}$$

$$-\frac{3}{4} \leqslant x \leqslant 2$$

Solução: $\left[-\frac{3}{4}; 2\right]$.

b) A inequação tem 3 soluções inteiras: 0, 1 e 2.

4. Sabemos que o perímetro do losango é a soma das medidas de seus lados, ou seja, $P = 4L$.

Do enunciado, temos que $20 \leqslant P \leqslant 80$, isto é, $20 \leqslant \leqslant 4L \leqslant 80$.

$20 \leqslant 4L \leqslant 80$

$$\frac{20}{4} \leqslant \frac{4L}{4} \leqslant \frac{80}{4}$$

$5 \leqslant L \leqslant 20$

Portanto, os valores possíveis para L pertencem ao intervalo [5; 20].

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 74

Para pensar e discutir

1. Resolver uma equação com uma incógnita é obter o valor dessa incógnita que torna verdadeira a sentença representada pela equação. Resolver um sistema consiste em determinar todas as incógnitas que tornam verdadeiras todas as sentenças correspondentes às equações que compõem o sistema.
2. Resposta pessoal. Do Ensino Fundamental, é bem provável que o estudante se lembre da resolução de um sistema formado por duas equações e duas incógnitas utilizando o método da substituição ou o método da adição. Este é um bom momento para exemplificar.
3. Sim. Por exemplo, se $x = 2$, temos na 1ª equação que $z = 2 \cdot 2 = 4$ e, na 2ª equação, que $w = (6 \cdot 2) : 2 = 6$. Conhecendo w e z, obtemos na 3ª equação o valor de y, isto é, $y = (2 \cdot 4 + 6) : 2 = 7$.

Página 75

Para pensar e discutir

1. A equação I apresenta um termo com o produto de duas incógnitas; a equação II apresenta uma incógnita elevada ao cubo; a equação III apresenta uma incógnita elevada ao expoente $\frac{1}{2}$.
2. A primeira equação é linear e a segunda equação não é linear, pois a incógnita x está como radicando, isto é, elevada ao expoente $\frac{1}{2}$.

Página 76

Para pensar e discutir

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1. De acordo com o problema, Júlia vai retirar 180 reais, sendo 2 cédulas de 5 reais e 1 cédula de 50 reais. Sendo x o número de cédulas de 10 reais, calculamos:

   $2 \cdot 5 + 1 \cdot 50 + x \cdot 10 = 180$

   $10 + 50 + 10x = 180$

   $10x = 180 - 60$

   $10x = 120$

   $x = 12$

   Portanto, serão 12 cédulas de 10 reais.
2. Uma solução: 4 cédulas de 5 reais e 6 cédulas de 10 reais. Existem outras soluções.
3. Uma solução: 2 cédulas de 50 reais, 6 cédulas de 5 reais e 5 cédulas de 10 reais. Existem outras soluções.
4. Sugestão de resposta: Sendo x o número de cédulas de 50 reais, y o número de cédulas de 10 reais e z o número de cédulas de 5 reais, o modelo matemático que representa a situação é formado pela equação $50x + 10y + 5z = 180$.

Para pensar e discutir

1. Verificamos os valores (4; 4; 6) no sistema dado:

   $\begin{cases} x + y + z = 14 \\ 50x + 10y + 5z = 180 \end{cases}$

   $4 + 4 + 6 = 14$

   e

   $50 \cdot 4 + 10 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 200 + 40 + 30 = 270$

   Portanto, a terna ordenada (4; 4; 6) não é solução do sistema, pois fazendo $x = 4$, $y = 4$ e $z = 6$ a segunda equação não é verificada.
2. Verificamos os valores (2; 4; 8) no sistema dado:

   $\begin{cases} x + y + z = 14 \\ 50x + 10y + 5z = 180 \end{cases}$

   $2 + 4 + 8 = 14$

   e

   $50 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 5 \cdot 8 = 100 + 40 + 40 = 180$

   Portanto, a terna ordenada (2; 4; 8) é solução do sistema, pois fazendo $x = 2$, $y = 4$ e $z = 8$ as duas equações são verificadas.

Para explorar

1. a) $\begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 26 \end{cases}$

   Adicionamos as duas equações:

   $2x = 36$

   $x = \frac{36}{2}$

   $x = 18$

   Substituímos x por 18, por exemplo, na primeira equação:

   $x - y = 10$

   $18 - y = 10$

   $y = 18 - 10$

   $y = 8$

   Portanto, a solução é $x = 18$ e $y = 8$.

   b) $\begin{cases} x - y = 10 \\ x - y = 12 \end{cases}$

   Esse sistema não tem solução, pois não podemos ter, simultaneamente, $x - y = 10$ e $x - y = 12$. Portanto, não existe solução.

   c) $\begin{cases} x - y = 10 \\ 2x - 2y = 20 \end{cases}$

   Dividimos os dois membros da segunda equação por 2:

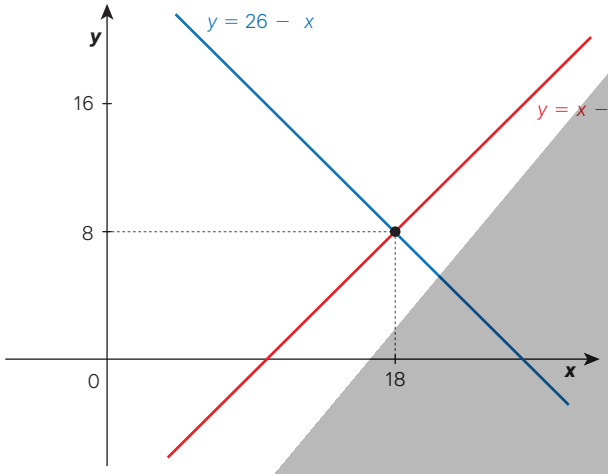
   $\begin{cases} x - y = 10 \\ x - y = 10 \end{cases}$

   Então:

   $y = x - 10$

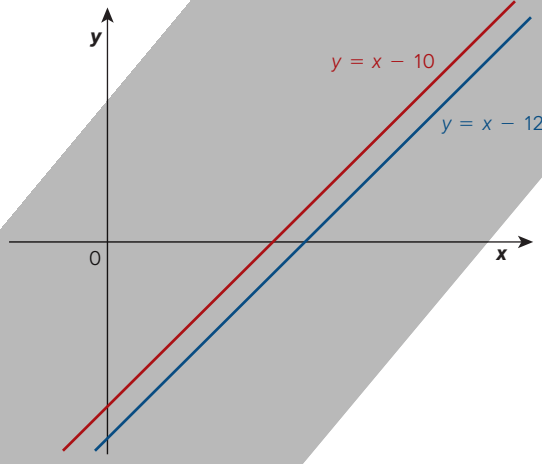
   Portanto, existem infinitas soluções.

2. a)

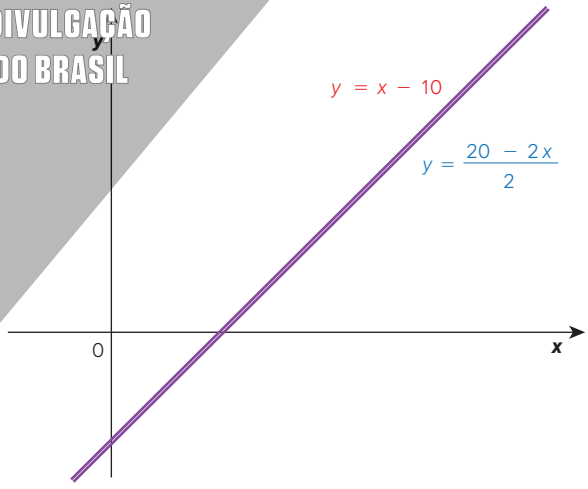


Gráficos: Tarcísio Garbellini

b)



c)



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

3. É importante observar quais conclusões os estudantes tiram quanto à discussão de um sistema formado por duas equações com duas incógnitas, isto é: sistema possível e determinado (apresenta uma solução); sistema possível e indeterminado (apresenta infinitas soluções); sistema impossível (não apresenta solução). Em relação a isso, a interpretação geométrica é fundamental: duas retas concorrentes (um ponto em comum); duas retas coincidentes (infinitos pontos em comum); duas retas paralelas (nenhum ponto em comum).

Páginas 77-78

Atividades

Inicialmente é fundamental que as atividades 1 e 2, após o desenvolvimento do correspondente assunto, sejam deixadas para que cada estudante individualmente faça sua interpretação. São três sistemas lineares, em que o primeiro tem solução única (verifique como o estudante o resolve), o segundo não admite solução (verifique como ele conclui isso) e o terceiro apresenta infinitas soluções (aqui também é interessante verificar como chega a essa conclusão). Após essas compreensões, as demais atividades podem ser conduzidas.

Outra atividade fundamental é a 6, pois os próprios estudantes em duplas irão elaborar três sistemas: um que apresente solução única, outro que admita infinitas soluções e outro que não admita solução. Além disso, e mais importante, deverão fazer as interpretações no plano cartesiano.

Atividades como as 7 e 8 devem ser feitas em sala de aula para que possam ser seguidas de discussões sobre sistemas em que há mais incógnitas do que equações.

1. a) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$

Podemos adicionar as duas equações:

$4x = 16$

$x = \frac{16}{4}$

$x = 4$

Substituímos x por 4, por exemplo, na primeira equação:

$2x - y = 6$

$2 \cdot 4 - y = 6$

$y = 8 - 6$

$y = 2$

Logo, a solução do sistema é (4; 2).

b) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

Logo, o sistema não admite solução, pois, por exemplo, ao subtrair essas duas equações membro a membro obtemos:

$0 = -4$ (impossível).

c) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 4x - 2y = 12 \end{cases}$

Dividimos os dois membros da segunda equação por 2:

$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

Então:

$y = 2x - 6$

Logo, o sistema admite infinitas soluções.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Embora os estudantes já tenham trabalhado a resolução de sistemas lineares formados por duas equações e duas incógnitas no final do Ensino Fundamental, solicite que externem oralmente como resolveram tais sistemas para enfatizar os procedimentos de resolução.

2. a) Não, o sistema do item **b** não tem solução.

b) Sim, o sistema do item **c** tem infinitas soluções.

3. a) $x = -1$

b) $y = -3$

c) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x - 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Podemos multiplicar a segunda equação por (-1) e, depois, adicionar as equações obtidas:

$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + y = -2 \end{cases}$

$x = -1$

Substituímos x por -1, por exemplo, na segunda equação:

$-1 - y = 2$

$y = -1 - 2$

$y = -3$

Logo, a solução do sistema é $(-1; -3)$.

4. I) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

Podemos isolar x na primeira equação e, depois, substituir na segunda equação:

$x - 3y = 0$

$x = 3y$

Então:

$2x + y = 0$

$2 \cdot 3y + y = 0$

$7y = 0$

$y = 0$

Substituímos y por 0, por exemplo, na primeira equação:

$x = 3y$

$x = 3 \cdot 0$

$x = 0$

Logo, a solução do sistema é $S = \{(0; 0)\}$.

II) $\begin{cases} 4x - 6y = 0 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases}$

Podemos multiplicar a primeira equação por $-\frac{1}{2}$ e, depois, adicionar as equações obtidas:

$\begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases}$

Então:

$3y = 2x$

$y = \frac{2x}{3}$

Logo, o sistema admite infinitas soluções.

a) $S = \{(0; 0)\}$

b) Sim, pois, para $x = 0$, temos $y = \frac{2x}{3} = \frac{2 \cdot 0}{3} = 0$.

c) Infinitas soluções.

Comente com os estudantes que, quando o sistema é linear e homogêneo, ele admite sempre a solução dita trivial, isto é, aquela em que todas as incógnitas são nulas.

5. a) Temos o sistema: $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \\ 5z = 0 \end{cases}$

Da terceira equação, obtemos:

$5z = 0$

$z = 0$

Substituímos z por 0 na segunda equação:

$3y + 2 \cdot 0 = 0$

$3y = 0$

$y = 0$

Substituímos z por 0 e y por 0 na primeira equação:

$2x - y + z = 0$

$2x - 0 + 0 = 0$

$2x = 0$

$x = 0$

Logo, a solução do sistema é (0; 0; 0) e, portanto, ele admite a solução trivial.

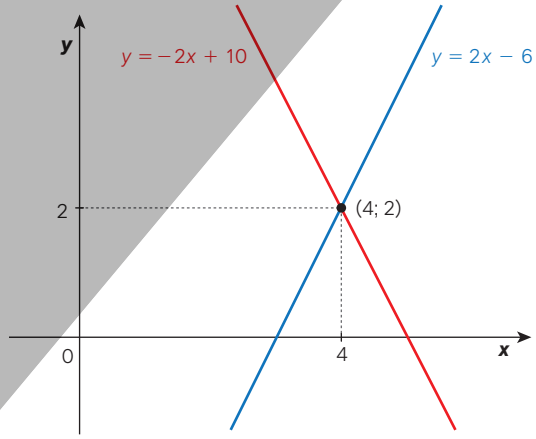
b) Apenas 1 solução (a trivial).

6. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:

1ª parte

a) $\begin{cases} x - \frac{y}{2} = 3 \\ x + \frac{y}{2} = 5 \end{cases}$

b) A solução do sistema é (4; 2).

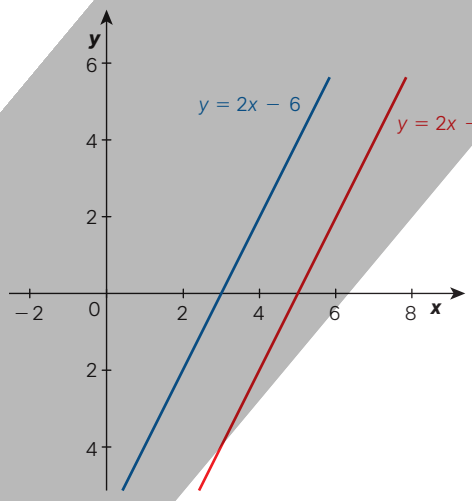


MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

2ª parte

a) $\begin{cases} x - \frac{y}{2} = 3 \\ x - \frac{y}{2} = 5 \end{cases}$

b) O sistema não admite solução. Observe que as retas são paralelas, ou seja, não têm ponto em comum.

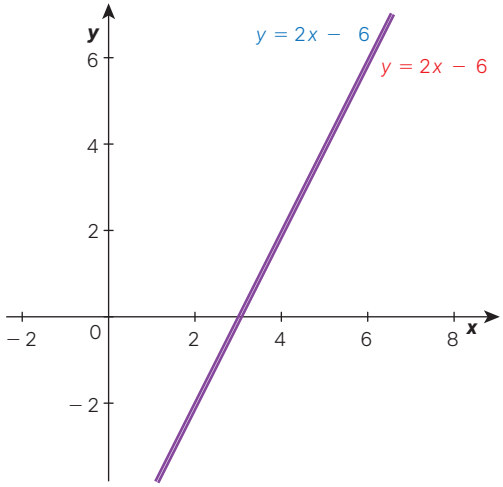


Gráficos: Tarcisio Garbellini

3ª parte

a) $\begin{cases} x - \frac{y}{2} = 3 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

b) O sistema admite infinitas soluções. As retas são coincidentes, isto é, têm infinitos pontos em comum.



7. a) $50x + 20y + 10z = 100$

b) A cédula de 50 reais, pois, pelo contexto, só pode ter recebido 1 cédula de 50 reais.

c) São apenas duas possibilidades de acordo com o enunciado.

Primeira possibilidade: 1 cédula de 50 reais; 1 cédula de 20 reais; 3 cédulas de 10 reais.

Segunda possibilidade: 1 cédula de 50 reais; 2 cédulas de 20 reais; 1 cédula de 10 reais.

8. a) $\begin{cases} 50x + 20y + 10z = 100 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$

Note que sabemos o valor de x. Assim, poderíamos também escrever esse sistema por meio de duas equações com duas incógnitas, isto é:

$\begin{cases} 50 \cdot 1 + 20y + 10z = 100 \\ 1 + y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 20y + 10z = 50 \\ y + z = 3 \end{cases}$

b) Considerando o sistema inicial com duas equações e três incógnitas, a solução do sistema é (1; 2; 1); considerando o sistema com duas equações e duas incógnitas poderia ser (2; 1), uma vez que já é possível identificar a quantidade de cédulas de 50 reais.

A possibilidade de 1 cédula de 20 reais e 3 cédulas de 10 reais não é válida, pois seriam $1 + 1 + 3 = 5$ cédulas ao todo.

9. Resposta pessoal. Este tipo de atividade valoriza os cuidados com a interpretação dos dados do enunciado. Se o enunciado é claro, o colega irá resolver o sistema compreendendo o que se pede. Desse modo, ao final, recomenda-se que os dois colegas troquem informações a respeito do enunciado e da resolução, fazendo ajustes se necessário.

10. Sistema I: $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$

Podemos multiplicar a primeira equação por (-2) e, depois, adicionar as equações obtidas:

$\begin{cases} -2x - 2y = -10 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$

$y = 3$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Substituímos y por 3, por exemplo, na primeira equação:

$x + y = 5$

$x + 3 = 5$

$x = 5 - 3$

$x = 2$

Logo, a solução do sistema I é (2; 3).

Sistema II: $\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

Sabemos que $y = 3$; então substituímos esse valor na primeira equação:

$x + y = 5$

$x + 3 = 5$

$x = 5 - 3$

$x = 2$

Logo, a solução do sistema II é (2; 3).

Portanto, os sistemas são equivalentes, pois ambos têm o mesmo conjunto solução $S = \{(2; 3)\}$.

11. Resposta pessoal, que dependerá dos sistemas elaborados pelos estudantes. Exemplo de resposta:

(I) $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = -4 \end{cases}$

A solução do sistema I é (0; 4).

(II) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

A solução do sistema II é (0; 4).

12. a) Seja x a quantidade de sucos e y a quantidade de sanduíches. Assim:

$\begin{cases} 2x + 2y = 16{,}80 \\ 3x + 4y = 30{,}40 \end{cases}$

b) Resolvendo o sistema, obtemos o valor do suco e do sanduiche.

Podemos dividir os membros da primeira equação por 2 e, depois, isolar x.

$2x + 2y = 16{,}80$

$x + y = 8{,}40$

$x = 8{,}40 - y$

Agora substituímos x por $8{,}40 - y$ na segunda equação:

$3x + 4y = 30{,}40$

$3(8{,}40 - y) + 4y = 30{,}40$

$25{,}20 - 3y + 4y = 30{,}40$

$y = 30{,}40 - 25{,}20$

$y = 5{,}20$

Por fim, calculamos o valor de x:

$x = 8{,}40 - y$

$x = 8{,}40 - 5{,}2$

$x = 3{,}20$

Portanto, o suco custa R$ 3,20 e o sanduíche custa R$ 5,20.

13. a) Temos o sistema: $\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 2y + z = 6 \\ 2z = 8 \end{cases}$

Resolvemos a terceira equação:

$2z = 8$

$z = \frac{8}{4}$

$z = 4$

Substituímos z por 4 na segunda equação:

$2y + z = 6$

$2y + 4 = 6$

$y = \frac{2}{2}$

$y = 1$

Substituímos z por 4 e y por 1 na primeira equação:

$2x + y - 2z = 10$

$2x + 1 - 2 \cdot 4 = 10$

$2x = 10 + 7$

$x = \frac{17}{2}$

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \left\{\frac{17}{2}; 1; 4\right\}$.

b) Resposta pessoal. Espera-se que o estudante escreva que inicialmente determinou o valor de z na 3ª equação, substituiu esse valor na 2ª equação para obter y e, então, substituiu esses dois valores encontrados na 1ª equação para determinar o valor de x.

14. Para calcular o valor de k, substituímos a solução $(1; 3; -2)$ na equação $3x + ky - 2z = -14$:

$3 \cdot 1 + k \cdot 3 - 2 \cdot -2) = -14$

$3 + 3k + 4 = -14$

$3k = -14 - 7$

$k = -\frac{21}{3}$

$k = -7$

Portanto, $k = -7$.

Página 79

Para pensar e discutir

1. Sim.

Essa questão serve para que o estudante compreenda, a seguir, que as incógnitas em um sistema escalonado devem ser apresentadas em uma mesma ordem nas equações para iniciar o método do escalonamento.

2. No sistema I, todas as incógnitas têm seus coeficientes não nulos. Já no sistema II há 3 coeficientes nulos.

3. Resposta esperada: sistema II. A solução pode ser obtida determinando z na terceira equação ($z = 3$) e obtendo o valor de y na segunda equação ($y = -1$). Conhecendo-se os valores de z e de y, substituímos esses valores na primeira equação para determinar o valor de x ($x = 2$). O conjunto solução é $S = \{(2; -1; 3)\}$.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 80

Para explorar

1. Para $z = 2$ no sistema $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ y - z = 5 \end{cases}$, temos, na segunda equação:

$y - z = 5$

$y - 2 = 5$

$y = 5 + 2$

$y = 7$

Substituímos z por 2 e y por 7 na primeira equação:

$x - 3y + z = 0$

$x - 3 \cdot 7 + 2 = 0$

$x - 21 + 2 = 0$

$x = 19$

Logo, a solução do sistema para $z = 2$ é $(19; 7; 2)$.

2. Para $z = 0$, temos, na segunda equação:

$y - z = 5$

$y - 0 = 5$

$y = 5$

Substituímos z por 0 e y por 5 na primeira equação:

$x - 3y + z = 0$

$x - 3 \cdot 5 + 0 = 0$

$x - 15 = 0$

$x = 15$

Logo, a solução do sistema para $z = 0$ é $(15; 5; 0)$.

3. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:

Para $z = 1$, temos, na segunda equação:

$y - z = 5$

$y - 1 = 5$

$y = 5 + 1$

$y = 6$

Então:

$x - 3y + z = 0$

$x - 3 \cdot 6 + 1 = 0$

$x - 18 + 1 = 0$

$x = 17$

Logo, a solução do sistema para $z = 1$ é $(17; 6; 1)$.

Para $z = 3$, temos, na segunda equação:

$y - z = 5$

$y - 3 = 5$

$y = 5 + 3$

$y = 8$

Então:

$x - 3y + z = 0$

$x - 3 \cdot 8 + 3 = 0$

$x - 24 + 3 = 0$

$x = 21$

Logo, solução do sistema para $z = 3$ é $(21; 8; 3)$.

Para $z = 4$, temos, na segunda equação:

$y - z = 5$

$y - 4 = 5$

$y = 5 + 4$

$y = 9$

Então:

$x - 3y + z = 0$

$x - 3 \cdot 9 + 4 = 0$

$x - 27 + 4 = 0$

$x = 23$

Logo, a solução do sistema para $z = 4$ é $(23; 9; 4)$.

Para $z = 5$, temos, na segunda equação:

$y - z = 5$

$y - 5 = 5$

$y = 5 + 5$

$y = 10$

Então:

$x - 3y + z = 0$

$x - 3 \cdot 10 + 5 = 0$

$x - 30 + 5 = 0$

$x = 25$

Logo, a solução do sistema para $z = 5$ é (25; 10; 5).

Para $z = 6$, temos, na segunda equação:

$y - z = 5$

$y - 6 = 5$

$y = 5 + 6$

$y = 11$

Então:

$x - 3y + z = 0$

$x - 3 \cdot 11 + 6 = 0$

$x - 33 + 6 = 0$

$x = 27$

Logo, a solução do sistema para $z = 6$ é (27; 11; 6).

4. Para $z = \alpha$, temos, na segunda equação:

$y - z = 5$

$y - \alpha = 5$

$y = 5 + \alpha$

Então:

$x - 3y + z = 0$

$x - 3 \cdot (5 + \alpha) + \alpha = 0$

$x - 15 - 3\alpha + \alpha = 0$

$x = 15 + 2\alpha$

Portanto, para $x = \alpha$, temos $y = 5 + \alpha$ e $x = 15 + 2\alpha$.

5. O conjunto solução do sistema, em função de α, é $S = \{(15 + 2\alpha; 5 + \alpha; \alpha)\}$.

Solicitamos que os estudantes escrevam um pequeno texto sobre o sistema apresentado. A ideia é que, de alguma maneira, eles identifiquem que esse sistema tem infinitas soluções e que para obter soluções devemos atribuir valores a uma das variáveis, como os induzimos na resolução dos itens 1, 2, 3 e 4. Independentemente do texto elaborado por eles, estimule-os a compartilhá-los ao final com a discussão coletiva do que cada grupo concluiu.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 81

Para pensar e discutir

Sistema I

$$\begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ x - y + 2z = 2 \\ -x + 3y - 4z = -4 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ 0 + 3y - 5z = -7 \\ 0 + 2y - 2z = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ 3y - 5z = -7 \\ y - z = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ 3y - 5z = -7 \\ -2z = -4 \end{cases}$$

Na segunda equação, obtemos:

$3y - 5z = -7$

$3y - 5 \cdot 2 = -7$

$3y = -7 + 10$

$y = \frac{3}{3}$

$y = 1$

Na primeira equação, obtemos:

$2x + y - z = -3$

$2x + 1 - 2 = -3$

$2x = -3 + 1$

$$x = -\frac{2}{2}$$
$$x = -1$$

Log, o conjunto solução é $S = \{(-1; 1; 2)\}$.

Sistema II

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 1 \\ 2x + 3y - 2z = -5 \end{cases} \sim \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 0 - 7y + 8z = 5 \\ 0 - 7y + 8z = 11 \end{cases} \sim \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ -7y + 8z = 5 \\ 0 = 6 \end{cases}$$

O sistema é incompatível, pois obtivemos $0 = 6$.

Sistema III

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 7 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ 0 + 3y - 3z = 3 \\ 3x + 0 - 0 = 9 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ y - z = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Da segunda equação, obtemos:

$$y - z = 1$$
$$y = 1 + z$$

Logo, o conjunto solução é $S = \{(3; 1 + z; z)\}$.

1. O sistema III, ao ser escalonado, fica com duas equações e duas incógnitas. Esse sistema tem infinitas soluções. Considerando que $z = m$ é um número real, suas soluções são da forma $(3; 1 + m; m)$
2. O sistema II. A conclusão é que esse sistema não admite solução.
3. Existem três possibilidades: admitir solução (sistema possível e determinado); admitir infinitas soluções (sistema possível e indeterminado); não admitir solução (sistema impossível).
   O sistema I apresenta apenas uma solução: $(-1; 1; 2)$.

Página 82

Para retomar

a) Na primeira e na segunda equação:

$$2x = z$$
$$z = \frac{2w}{3}$$

Na segunda equação:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

$$6x = 2w$$
$$x = \frac{w}{3}$$

Na terceira equação:

$$2y = 2z + w$$
$$2y = 2 \cdot 2x + w$$
$$2y = 4 \cdot \frac{w}{3} + w$$
$$y = \frac{7w}{6}$$

Logo, a solução do sistema é $\left(\frac{w}{3}; \frac{7w}{6}; \frac{2w}{3}\right)$.

b) Resposta pessoal. Na Química, a solução considerada envolve números inteiros positivos. Assim, fazendo $w = 6$, temos que a solução é $(2; 7; 4)$. Partindo do fato de que as soluções são inteiras, o sistema pode ser resolvido comparando-se as equações e pensando nos menores números inteiros positivos que a verificam.

Página 83

Atividades

A compreensão do escalonamento para a resolução de sistemas lineares é o grande objetivo destas atividades. É comum e também esperado que alguns estudantes se confundam no processo de escalonamento. Para evitar essas

confusões é necessário que individualmente procedam com a resolução da atividade 1, em que são propostos quatro sistemas lineares com duas equações a duas incógnitas. Somente, então, trabalham-se outros sistemas com mais incógnitas e mais equações, limitando-os a três equações a três incógnitas.

Sugerimos que as atividades 3, 4 e 5 sejam conduzidas com a intervenção do professor de Química, pelo menos no que tange a reforçar os equilíbrios que envolvem balanceamentos.

1. a) $\begin{cases} x - 2y = 10 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x - 6y = 30 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x - 6y = 30 \\ -7y = 25 \end{cases}$

Resolvemos a segunda equação:

$$-7y = 25$$
$$y = -\frac{25}{7}$$

Resolvemos a primeira equação:

$$3x - 6y = 30$$
$$3x - 6 \cdot \left(-\frac{25}{7}\right) = 30$$
$$3x + \frac{150}{7} = 30$$
$$3x = \frac{60}{7}$$
$$x = \frac{20}{7}$$

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \left\{\left(\frac{20}{7}; -\frac{25}{7}\right)\right\}$.

b) $\begin{cases} x + y = 25 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 50 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 50 \\ 5y = 32 \end{cases}$

Resolvemos a segunda equação:

$$5y = 32$$
$$y = \frac{32}{5}$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Resolvemos a primeira equação:

$$2x + 2y = 50$$
$$2x + 2 \cdot \frac{32}{5} = 50$$
$$2x = \frac{186}{5}$$
$$x = \frac{93}{5}$$

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \left\{\left(\frac{93}{5}; \frac{32}{5}\right)\right\}$.

c) $\begin{cases} x - y = 10 \\ 3x - 3y = 30 \end{cases}$

$\sim \begin{cases} x - y = 10 \\ x - y = 10 \end{cases}$

Então:

$y = x - 10$

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(x; x - 10)\}$.

d) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 7 \\ x + y = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 7 \\ 0 = 3 \end{cases}$

Logo, o sistema é incompatível, pois obtivemos $0 = 3$.

É fundamental que os estudantes observem como transformar e resolver um sistema com duas equações e duas incógnitas na forma escalonada, para, então, ampliar com a resolução de sistemas com mais de duas equações. Outro ponto importante a ser destacado diz respeito às soluções dos sistemas dos itens **a**, **b** e **c**: não são número inteiros. É muito comum os estudantes acharem que, quando um sistema tem solução, ela é inteira.

2. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:

calça + camisa = R$ 120,00

calça + bermuda = R$ 190,00

bermuda + camisa = R$ 110,00

Seja x o valor da calça, y o valor da camisa e z o valor da bermuda. Então:

$$\begin{cases} x + y = 160 \\ x + z = 190 \\ z + y = 110 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 160 \\ y - z = -30 \\ y + z = 110 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 160 \\ y - z = -30 \\ 2y = 80 \end{cases}$$

Resolvemos a terceira equação:

$2y = 80$

$y = \frac{80}{2}$

$y = 40$

Resolvemos a segunda equação:

$y - z = -30$

$40 - z = -30$

$z = 40 + 30$

$z = 70$

Resolvemos a primeira equação:

$x + y = 160$

$x + 40 = 160$

$x = 160 - 40$

$x = 120$

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(120; 70; 400)\}$ e, portanto, a calça custa R$ 120,00, a camisa custa R$ 40,00 e a bermuda custa R$ 70,00.

Essa situação pode ser utilizada como parte da avaliação sobre resolução de sistema.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

3. a) Nessa situação, podemos escrever $xC_{3H8} + yO_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow zH_{2O} + wCO_2$. Então:

$$\begin{cases} 3x = w \\ 8x = 2z \\ 2y = z + 2w \end{cases}$$

b) Escrevemos cada incógnita em função de w.

$3x = w$

$x = \frac{w}{3}$

$8x = 2z$

$8 \cdot \frac{w}{3} = 2z$

$z = \frac{4w}{3}$

$2y = z + 2w$

$2y = \frac{4w}{3} + 2w$

$y = \frac{5w}{3}$

Logo, a solução do sistema é $\left(\frac{w}{3}; \frac{5w}{3}; \frac{4w}{3}\right)$.

Aqui novamente será interessante observar que, na Química, as soluções serão formadas por números inteiros positivos. Assim, fazendo $w = 3$, teremos (1; 5; 4) como solução.

4. Resposta pessoal. Aproveite para incentivar os estudantes a observarem na disciplina de Química essas situações de equilíbrio. Talvez essa atividade possa ser conduzida em duplas para facilitar a pesquisa de exemplos de Química.

5. $\begin{cases} 6x = y + 2z \\ 12x = 6z \\ 6x = 2y + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x = y + 2z \\ z = 2x \\ 6x = 2y + z \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = 2x \\ 6x = 2y + z \end{cases}$$

O sistema admite infinitas soluções. Logo, o conjunto solução pode ser representado por $S = \{(x; 2x; 2x)\}$.

Os menores valores inteiros positivos ocorrem quando $x = 1$.

Portanto, nesse caso, o conjunto solução é $S = \{(1; 2; 2)\}$.

6. a) Considerando $z = 2k$, da segunda equação do sistema $\begin{cases} x - 3y + 4z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$, obtemos:

$2y - z = 0$

$2y - 2k = 0$

$y = k$

E, da primeira equação, obtemos:

$x - 3y + 4z = 0$

$x - 3k + 4 \cdot 2k = 0$

$x - 3k + 8k = 0$

$x = -5k$

Logo, para $z = 2k$, temos $S = \{(-5k; k; 2k)\}$.

b) Para $k = 2$, temos $S = \{(-10; 2; 4)\}$.

c) Com $y = 0$, temos $k = 0$; e com $k = 0$, temos $S = \{(0; 0; 0)\}$. Logo, esse sistema admite a solução trivial.

7. Sendo b e t, respectivamente, o preço de um bombom e o preço de uma trufa, podemos escrever o seguinte sistema de equações lineares e, em seguida, escaloná-lo:

$$\begin{cases} 25b + 15t = 107{,}5 \\ 20b + 45t = 185 \end{cases} \sim \begin{cases} 75b + 45t = 322{,}5 \\ 20b + 45t = 185 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 75b + 45t = 322{,}5 \\ 55b = 137{,}5 \end{cases}$$

Da segunda equação, obtemos:

$55b = 137{,}5$

$b = \dfrac{137{,}5}{55}$

$b = 2{,}5$

Então, substituindo b por 2,5 na primeira equação, obtemos:

$75b + 45t = 322{,}5$

$75 \cdot 2{,}5 + 45t = 322{,}5$

$45t = 322{,}5 - 187{,}5$

$45t = 135$

$t = \dfrac{135}{45}$

$t = 3$

Logo, um bombom custa R$ 2,50 e uma trufa custa R$ 3,00. Assim:

$4 \cdot$ R$ 2,50 + $3 \cdot$ R$ 3,00 = R$ 10,00 + R$ 9,00 = R$ 19,00

Portanto, o estudante pagou R$ 19,00 em 4 bombons e 3 trufas.

Alternativa **a**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Páginas 84-85

Atividades finais

Essas atividades ao final da unidade possibilitam que os estudantes retomem e reforcem os conceitos trabalhados. Incentive-os a resolvê-las de forma individual como verificação de aprendizagem e, principalmente, para o desenvolvimento de autonomia. Algumas dessas atividades podem ser conduzidas para resolução em duplas em sala de aula, o que propicia detectar ainda algumas incertezas quanto à compreensão dos assuntos principais. Se essa for a escolha de encaminhamento, destine algum tempo na programação.

1. a) A razão deverá ser negativa.

b) Temos $a_1 = 3$, $r = 7 - 3 = 4$ e $a_n = ?$

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 4$

$a_n = 3 + 4n - 4$

$a_n = 4n - 1$

Portanto, o termo geral é $a_n = 4n - 1$.

c) Representa a razão da progressão aritmética.

d) A relação é $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$.

e) A sequência $(f(1); f(2); f(3); ...)$ é uma progressão aritmética pois $f(x) = 4x - 7$ é uma função afim. Dessa lei, obtemos:

$f(1) = 4 \cdot 1 - 7 = 4 - 7 = -3$

$f(2) = 4 \cdot 2 - 7 = 8 - 7 = 1$

$f(3) = 4 \cdot 3 - 7 = 12 - 7 = 5$

Então, a sequência é $(f(1); f(2); f(3); ...) = (-3; 1; 5; ...)$, na qual $a_1 = -3$ e $a_2 = 1$. Assim: $r = 1 - (-3) = 4$

Portanto, a sequência $(f(1); f(2); f(3); ...)$ é uma progressão aritmética de razão 4.

f) $-2x > -10$

$2x < 10$

$x < \dfrac{10}{2}$

$x < 5$

Portanto, se $-2x > -10$, então $x < 5$ é uma afirmação correta.

g) Dada a função $f(x) = 2x - 6$, temos:

$f(x) < 0$

$2x - 6 < 0$

$2x < 6$

$x < 3$

Portanto, a função $f(x) = 2x - 6$ assume imagens negativas quando $x < 3$.

h) Sistema possível e determinado: uma solução; sistema impossível: nenhuma solução; sistema possível e indeterminado: infinitas soluções.

i) Como o sistema tem duas equações e três incógnitas, ele admite infinitas soluções.

2. Do enunciado, interpretamos que a fita dará 100 voltas no cilindro, que tem raio externo inicial de 3 cm. Como a fita tem 0,01 cm de espessura, os raios externos (em cm) das voltas formam a sequência (3,01; 3,02; 3,03; 3,04; ...; 4).

Então, os comprimentos de cada volta da fita formam a sequência $(2\pi \cdot 3{,}01; 2\pi \cdot 3{,}02; 2\pi \cdot 3{,}03; 2\pi \cdot 3{,}04; ...; 2\pi \cdot 4)$, em que $a_1 = 2\pi \cdot 3{,}01$ e $r = 2\pi \cdot 3{,}02 - 2\pi \cdot 3{,}01 = 0{,}01$.

Assim, a soma desses comprimentos é:

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$

$S_n = \dfrac{(2\pi \cdot 3{,}01 + 2\pi \cdot 4)}{2} \cdot 100$

$S_n = \dfrac{2\pi \cdot 7{,}01}{2} \cdot 100$

$S_n = 701\pi$

$S_n \cong 701 \cdot 3{,}14$

$S_n \cong 2201{,}14$

Portanto, o comprimento total da fita é de aproximadamente 2201,14 cm ou 22 metros.

Alternativa **d**.

3. Na sequência dos números ímpares consecutivos menores que 100 temos $a_1 = 1$, $a_{50} = 99$ e $S_{50} = ?$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

$$S_{50} = \frac{(1 + 99) \cdot 50}{2}$$

$$S_{50} = \frac{100 \cdot 50}{2}$$

$$S_{50} = 50 \cdot 50$$

$$S_{50} = 50^2$$

Portanto, a soma de todos os números ímpares menores que 100 é 50^2.

Alternativa **c**.

4. Do enunciado, temos que a quantidade de tratores produzidos forma a sequência (720, 790, 860, 930, 1000, 1070, 1140, 1210, ...), em que $a_1 = 720$ e $r = 790 - 720 = 70$. Para 2025, teremos o termo a_{16}. Então:

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$a_{16} = 720 + (16 - 1) \cdot 70$

$a_{16} = 720 + 1050$

$a_{16} = 1770$

Calculamos, então a produção total de tratores no período de 2010 a 2025:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

$$S_{16} = \frac{(720 + 1770) \cdot 16}{2}$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

$$S_{16} = \frac{2490 \cdot 16}{2}$$

$S_{16} = 19920$

Logo, serão produzidos 19920 tratores até o fim de 2025 e, portanto, a meta prevista de 20000 tratores não deverá ser atingida, pois serão produzidos 80 tratores a menos.

Alternativa **e**.

5. As parcelas formam uma PA em que $a_1 = 1000$; $r = -20$ e $a_{24} = ?$

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$a_{24} = 1000 + (24 - 1) \cdot (-20)$

$a_{24} = 1000 + 23 \cdot (-20)$

$a_{24} = 1000 - 460$

$a_{24} = 540$

Logo, o valor da última parcela será de R$ 540,00.

Usando a fórmula da soma de termos de uma PA, obtemos o valor total do financiamento:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

$$S_{24} = \frac{(1000 + 540) \cdot 24}{2}$$

$S_{24} = 1540 \cdot 12$

$S_{24} = 18480$

Portanto, ao final do financiamento esse carro terá custado ao comprador R$ 18.480,00.

Alternativa **a**.

6. Do enunciado, temos que a quantidade de árvores em cada fileira do pomar forma a sequência (1; 3; 5; ...), na qual $a_1 = 1$ e $r = 3 - 1 = 2$. Vamos determinar quantas árvores haverá na 40ª fileira, ou seja, a_{40}:

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$a_{40} = 1 + (40 - 1) \cdot 2$

$a_{40} = 1 + 39 \cdot 2$

$a_{40} = 79$

Usando a fórmula da soma de termos da PA, obtemos quantas árvores haverá no pomar:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

$$S_{40} = \frac{(1 + 79) \cdot 40}{2}$$

$S_{40} = 80 \cdot 20$

$S_{40} = 1600$

Portanto, haverá 1600 árvores no pomar de Clara.

Alternativa **b**.

7. Temos que, a partir do 2º grupo da soma, cada grupo tem um elemento a mais que o grupo anterior, ou seja, os grupos têm as quantidades de elementos $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $g_3 = 3$, ..., $g_{11} = 11$. Assim, o 11º grupo tem 11 elementos.

Vamos determinar a soma dos elementos até o 11º grupo:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

$$S_{11} = \frac{(1 + 11) \cdot 11}{2}$$

$$S_{11} = \frac{12 \cdot 11}{2}$$

$S_{11} = 66$

Então, o último elemento do 11º grupo é o 66º número ímpar e o primeiro elemento do 11º grupo é o 56º número ímpar. Agora vamos descobrir quais são esses números considerando que a PA dos números ímpares consecutivos tem $a_1 = 1$ e $r = 3 - 1 = 2$. Assim:

$a_{56} = 1 + (56 - 1) \cdot 2$

$a_{56} = 1 + 55 \cdot 2$

$a_{56} = 111$

$a_{66} = 1 + (66 - 1) \cdot 2$

$a_{66} = 1 + 65 \cdot 2$

$a_{66} = 131$

Por fim, usando novamente a fórmula da soma dos termos de uma PA, calculamos a soma dos elementos do 11º grupo:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

$$S_{11} = \frac{(a_{56} + a_{66}) \cdot 11}{2}$$

$$S_{11} = \frac{(111 + 131) \cdot 11}{2}$$

$$S_{11} = \frac{242 \cdot 11}{2}$$

$S_{11} = 1331$

Portanto, a soma dos números que compõem o 11º grupo dessa sequência é igual a 1331.

Alternativa **b**.

8. Temos a sequência (80, 100, 120, ..., 1380) formada pelas distâncias dos postes à praça, sendo n o número de postes colocados, $a_1 = 80$, $r = 100 - 80 = 20$ e $a_n = 1380$. Vamos determinar o número de postes colocados:

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$1380 = 80 + (n - 1) \cdot 20$

$1380 = 80 + 20n - 20$

$20n = 1380 - 60$

$20n = 1320$

$$n = \frac{1320}{20}$$

$n = 66$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Logo, serão colocados 66 postes.

$66 \cdot$ R$ 8.000,00 = R$ 528.000,00

Portanto, a prefeitura poderá gastar no máximo R$ 528.000,00 com a colocação desses postes.

Alternativa **c**.

9. As bases dos retângulos medem 2 cm, 6 cm, 10 cm, 14 cm, ... e as alturas de todos os retângulos medem 1 cm. Assim temos uma sequência formada por 100 retângulos, e suas áreas formam a progressão aritmética (2 cm²; 6 cm²; 10 cm²; ...), com $a_1 = 2$ e $r = 6 \text{ cm}^2 - 2 \text{ cm}^2 = 4 \text{ cm}^2$. Vamos determinar a área do último retângulo, ou seja, calcular a_{100}:

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$a_{100} = 2 + (100 - 1) \cdot 4$

$a_{100} = 2 + 99 \cdot 4$

$a_{100} = 398$

Logo, o último retângulo tem 398 cm² de área.

Usando a fórmula da soma dos termos de uma PA, obtemos a área total da figura:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

$$S_{100} = \frac{(2 + 398) \cdot 100}{2}$$

$S_{100} = 400 \cdot 50$

$S_{100} = 20\,000$

Logo, a área total da figura formada é 20 000 cm², ou seja, 2 m².

Alternativa **d**.

10. Se f representa a frequência cardíaca ideal, em bpm, então temos, conforme os dados apresentados:

$0{,}6 \cdot (220 - 40) \leqslant f \leqslant 0{,}75 \cdot (220 - 40)$

Assim:

$0{,}6 \cdot 180 \leqslant f \leqslant 0{,}75 \cdot 180$

$108 \leqslant f \leqslant 135$

Portanto, a frequência cardíaca ideal, em bpm, para um homem de 40 anos queimar gordura e emagrecer durante um treino varia de 108 a 135.

Alternativa **c**.

11. Determinamos a solução da inequação dada:

$-2 \leqslant 2x + 5 \leqslant 10$

$-2 - 5 \leqslant 2x + 5 - 5 \leqslant 10 - 5$

$$-\frac{7}{2} \leqslant \frac{2x}{2} \leqslant \frac{5}{2}$$

$$-\frac{7}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}$$

As soluções inteiras desse intervalo são -3, -2, -1, 0, 1 e 2.

Portanto, são 6 valores inteiros que satisfazem a inequação.

Alternativa **b**.

12. Considerando que x, y e z representem, respectivamente, o número de embalagens de 50 g, de 100 g e de 200 g a serem compradas, temos que a soma S deve ser mínima, isto é:

$S = 2x + 3{,}6y + 6{,}4z + 10$ (I)

Além disso, temos:

$2x + 4y + 6z = 12$ (II)

Como a solução será formada por valores inteiros para as incógnitas, uma maneira de resolver é atribuindo valores naturais às ternas $(x; y; z)$:

(6; 0; 0), (0; 3; 0), (0; 0; 2), (4; 1; 0), (3; 0; 1), (2; 2; 0) e (1; 1; 1)

A terna que verifica as duas condições é (0; 3; 0).

Então, temos:

$S = 2 \cdot 0 + 3{,}6 \cdot 3 + 6{,}4 \cdot 0 + 10$

$S = 20{,}80$

Portanto, a menor quantia a ser gasta por essa menina e que possibilite levar o bichinho de pelúcia nessa promoção é R$ 20,80.

Alternativa **c**.

UNIDADE 3 Raciocínio lógico e tratamento da informação

Objetivos

- Desenvolver noções básicas referentes à linguagem computacional.
- Utilizar algoritmos e fluxogramas a fim de descrever procedimentos para a execução de uma atividade.
- Localizar e analisar informações em textos, tabelas e gráficos estatísticos.
- Detectar erros ou inadequações em informações presentes em gráficos estatísticos.
- Interpretar taxas e índices socioeconômicos de forma crítica.
- Construir e interpretar gráficos estatísticos.

Justificativa

A interpretação e a análise crítica de gráficos, tabelas e índices socioeconômicos possibilitam desenvolver nos estudantes a argumentação com base em fatos, dados e informações confiáveis. Além disso, a análise e a construção de algoritmos e fluxogramas auxiliam no desenvolvimento do pensamento computacional.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Competências e habilidades da BNCC trabalhadas nesta unidade

Competências gerais

Competência geral 1

Essa competência é mobilizada nesta unidade pela própria natureza dos assuntos tratados. A busca de informações está presente em toda a unidade. A interpretação de taxas e índices de forma crítica, bem como a localização e a análise de informações em textos, tabelas e gráficos, de maneira segura, contribuem para entender e explicar a realidade. Nesse sentido, por exemplo, são analisados e discutidos gráficos que contêm erros, como na seção **Para pensar e discutir** da página 106. Os contextos explorados ao abordar os vários tipos de gráfico levam os estudantes a valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social e cultural para entender e explicar a realidade. São tratados assuntos como "Regularização de terras indígenas", na página 99, "Média anual da taxa de desocupação de pessoas com 14 anos ou mais de idade", na página 100, entre vários outros que favorecem os estudantes a continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Competências gerais 4 e 9

A competência geral 4 está presente no trabalho com algoritmos e fluxogramas, por meio dos quais os estudantes desenvolvem uma linguagem que possibilita representar uma sequência de passos para resolver determinado tipo de problema. Eles desenvolvem essa competência também na realização da seção **Para explorar** da página 112, em que, organizados em grupos, pesquisam como é calculado o IDH de um país e se informam sobre o IDH dos estados brasileiros. Eles representam todos os dados em uma tabela ou um gráfico e, em seguida, redigem um texto comparando o IDH do Brasil com o IDH dos estados. Dessa maneira, usam a linguagem verbal para se comunicar, trocar ideias e partilhar informações, bem como a linguagem matemática e a linguagem escrita para redigir

um texto que compare os dados obtidos. Por ser feita em grupos, essa atividade contempla também a **competência geral 9**, propiciando que exercitem a empatia, o diálogo e a cooperação.

Competências gerais 5 e 7

A **competência geral 5** é mobilizada quando os estudantes têm a oportunidade de utilizar as tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, o que ocorre em diversas atividades desta unidade. Este é o caso, por exemplo, da seção **Para explorar** da página 99, em que os estudantes, em grupos, utilizam uma planilha eletrônica para elaborar um gráfico com os dados obtidos de um texto sobre o prognóstico da safra de grãos para 2020 com base nos dados de 2019. Em seguida, comparam os produtos e redigem o texto. Dessa forma, desenvolvem também a **competência geral 7**, que se refere à argumentação com base em fatos, dados e informações confiáveis para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns.

Competência geral 6

Essa competência é mobilizada nas atividades 2, 3, 5 e 7 propostas nas páginas 102 a 105, que abordam o mundo do trabalho. Quando analisam gráficos, comparam dados, fazem inferências e redigem textos sobre o tema, os alunos se apropriam de conhecimentos que os possibilitam entender cada vez mais esse universo.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competências específicas 1, 3 e 4

Habilidades

EM13MAT102

Essa habilidade é mobilizada na maior parte da unidade, cujos objetivos incluem a localização e análise de informações em textos, tabelas e gráficos estatísticos, a detecção de erros ou inadequações em informações presentes em gráficos estatísticos, a interpretação de taxas e índices socioeconômicos, de maneira crítica, e a construção e interpretação de gráficos estatísticos.

EM13MAT104

O último tópico da unidade é dedicado à interpretação de taxas e índices de natureza socioeconômica, mobilizando, assim, essa habilidade. São trabalhados os seguintes índices: IDH, IPCA, INPC, PIB e o índice de Gini. Por meio das atividades, os estudantes investigam processos de cálculo, fazem análises críticas em relação à realidade e elaboram argumentos.

EM13MAT315 e EM13MAT405

Essas habilidades são exploradas no início da unidade, com os objetivos de desenvolver noções básicas referentes à linguagem computacional e utilizar algoritmos e fluxogramas para descrever procedimentos para a execução de uma atividade.

Resoluções e comentários

Página 87

Abertura

A ideia dessas perguntas é chamar a atenção dos estudantes para a desigualdade social do país. Ao longo desta unidade, teremos a oportunidade de aprofundar o conhecimento a respeito dos índices brasileiros em comparação com o de outras nações.

1. Resposta pessoal.

O valor do salário mínimo que estava em vigor em 2020, desde o dia 1º de fevereiro, era de R$ 1.045,00. Você pode perguntar aos estudantes qual imaginam ser o valor médio da cesta básica e, então, resolver a questão efetuando uma divisão. Por exemplo, supondo que o valor da cesta básica seja de R$ 69,60, teremos:

$1045 : 69{,}60 \cong 15$

Logo, seriam aproximadamente 15 cestas básicas.

Porém é importante que esses valores sejam devidamente atualizados de acordo com a realidade do ano de resolução da questão.

2. Resposta pessoal.

Nessa questão, aborde com os estudantes a desigualdade social no país. Você pode ampliar a conversa pedindo que pesquisem a desigualdade em outras nações e comparem os dados com nosso país.

3. Resposta pessoal.

Espera-se que o estudante responda a essa questão citando a ampliação de programas sociais, por exemplo.

Página 89

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal.

Espera-se que o estudante responda que o pensamento computacional nada mais é do que dividir um macroproblema em partes para que se chegue à solução, ou seja, baseando-se em premissas (que são fatos aceitos como verdades) e utilizando regras bem definidas do sistema lógico que estamos utilizando, encontramos novas verdades (conclusões).

2. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:

Na realização da lição de casa:

1º: pegar o material de estudo;

2º: escolher um lugar calmo para se concentrar;

3º: rever a matéria;

4º: resolver os exercícios.

Podemos [illegible] computacional: decomposição, reconhecimento de padrões e capacidade para projetar algoritmo. A interpretação de cada um deles é pessoal e, com base nela, os estudantes devem indicar alguma atividade do cotidiano.

Essa discussão com base nas duas questões possibilita analisar coletivamente a importância do pensamento computacional. Comente com os estudantes que, recentemente, no Brasil houve efetivamente uma incorporação desse tema no Ensino Básico.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 91

#Ficaadica

1, 2 e 3. Respostas pessoais.

Converse com os estudantes sobre o filme e explique-lhes que o Ensino Médio brasileiro enfatiza a importância da diversidade quanto aos encaminhamentos de atividades propostas para os alunos. Habilidades voltadas à interpretação e à argumentação possibilitam desenvolver senso crítico e ampliam repertórios, tão necessários ao cidadão que pretendemos ter em nosso país. Valorize esse momento da seção **#Ficaadica** conduzindo boas discussões com base no que cada grupo produzir. Reserve uma aula para que eles apresentem suas produções e, depois, promova uma discussão sobre as perguntas elaboradas pelos grupos. Essa é uma oportunidade para uma discussão relacionada a preconceito, que pode até incluir a homossexualidade.

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal.

Exemplo de resposta:

1º: Estou com fome.

2º: Vou verificar se tenho comida.

3º: Se "sim", é só comer.

4º: Se "não", vou comprar comida e mato a fome.

2. A figura que indica a tomada de decisão é o losango.

Página 92

Para pensar e discutir

1. Se o cliente tem ou não cadastro.
2. Aparece a mensagem: "Compra não aprovada".
3. Resposta pessoal.

Exemplo de resposta: Poderia aparecer, por exemplo, prazo máximo de entrega, em dias.

Páginas 93-94

Atividades

Embora sejam poucas, estas atividades têm uma importância muito grande quanto a incentivar os estudantes no início do trabalho com fluxogramas e algoritmos. Como estamos diante de jovens que utilizam muitas ferramentas computacionais, incentive-os a ir além dessas atividades, pesquisando mais a fundo a utilização tanto de algoritmos como de fluxogramas que representam a linguagem dos computadores.

1. **a)** Resposta esperada: Entre com determinado valor, acrescente 10 a esse valor e exiba o novo valor.

b) Resposta pessoal.

Exemplo de resposta: O cálculo da mesada semanal, por exemplo:

1º: o valor inicial é R$ 50,00;

2º: acrescente R$ 10,00 aos R$ 50,00 (50 + 10);

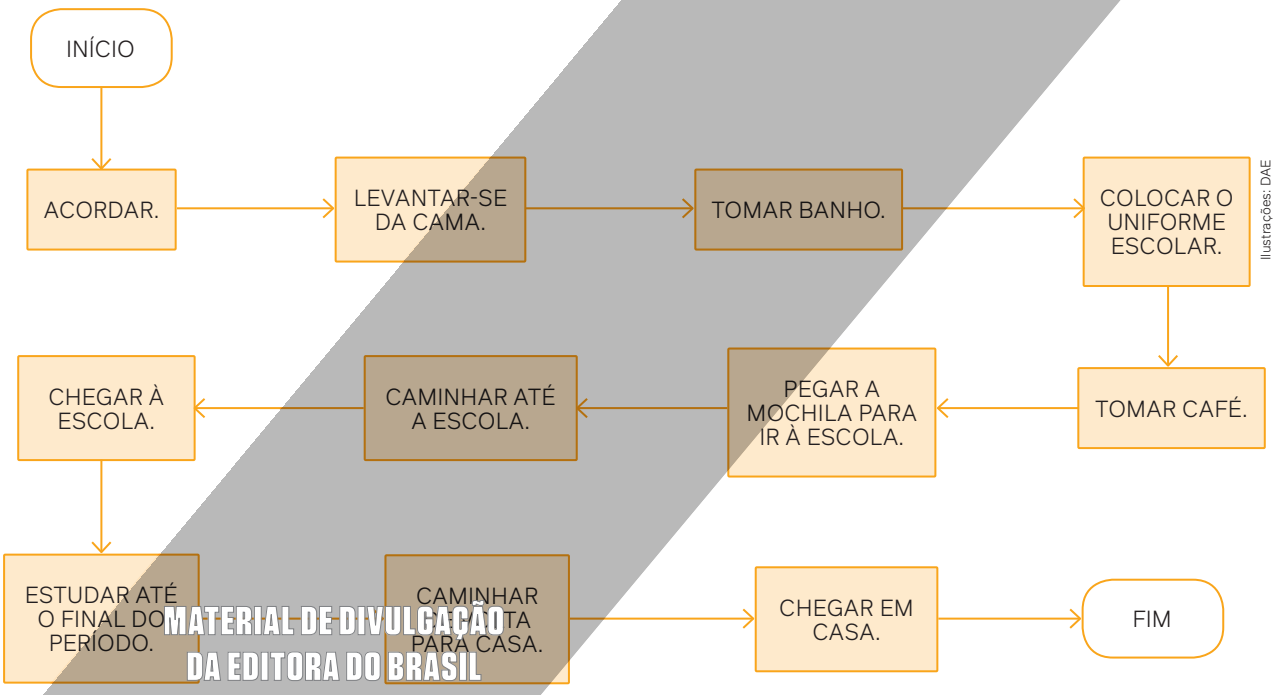
3º: obtenha o novo valor, que é R$ 60,00.

2. **a)** Resposta pessoal.

Exemplo de resposta:
1º: Acordar.
2º: Levantar-se da cama.
3º: Tomar banho.
3º: Colocar o uniforme escolar.
4º: Tomar café.
5º: Pegar a mochila para ir à escola.
6º: Caminhar até a escola.
7º: Chegar à escola.
8º: Estudar até o fim do período.
9º: Caminhar de volta para casa.
10º: Chegar em casa.

b) Resposta pessoal.

Exemplo de resposta:

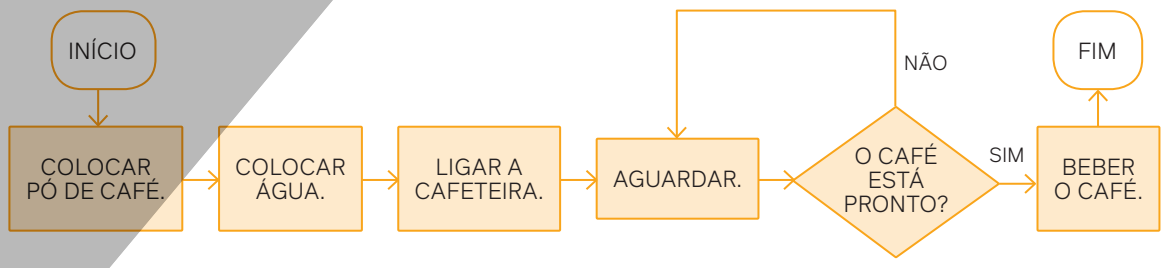


Ilustrações: DAE

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

Esta é uma atividade que possibilita ao estudante iniciar a observação de que o algoritmo, mesmo que descrito com palavras, torna-se algumas vezes mais complicado do que a utilização do fluxograma. É importante que cada um faça o algoritmo e, depois, o fluxograma. Além disso, para ampliar a discussão, solicite que alguns deles leiam seus algoritmos e representem os fluxogramas na lousa.

3.



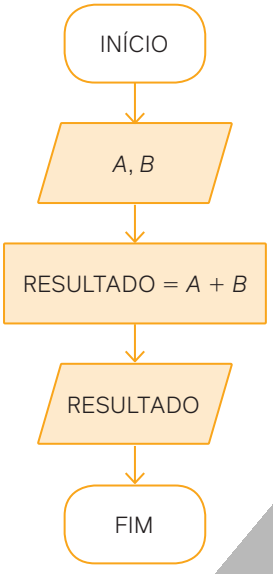
4. Resposta pessoal.

Exemplo de resposta: O fluxograma pode representar, por exemplo, o acesso eletrônico a determinada conta bancária. O usuário tem que entrar com o *login*. Caso ele acerte, o acesso é permitido; caso erre, ele terá ainda mais duas tentativas. Na quarta tentativa, encerra-se o processo.

5. Resposta pessoal.

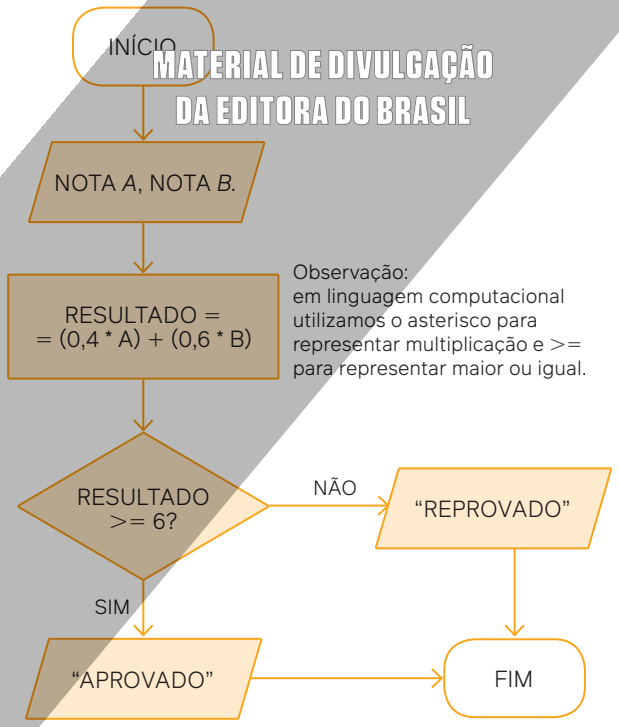
É importante que os alunos acessem, ao final deste livro, a **Caixa de ferramentas** para conhecer um pouco mais a fundo os símbolos que são empregados num fluxograma. Comente com eles que nessa atividade é dada apenas uma ideia inicial para esse trabalho. Além disso, caso tenham dúvidas podem ser encaminhados para pesquisar um pouco mais esse tema antes de fazer um fluxograma.

Exemplo de resposta:



6. Resposta pessoal.

Exemplo de resposta:

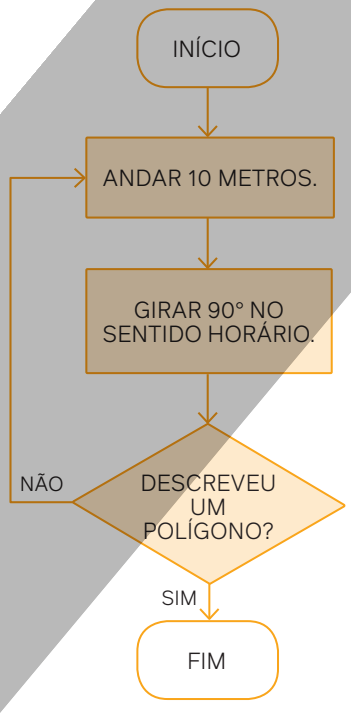


MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

7. Esse fluxograma indica os passos para que uma pessoa descreva, andando, um percurso com forma de hexágono regular.

8. Resposta pessoal.

Exemplo de resposta:



Ilustrações: DAE

9. Resposta pessoal.

Exemplo de resposta:

1. Encha com água o recipiente *A*, que tem capacidade para 9 litros.
2. Despeje água do recipiente *A* até encher o recipiente *B*, com 4 litros.
3. Despeje a quantidade de água que sobrou no recipiente *A* dentro do recipiente *C*, que tem capacidade de 9 litros.
4. Esvazie o recipiente *B*, que está com 4 litros de água, despejando-a no jardim para regar as plantas.
5. Encha novamente o recipiente *A*, que está vazio, com 9 litros de água.
6. Usando o recipiente *A* cheio, com 9 litros de água, encha novamente o recipiente *B*, com 4 litros.
7. Esvazie novamente os 4 litros do recipiente *B* regando outras plantas.
8. Usando a sobra do recipiente *A*, que corresponde a 5 litros de água, encha novamente o recipiente *B* com 4 litros.
9. Coloque a nova sobra do recipiente *A*, que corresponde a 5 litros, no recipiente *C*, que já tem 5 litros.

O recipiente *C* ficará com 6 litros de água.

Página 95

Aproveitando a oportunidade

1. a) Resposta pessoal.

Exemplos de resposta: Phyton, Java, Javascript, C≠, PHP.

b)

Linguagens de programação	Vantagens	Desvantagens
Phyton	Maior nível de abstração	Flexibilidade com integração para *web*
Java	Utilizada por diversas plataformas	Requer maior conhecimento computacional
Javascript	Assincronicidade	O código pode se tornar muito complicado sem a utilização de *plugins*
C#	Multiplataforma	Requer maior conhecimento computacional
PHP	Facilita a conexão entre dispositivos diferentes	É uma linguagem mais difícil de ser utilizada

Essa é uma área pela qual normalmente os estudantes se interessam bastante. Assim, esta atividade visa valorizar a curiosidade em relação aos tipos de linguagem de programação.

2. a) Resposta pessoal.

Exemplo de entrevista e respostas:

1º: Nome do profissional entrevistado.

2º: Sua formação: Engenharia da Computação.

3º: Quando iniciou o trabalho com programação? 2017

4º: Quais foram as dificuldades enfrentadas no início dos estudos? Necessidade de muito embasamento teórico e prático.

5º: Qual é sua remuneração? Prefiro não dizer.

6º: Na sua opinião, existe valorização nessa carreira? Com certeza.

7º: Quais são os erros mais comuns em uma programação? Erro de sintaxe e erro semântico.

8º: Qual [illegible] profissional excepcionalmente capacitado.

9º: Dê exe[illegible] uma programação de computador resolve. O horário em que o ônibus passa no ponto, por exemplo.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

A entrevista com um profissional da área de Programação é sempre motivadora e também apresenta a realidade. Lembre-se de que os estudantes estão, nesta fase da escolarização, prestes a ingressar no mercado de trabalho. A escolha de uma profissão muitas vezes ocorre ao conhecerem melhor diversas profissões – esse é o sentido da proposta desta atividade.

b) Resposta pessoal.

Exemplo de resposta:

Meu nome é Euclides (nome fictício), sou Engenheiro da Computação e comecei a trabalhar na área em 2017. A área da Computação é atualmente uma das que mais cresce no mercado de trabalho e, por causa disso, apresenta valorização iminente. O que mais dificulta a entrada na área da Programação é o leque numeroso de opções para iniciar, e normalmente as pessoas têm muitas dúvidas sobre qual segmento seguir. Os erros mais comuns na área são principalmente dois: erros de sintaxe, que são bem comuns e fáceis de serem resolvidos, pois é um simples erro de ortografia da linguagem; e erros de semântica, que são mais difíceis de resolver, pois dizem respeito aos conceitos envolvidos na lógica escrita.

De modo geral, a Computação auxilia a sociedade em diversos problemas, e o desenvolvimento dela facilita a vida da população. Um exemplo simples é o aplicativo que utilizamos para consultar os horários do transporte público e a localização de um ônibus em tempo real. Isso facilita muito o dia a dia, pois podemos acompanhar o deslocamento dos meios de transporte no telefone celular.

Página 96

Para pensar e discutir

1. Resposta a ser pesquisada pelos estudantes.
2. Resposta a ser pesquisada pelos estudantes.
3. Não. Pelo gráfico, em 16/4 havia aproximadamente 27 000 casos e, em 26/4, aproximadamente 55 000 casos.
4. Também mais que duplicou.
   Comente com os estudantes que, quando vamos analisar um gráfico estatístico apresentado nas mídias, temos de fazer perguntas como essas feitas na atividade, que nos direcionam para interpretar as informações.

Página 97

Para pensar e discutir

1. Calculamos as diferenças dos valores recebidos por hora:
   Sem instrução ou Fundamental incompleto:
   $8{,}7 - 6{,}7 = 2$
   Fundamental completo ou Médio incompleto:
   $9{,}3 - 7{,}7 = 1{,}6$
   Médio completo ou Superior incompleto:
   $12{,}2 - 9{,}6 = 2{,}6$
   Superior completo: $32{,}8 - 22{,}7 = 10{,}1$
   Logo, a afirmativa é falsa, pois a maior diferença ocorre exatamente onde há o maior grau de instrução.
2. A afirmativa é falsa, pois a menor diferença ocorre onde há os menores graus de instrução.
3. Resposta pessoal.
   Incentive o estudante a fazer uma leitura crítica das informações do gráfico. O texto é importante porque explora as habilidades interpretativa e argumentativa com base nas informações de um gráfico.
   Aproveite a oportunidade para conduzir uma discussão sobre questões raciais.

Página 99

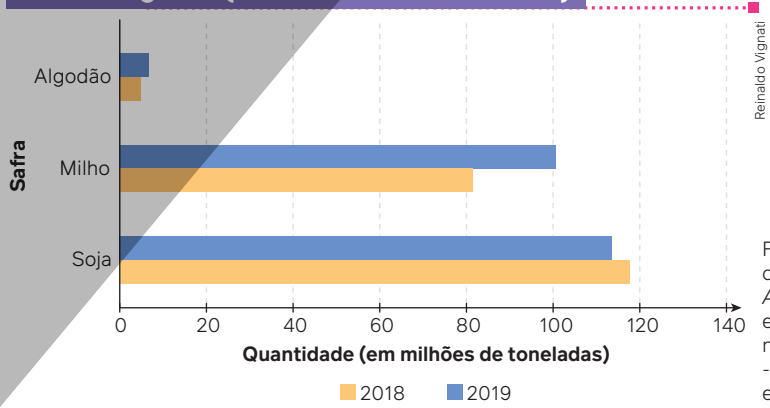
Para explorar

1. Os estudantes irão ler o texto da reportagem. Incentive-os para que façam uma leitura atenta, buscando extrair as informações essenciais que auxiliarão na interpretação.
2. **Safra de grãos (em milhões de toneladas)**

Grãos	[illegible]	2019
Soja	113,5 · 1,037 ≅ 117,7	113,5
Milho	100,6 : 1,236 ≅ 81,4	100,6
Algodão	6,9 : 1,396 ≅ 4,9	6,9

Fonte: ABDALA, Vitor. Safra de grãos fecha 2019 com recorde de 241,5 milhões de toneladas. *Agência Brasil*, Brasília, DF, 8 jan. 2020. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2020-01/safra-de-graos-fecha-2019-com-recorde-de-2415-milhoes-de-toneladas. Acesso em: 11 maio 2020.

3. **Safra de grãos (em milhões de toneladas)**



Fonte: ABDALA, Vitor. Safra de grãos fecha 2019 com recorde de 241,5 milhões de toneladas. *Agência Brasil*, Brasília, DF, 8 jan. 2020. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2020-01/safra-de-graos-fecha-2019-com-recorde-de-2415-milhoes-de-toneladas. Acesso em: 11 maio 2020.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

4. Resposta pessoal.
   Espera-se que o estudante perceba o crescimento da safra de algodão e milho e a queda da produção de soja. Esse crescimento ou queda ocorre em virtude de vários fatores, como o excesso ou a escassez de chuvas.
   Esta atividade explora a interpretação de informações do texto, a elaboração de tabelas e gráficos e a produção de texto. Você pode usá-la para avaliação.

Página 100

Para pensar e discutir

1. No período de 2014 a 2017.
2. Resposta pessoal.
   Exemplo de resposta: A alta da porcentagem no período de 2014 a 2017. Frase possível: A taxa de desocupação das pessoas com 14 anos de idade ou mais praticamente dobrou no período de 2014 a 2017.

Página 101

Para explorar

Esta atividade deve ser feita coletivamente pelos estudantes. Depois de fazer um levantamento das medidas, eles deverão organizá-las em classes para elaborar o gráfico solicitado. Será necessário destinar pelo menos duas aulas completas para essa atividade.

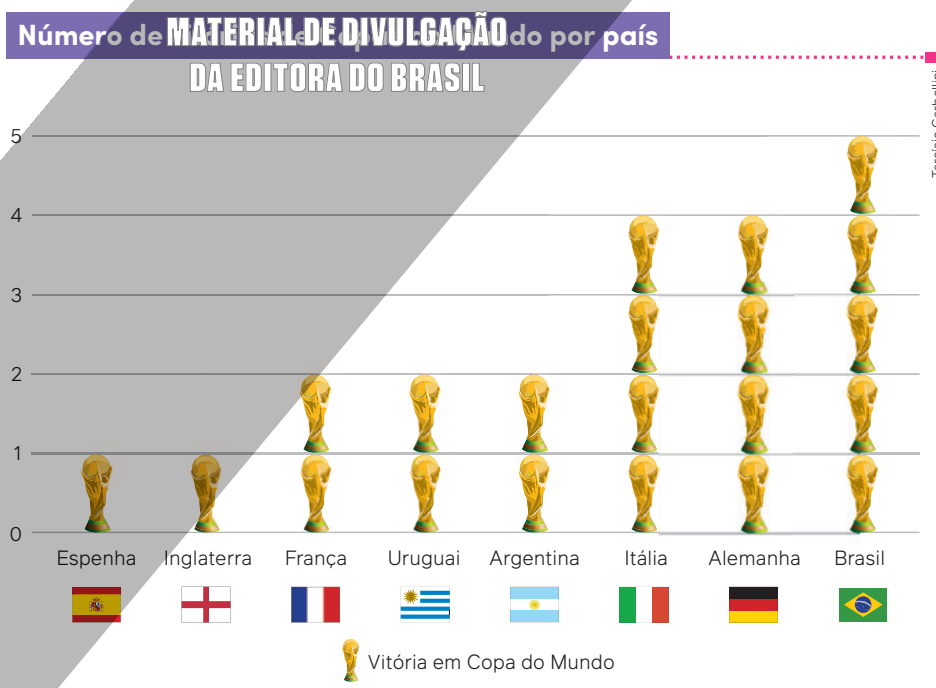
1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.
3. Resposta pessoal.
4. Resposta pessoal.

Página 102

Para pensar e discutir

1. Ao lado do nome há a bandeira, que indica a nacionalidade do jogador.
2. Usando ícones correspondentes às bolas utilizadas em cada um dos mundiais.
3. Resposta pessoal.
   Exemplo de resposta: Usando as taças dos mundiais.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL



Fonte: LOZETTI, Alexandre; KESTELMAN, Amanda; FERNANDEZ, Martín. Campeões mundiais: veja lista de títulos da Copa do Mundo. *Globo esporte*, Rio de Janeiro, 15 jul. 2018. Disponível em: https://globoesporte.globo.com/futebol/copa-do-mundo/noticia/franca-bate-a-croacia-e-e-bicampea-veja-lista-de-titulos-da-copa-do-mundo.ghtml. Acesso em: 13 jun. 2020.

Páginas 102-105

Atividades

Embora o número de atividades seja relativamente pequeno, o trabalho nesse momento é muito grande por parte do estudante, pois a análise de informações em gráficos estatísticos não é algo imediato que exige um cálculo ou uma simples observação. Talvez mais importante do que os estudantes darem as respostas é construirmos referencial para que possam ter hábitos de leitura e interpretação de gráficos.

1. Respondendo à pergunta: existem imprecisões na representação feita por meio de baldes na apresentação do IBGE. Não é possível termos um valor para cada balde, uma vez que existem baldes inteiros (16 baldes para o Brasil) que representam valores como 33,5 milhões de litros e outros, também inteiros, que representam 3,0 milhões de litros (2 baldes para Goiás), ou seja, valores inteiros. Ora, se 2 baldes representam 3,0 milhões de litros, então 16 baldes representariam 72 milhões (para o Brasil).

Para a construção solicitada, utilizando as informações do gráfico, sugerimos que os estudantes usem garrafas, mas também podem escolher outros elementos. Uma ideia é pedir que façam esse gráfico sem o auxílio de planilha eletrônica, para que tenham a percepção da proporcionalidade dos elementos com base nas informações numéricas.

2. a)

População brasileira, de acordo com as divisões do mercado de trabalho, 4º trimestre 2019

Mercado de trabalho	Quantidades de pessoas (em milhares)
Ocupados	94 552
Desocupados	11 632
Fora da força de trabalho	65 429
Abaixo da idade de trabalhar	38 464

Fonte: DESEMPREGO. *In*: IBGE. Rio de Janeiro, 8 abr. 2020. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/explica/desemprego.php. Acesso em: 11 maio 2020.

b) 94 552 + 11 632 + 65 429 + 38 464 = 210 077

Logo, a população em 2019 era de 210 077 000 habitantes.

c) 94 552 : 210 077 ≅ 0,450 = 45%

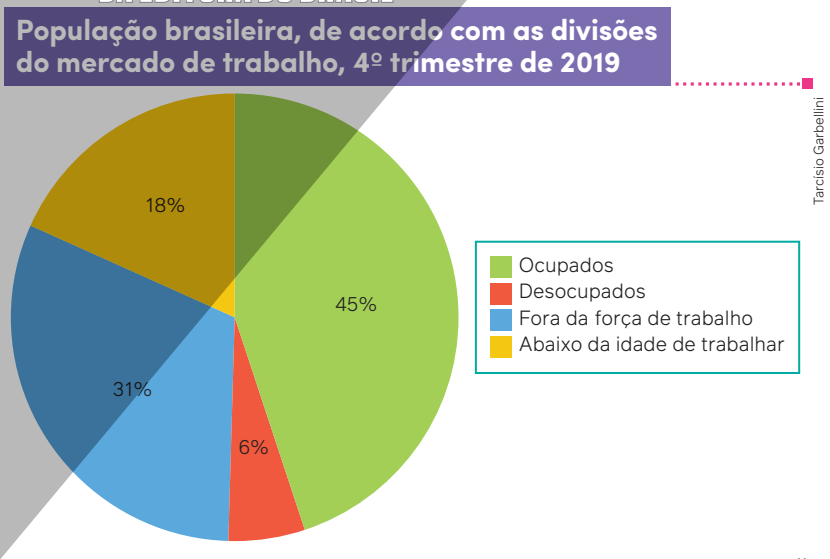
11 632 : 210 077 ≅ 0,055 ≅ 6%

65 429 : 210 077 ≅ 0,311 ≅ 31%

38 464 : 210 077 ≅ 0,183 ≅ 18%

Exemplo de resposta:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

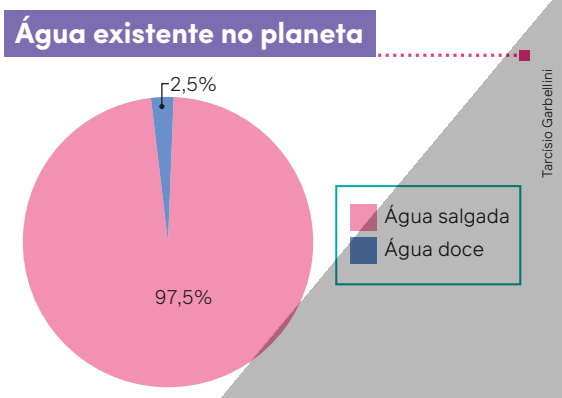


Fonte: DESEMPREGO. *In*: IBGE. Rio de Janeiro, 8 abr. 2020. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/explica/desemprego.php. Acesso em: 11 maio 2020.

3. Resposta pessoal, pois se trata de uma construção de gráfico. Sugerimos que esta atividade seja conduzida para resolução em dupla. Os alunos poderão inicialmente fazer uma tabela com o cálculo médio do rendimento para cada uma das cinco regiões brasileiras e, nessa tabela, colocar também o rendimento do Brasil (como está em verde no gráfico). Deverão então elaborar, com base nessa tabela utilizando recursos digitais, um gráfico com seis colunas (Brasil e cinco regiões). Pode-se aproveitar a atividade para que eles analisem as informações do rendimento por região quando comparados com o rendimento brasileiro.

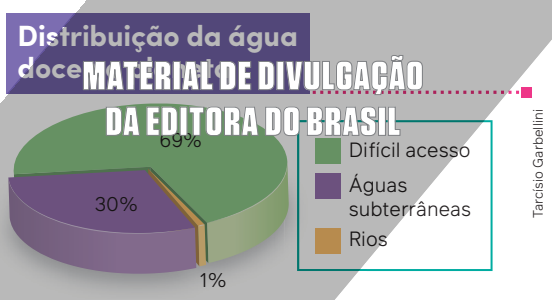
4. **a)** Gráfico de setores, pois se trata de porcentagens em relação ao todo.

b)



Fonte: BRASIL. Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico. *Água no mundo*. Brasília, DF: ANA, [200-]. Disponível em: https://www.ana.gov.br/panorama-das-aguas/agua-no-mundo. Acesso em: 29 abr. 2020.

c)



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Fonte: BRASIL. Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico. *Água no mundo*. Brasília, DF: ANA, [200-]. Disponível em: https://www.ana.gov.br/panorama-das-aguas/agua-no-mundo. Acesso em: 29 abr. 2020.

5. **a)** Sim.

b) No Amapá.

c) Resposta pessoal.

Espera-se que os estudantes observem que a taxa de desocupação aumentou nos 26 estados e no Distrito Federal, ou seja, que nenhum teve diminuição na taxa de desocupação de 2014 para 2018. Pode-se dizer que a situação de desemprego se agravou no país, sendo o Amapá e o Rio de Janeiro os estados mais críticos, com aumentos de aproximadamente 8% nesse período.

6. (V) Em 10 de janeiro de 2020 o dólar estava abaixo de R$ 4,20.

Nessa data o valor do dólar era quase R$ 4,10.

(F) De 2 de janeiro a 13 de fevereiro de 2020 houve um aumento de mais de 10% na cotação do dólar.

$\frac{4,379}{4,025} \cong 1,088$

Logo, o aumento foi de aproximadamente 8,8% nesse período.

7. Resposta pessoal.

A análise dos dados leva os estudantes a estabelecer diversas relações. Lembre-se de que, provavelmente, eles fazem parte da categoria indicada na segunda coluna ou estão quase entrando nela. Eles devem perceber que a primeira coluna inclui os dados de todas as outras colunas. Vários pontos podem ser abordados; por exemplo: dos 15 aos 17 anos, a maior parte dos jovens (aproximadamente 80%) só estuda; dos 18 aos 24 anos, esse percentual cai para cerca de 20%; dos 25 aos 29 anos, o percentual de jovens que só trabalha é o maior entre todas as faixas indicadas.

Esta atividade é uma oportunidade para discutir com os estudantes o mercado de trabalho para os jovens. Conduza a discussão de modo que eles reflitam sobre a profissão que pretendem seguir e as oportunidades de trabalho disponíveis na comunidade.

Página 106

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal.

É provável que os estudantes respondam: O aumento se deve à mudança da presidência da empresa. Entretanto, o fato de o presidente da empresa ter mudado é um elemento isolado e não conclusivo. Para uma análise mais profunda, devemos ter em mente o contexto econômico. Será que certas medidas adotadas em 2019 só mostrariam os resultados, em termos de faturamento, no ano seguinte?

2. Calculamos o aumento pela diferença entre os valores apresentados no gráfico:

$7,52 - 4,70 = 2,82$

Assim, o aumento no faturamento foi de 2,82 milhões de reais. Calculamos que porcentagem esse aumento representa:

Faturamento	Porcentagem
4,70	100%
2,82	x%

$4{,}70 \cdot x = 2{,}82 \cdot 100$

$4{,}70x = 282$

$x = \dfrac{282}{4{,}70}$

$x = 60\%$

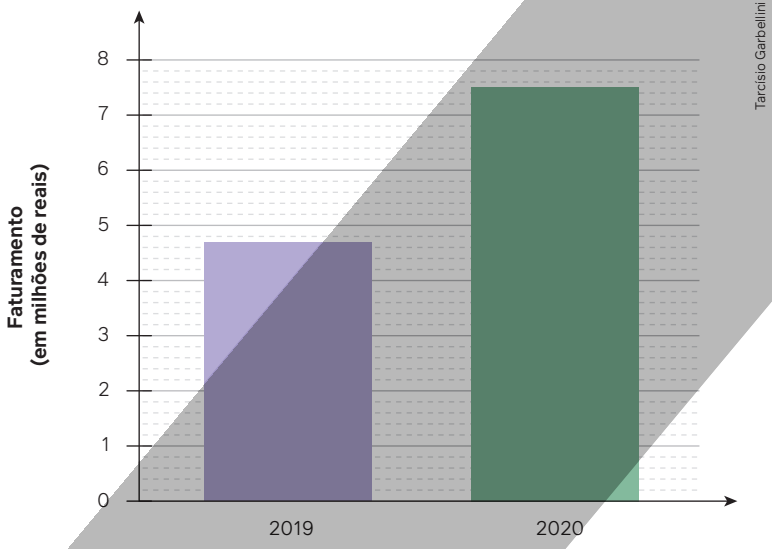
Portanto, o aumento foi de 60%.

3. Resposta pessoal.

É fundamental deixar os estudantes pensarem a respeito do gráfico antes de comentar a resposta a seguir.

Note que a altura da coluna correspondente ao dado de 2019 é praticamente a metade da altura da coluna correspondente ao dado de 2020 (ou a altura do dado de 2020 é o dobro da altura do dado de 2019). Isso induz o leitor a concluir, com base apenas nas alturas dessas colunas, que o faturamento praticamente duplicou de 2019 para 2020, o que não é correto. Chame a atenção dos estudantes para o fato de que os valores do faturamento devem ser proporcionais à altura das colunas no gráfico.

Resultado do biênio



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

Fonte: Dados fictícios.

Página 108

Atividades

Nenhum dos gráficos utilizados nestas atividades representam situações reais, pois não seria ético utilizarmos nomes de empresas, de instituições ou mesmo de pessoas físicas para evidenciar possíveis construções tendenciosas a respeito da apresentação de informações por meio do recurso tratamento da informação. Assim, com base em situações fictícias, proporcionamos um momento para que todos os estudantes fiquem atentos a possíveis erros ou indução a erros de interpretação dos gráficos apresentados.

Sugerimos também que eles sejam incentivados a observar gráficos que apresentem, na mídia ou em propagandas, certos "detalhes duvidosos".

1. Resposta pessoal.

Espera-se que o estudante perceba que o gráfico não está correto. Inicialmente, observe que a soma dos percentuais não é igual a 100% (que representaria o todo). Outra possível observação é que, por exemplo, 82% da medida 360° (correspondente a uma volta) equivale a um ângulo de 295,2°, isto é, um setor de mais de $\dfrac{3}{4}$ do círculo.

2. **a)** Sim, pois 33% + 36% + 31% = 100%.

   Comente com os estudantes que, quando falamos em votos válidos, desconsideramos os votos brancos ou nulos.

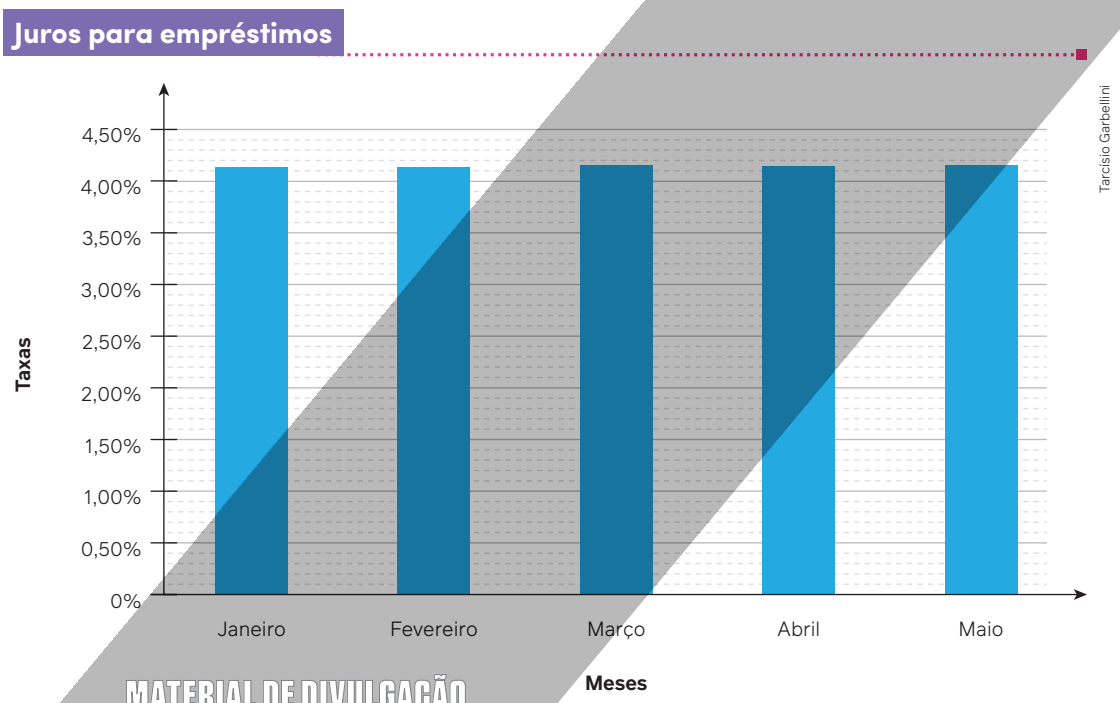
   b) O motivo se deve ao fato de que a altura das colunas inicia em 28%; portanto, a altura de cada uma delas não é coerente com o percentual que representa.

   c) Resposta pessoal.

   Exemplo de resposta: A distorção é corrigida ao se refazer o gráfico com as colunas começando no zero. É interessante solicitar que os estudantes refaçam o gráfico com as alturas das colunas proporcionais aos percentuais, iniciando do zero.

3. Resposta pessoal.

   Exemplo de resposta: Fica acentuado o crescimento dos juros. Ao refazer o gráfico, iniciando o eixo vertical no zero, temos:



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Fonte: Dados fictícios.

Espera-se que a frase de cada estudante comente o fato de que a percepção de crescimento não é tão evidente e acentuada nesse gráfico, em que o eixo *y* começa no zero.

4. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes observem que a representação do gráfico de setores em perspectiva com o setor "ótimo" mais à frente distorce visualmente a comparação com o setor "regular", que aparece mais distante (parte de trás), embora os percentuais sejam os mesmos.

5. Resposta pessoal.

   Esta é uma atividade de pesquisa que deve ser incentivada, pois amplia o conhecimento do estudante em relação à análise de um gráfico estatístico.

Página 109

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal.

   Trata-se de uma discussão interessante. Peça a cada estudante, individualmente, que escreva uma frase sobre a imagem. Em seguida, convide alguns para ler o que escreveram. Não há uma resposta fechada, nem é essa é a intenção. Esta atividade é uma preparação e um convite para que eles sempre analisem informações apresentadas de diferentes formas – visual, falada, escrita etc. –, de maneira crítica e fundamentada em fontes e critérios.

2. Resposta pessoal.

A imagem pode evidenciar o contraste de como as pessoas vivem em uma mesma cidade. Enfatize o problema das ocupações irregulares, que muitas vezes é a única saída para determinado grupo de indivíduos.

Página 112

Para explorar

1. O IDH é calculado considerando expectativa de vida, renda e escolaridade do país. É um índice que varia entre 0 e 1, no qual, quanto mais próximo de 1, melhor é a qualidade de vida daquele país.

IDH do Brasil e dos estados em 2020

Local	IDH	Local	IDH
Brasil	0,761	Pará	0,646
Acre	0,663	Paraíba	0,658
Alagoas	0,631	Paraná	0,749
Amapá	0,708	Pernambuco	0,673
Amazonas	0,674	Piauí	0,646
Bahia	0,660	Rio de Janeiro	0,761
Ceará	0,682	Rio Grande do Norte	0,684
Distrito Federal	0,824	Rio Grande do Sul	0,746
Espírito Santo	0,740	Rondônia	0,690
Goiás	0,735	Roraima	0,707
Maranhão	0,639	Santa Catarina	0,774
Mato Grosso	0,725	São Paulo	0,783
Mato Grosso do Sul	0,729	Sergipe	0,665
Minas Gerais	0,731	Tocantins	0,699

Fonte: CIDADES e estados. *In*: IBGE. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados. Acesso em: 18 maio 2020.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

3. Resposta pessoal.

Sugerimos que esta atividade faça parte da avaliação. Os estudantes desenvolverão conhecimentos para compreender como o IDH é utilizado e calculado. A comparação entre os índices dos estados com o do Brasil possibilita conhecer um pouco mais a realidade brasileira e o desequilíbrio entre as regiões.

Página 113

Para pensar e discutir

1. Como os índices nos três primeiros meses são 0,71%, 0,22% e 0,02%, nesta ordem, para saber o índice acumulado devemos multiplicar:

$(1 + 0{,}0071) \cdot (1 + 0{,}0022) \cdot (1 + 0{,}0002) = 1{,}0071 \cdot 1{,}0022 \cdot 1{,}0002 \cong 1{,}009517$

Logo, o índice acumulado é de aproximadamente 0,9517%.

2. Espera-se que, com base na análise dos dados da tabela, o estudante observe que em março de 2020 o INPC acumulado nos 12 últimos meses foi de 3,67%. Assim, se o aumento salarial foi menor que esse índice, seu poder de compra diminuiu.

Página 115

Para explorar

Existe nesta atividade de exploração um verdadeiro trabalho de atualização do PIB brasileiro, que dependerá do ano em que ela será feita pelos estudantes.

Oriente-os para que escolham apenas quatro países para a comparação, podendo ser ou não do mesmo continente. Depois, conduza uma discussão entre os grupos para que todos tenham a oportunidade de conhecer os dados pesquisados pelos colegas e as análises do PIB brasileiro e dos países escolhidos. Como cada grupo poderá escolher livremente os quatro países para a comparação, é provável que haja grande diversidade nas análises dos grupos. Aproveite e incentive a troca de ideias, valorizando a argumentação consistente dos estudantes.

Atividades

1. A informalidade aumentou de 2015 a 2018, basta observar o aumento das duas categorias: "Empregados sem carteira" e por "Conta própria". Nesse mesmo período houve decrescimento da categoria "Empregado com vínculo".

Páginas 116-117

Atividades finais

Trata-se de um momento para verificação de aprendizagem. É com esse objetivo que estas atividades deverão ser encaminhadas para resolução, de preferência individualmente, a fim de incentivar a autonomia e a autoavaliação.

1. a) PIB significa Produto Interno Bruto. Ele indica a soma de todos os bens e serviços produzidos por um país, estado ou cidade, geralmente por ano.

b) A renda *per capita*, de forma simplificada, é o resultado da divisão da renda nacional pelo número de habitantes. Renda *per capita* ou rendimento *per capita* é um indicador que auxilia a medir o grau de desenvolvimento econômico de um país ou de uma região.

c) Geralmente quando se deseja mostrar os dados em relação ao todo.

d) O gráfico de linhas é utilizado frequentemente para analisar o comportamento de um dado em relação ao tempo.

e) O fluxograma pode ser considerado um esquema para indicar, de forma simples, o funcionamento de um processo. É a representação, por meio de figuras, de um algoritmo.

f) Descreve as várias etapas para a execução de determinado problema.

g) INPC ou IPCA.

h) O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é um indicador utilizado para classificar os países em relação ao grau de [illegible]

Essas respostas [illegible] os de forma aproximada. Sugerimos que os estudantes utilizem essas questões para organizar as informações desenvolvidas na unidade.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

2. De acordo com o enunciado, as duas maiores regiões produtoras deveriam produzir juntas um total de 119,9 milhões de toneladas, e, de acordo com o gráfico, essas regiões são a Sul e a Centro-Oeste, com 37,2% e 38,3% da produção nacional, respectivamente. Utilizando essas informações, calculamos a produção estimada da Região Sudeste, que corresponde a 11,4% da produção nacional.

$37{,}2\% + 38{,}3\% = 75{,}5\%$

Porcentagem	Produção (em milhões de toneladas)
75,5%	119,9
11,4%	x

$0{,}755x = 0{,}114 \cdot 119{,}9$

$x = \dfrac{13{,}6686}{0{,}755}$

$x \cong 18{,}1$

Logo, a Região Sudeste deveria produzir aproximadamente 18,1 milhões de toneladas.

Alternativa **d**.

3. Podemos organizar os dados em uma tabela e calcular a taxa de urbanização, que é a razão entre a população urbana e a população total do município:

Município	População urbana	População total	Taxa de urbanização
I	8 000	8 000 + 4 000 = 12 000	$\frac{8\,000}{12\,000} \cong 0{,}67$
II	10 000	10 000 + 8 000 = 18 000	$\frac{10\,000}{18\,000} \cong 0{,}56$
III	11 000	11 000 + 5 000 = 16 000	$\frac{11\,000}{16\,000} \cong 0{,}69$
IV	18 000	18 000 + 10 000 = 28 000	$\frac{18\,000}{28\,000} \cong 0{,}64$
V	17 000	17 000 + 12 000 = 29 000	$\frac{17\,000}{29\,000} \cong 0{,}59$

Logo, o município III tem a maior taxa de urbanização e deverá receber o investimento extra.
Alternativa **c**.

4. Considerando os dados do gráfico, calculamos a variação em cada um dos intervalos:
Entre as semanas 1 e 2: 3,18 − 3,20 = −0,02
Entre as semanas 2 e 3: 3,22 − 3,18 = +0,04
Entre as semanas 3 e 4: 3,24 − 3,22 = +0,02
Entre as semanas 4 e 5: 3,25 − 3,24 = 0,01
Entre as semanas 5 e 6: 3,22 − 3,25 = −0,03
Portanto, a maior variação ocorreu entre as semanas 2 e 3.
Alternativa **a**.

5. Inicialmente, calculamos o número de óbitos de ciclistas em cada faixa inferior a 30 anos.
De 20 a 24 anos: 70 − 26 − 25 = 19
De 25 a 29 anos: 60 − 22 − 18 = 20
Então:
Total de óbitos de ciclistas com menos de 30 anos: 19 + 20 = 39.
Total de óbitos de todas as faixas etárias e todas as modalidades: 70 + 60 + 70 + 50 = 250.
Porcentagem de ciclistas que faleceram com menos de 30 anos:
$\frac{39}{250} = 0{,}156 = 15{,}6\%$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Logo, 15,6% das vítimas fatais se deslocavam de bicicleta e tinham menos de 30 anos.
Alternativa **a**.

6. Calculamos os percentuais correspondentes:
Abaixo do peso: 0,10 · 240 = 24
Peso normal: 0,45 · 240 = 108
Sobrepeso: 0,30 · 240 = 72
Obesidade: 0,15 · 240 = 36
Portanto, há exatamente 108 pessoas com peso normal.
Alternativa **d**.

7. Usando os dados do gráfico, podemos calcular o percentual de pessoas fumantes em cada empresa:
Empresa I: $\frac{6}{40} = 0{,}15 = 15\%$
Empresa II: $\frac{3}{15} = 0{,}2 = 20\%$
Empresa III: $\frac{2}{16} = 0{,}125 = 12{,}5\%$
Empresa IV: $\frac{5}{23} \cong 0{,}217 = 21{,}7\%$
Empresa V: $\frac{3}{28} \cong 0{,}107 = 10{,}7\%$
Portanto, a empresa V tem o menor percentual de pessoas fumantes.
Alternativa **e**.

Conexões & projetos

Objetivos

- Interpretar e elaborar tabelas e gráficos com dados estatísticos, fazendo inferências e tirando conclusões com base em dados confiáveis.
- Analisar a taxa de variação de uma variável com base em dados coletados em pesquisas, utilizando-a para modelar situações e fazer inferências.
- Utilizar progressões aritméticas para modelar uma relação, entre variáveis discretas, que sugira uma função afim.
- Fazer inferências e tirar conclusões acerca de nossa sociedade com base em dados confiáveis, o que auxilia na compreensão de realidades complexas.

Justificativa

Por meio dos projetos, os estudantes têm mais uma oportunidade de desenvolver e consolidar habilidades e competências trabalhadas nas unidades deste volume, não apenas as relativas aos aspectos cognitivos como também as que envolvem iniciativa, busca de conhecimento, autoestima e autoconhecimento, liderança, empatia, diálogo, convivência e resolução de conflito, e que revelam a importância do exercício da cidadania e da formação de cada estudante como sujeito da comunidade.

Competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Competências gerais trabalhadas nos projetos

Competência geral 1: A valorização e a utilização dos conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo social, cultural e digital para entender e explicar a realidade está presente na busca da informação, que é o ponto de partida para os dois projetos apresentados. No **Projeto 1**, cujo produto final é um infográfico que situa o leitor sobre o IDH brasileiro no cenário mundial, os estudantes devem destacar pontos fundamentais que contribuem para o IDH: expectativa de vida, renda *per capita* e escolarização. No **Projeto 2**, eles trabalham dados quantitativos relativos às populações indígenas brasileiras e têm a oportunidade de refletir sobre a realidade dessas populações.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Competência geral 2: Essa competência é mobilizada na realização do **Projeto 2**, em que os estudantes fazem investigações envolvendo progressões aritméticas e quando investigam relações matemáticas envolvendo a função do 1º grau. Exercitam, assim, a curiosidade intelectual e recorrem a uma abordagem própria da Matemática usando criatividade, reflexão, análise crítica e imaginação para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e indicar soluções.

Competência geral 4: O desenvolvimento dos dois projetos exige que os estudantes se comuniquem utilizando diferentes linguagens, como verbal, oral, escrita ou matemática, esta por meio de representações algébricas e gráficas. A linguagem digital também está presente seja na coleta de dados, no uso de planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria

dinâmica, seja nas apresentações dos produtos finais. Assim, independentemente da forma de comunicação, os dois projetos permitem aos estudantes se expressarem e partilharem informações, experiências e ideias, favorecendo o entendimento mútuo.

Competência geral 5: Nos dois projetos, os estudantes usam meios digitais para acessar informações, representar dados, fazer cálculos, construir gráficos e apresentar o resultado. Assim, enquanto desenvolvem os projetos, mobilizam essa competência ao utilizar as tecnologias digitais de informação e a comunicação de maneira crítica, significativa, reflexiva e ética.

Competência geral 6: A convivência em grupos para a realização dos dois projetos favorece a valorização da diversidade de saberes e a vivência de experiências, que possibilitam entender as relações do mundo do trabalho. Os estudantes têm a oportunidade de agir com determinação, esforço e perseverança na busca de soluções para resolver situações complexas e tomar decisões ouvindo e respeitando o outro e agindo em equipe. É por meio da participação de cada um e do trabalho de todos que as propostas se desenvolvem.

Competência geral 7: No desenvolvimento do **Projeto 2**, os estudantes têm a oportunidade de argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns relativas aos povos indígenas, respeitando e promovendo, assim, os direitos humanos em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado com o outro.

Competência geral 8: Como os dois projetos apresentados devem ser desenvolvidos em grupos, eles proporcionam a cada estudante a oportunidade de se conhecer, compreendendo-se como parte da diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

Competência geral 9: Ao trabalharem em grupos para desenvolver os dois projetos, os estudantes têm a oportunidade de resolver conflitos exercitando a empatia, o diálogo e a cooperação. Além disso, o trabalho coletivo permite desenvolver o respeito por si mesmos e pelo outro, valorizando a diversidade de ideias e aprendendo a acolher a perspectiva do outro.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Competência geral 10: Desenvolvidos em grupos para resolver problemas complexos, os dois projetos apresentados oferecem ao estudante a oportunidade de agir pessoal e coletivamente, com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação. Possibilitam também a participação solidária, o exercício de liderança e a tomada de decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Projeto 1

Objetivos

- Interpretar e elaborar tabelas e gráficos com dados estatísticos, fazendo inferências e tirando conclusões com base em dados confiáveis.
- Elaborar um infográfico com dados estatísticos.
- Encontrar funções que aproximem dados estatísticos, para modelar seu comportamento e auxiliar sua análise.

Competências específicas de Matemática: 1, 3, 4 e 5

Habilidades

EM13MAT101: Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que evolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT102: Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

EM13MAT104: Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

EM13MAT302: Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT401: Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

EM13MAT501: Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

EM13MAT510: Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Orientações ao professor

A ideia central deste projeto é apoiar os estudantes no desenvolvimento de suas habilidades de leitura e produção de compilados de informações estatísticas. Eles deverão sair desse processo capazes de comunicar visualmente ideias estatísticas e interpretar com mais facilidade os infográficos tão presentes na mídia, conseguindo, inclusive, identificar que tipo de apelos visuais promovem melhores interpretações ou incorrem em erros e enganos. Assim, ao propor o projeto, peça uma pesquisa inicial sobre diversos infográficos e os traga para fazer um alinhamento coletivo a respeito das características dessa linguagem. Depois das leituras prévias, organize um debate sobre os tópicos principais do tema, incluindo a questão disparadora do projeto. Explique que, ao final do projeto, eles deverão respondê-la:

- Para que serve e como deve ser feito um infográfico?

Após essa conversa inicial, divida a turma em grupos e combine um cronograma para a realização do projeto. Isso pode ser feito em conjunto com a turma, depois de uma leitura coletiva da descrição do projeto: contexto, desenvolvimento, produto, apresentação e relatório conclusivo. O cronograma deve conter, além do encontro inicial, as etapas a seguir.

1. Análise de infográficos

Inicialmente, os grupos devem selecionar os melhores e os piores infográficos com os quais tiveram contato. Por ser uma etapa subjetiva, proponha uma discussão coletiva para auxiliar a turma na reflexão e compreensão do que faz um infográfico ser bom ou ruim. Essa discussão coletiva deve ser mediada para que toda a turma consiga organizar suas ideias em duas áreas: qualidade visual do infográfico, no quesito atratividade; e qualidade conceitual do infográfico, no quesito organização e transmissão das informações.

Após o debate coletivo, e com base não só nas opiniões próprias mas principalmente nas observações da turma, os estudantes devem ser capazes de listar o que faz um infográfico ser informativo de maneira clara e atrativa.

Vale ressaltar que a importância do debate coletivo está fundamentada no fato de que um infográfico deve ser compreendido pelo maior número de pessoas que entrar em contato com ele, de modo que as diversas opiniões dos estudantes devem ser levadas em consideração, não cabendo aos grupos julgar quais estão certas ou erradas.

2. Definição das características de um bom infográfico

Após o debate coletivo, cada grupo deve elencar sua lista de prioridades. Nesse momento, o compartilhamento de ideias entre os grupos é menos importante. Cada grupo deve saber fazer escolhas de acordo com os argumentos gerados pela discussão inicial. Esse processo auxilia no desenvolvimento de competências gerais de comunicação e convívio, garantindo que todos consigam respeitar a opinião dos demais, mas ainda assim fazendo escolhas autônomas e bem justificadas. Com a lista de características que um infográfico deve ter ou as que devem ser evitadas, os estudantes estarão prontos para a etapa seguinte.

3. Coleta de dados para o infográfico

Antes de produzir o infográfico, os estudantes precisam fazer pesquisas sobre o IDH. Mais uma vez caberá aos grupos definir quais dados serão mais importantes de serem representados e, por isso, as discussões não devem ser coletivas. Contudo, é preciso reservar um momento para analisar e debater as escolhas de cada grupo, garantindo que todos entenderam o que terão de produzir, considerando dados condizentes com o produto final e com a proposta do projeto de apresentar visualmente informações relevantes sobre o IDH brasileiro.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Nesse momento, os estudantes deverão prever como os dados irão auxliá-los nas inferências sobre o futuro dos índices que determinam o IDH brasileiro. Note que todos os grupos devem concluir que a taxa de variação anual do IDH entre 1990 e 1995 foi de 0,0076 por ano. Oriente a turma sobre a melhor forma de obter essa taxa e usá-la na inferência dos anos seguintes. Os estudantes podem montar uma função ou apenas uma tabela, de preferência utilizando recursos digitais para agilizar os cálculos.

4. Produção e apresentação do infográfico

A elaboração do produto final pode ser coletiva e ocorrer paralelamente à apresentação. Os grupos deverão apresentar suas propostas de infográficos. É interessante fazer uma rodada coletiva de análise das propostas para que todos contribuam com a produção dos colegas.

Aqui cabe um momento de autoavaliação bem importante: peça aos grupos que avaliem os próprios infográficos verificando se eles têm as características listadas pelo grupo como essenciais. Após essa rodada de autoavaliação e compartilhamento das produções, reserve um tempo para os estudantes revisarem e aprimorarem os produtos finais, verificando também se os dados coletados realmente permitem o estudo da taxa de variação dos índices e a elaboração de projeções. Na data final, os grupos apresentarão os infográficos e os relatórios individuais.

Ao avaliar os relatórios, verifique o que eles aprenderam ao elaborar o infográfico sobre IDH, crescimento desse índice no Brasil e uso da taxa de variação para fazer inferências. Essas informações permitirão saber se os estudantes compreenderam como a estatística colabora na produção de conhecimento.

Projeto 2

Objetivos

- Realizar pesquisas envolvendo a realidade do indígena brasileiro e fazer comparações a respeito de sua população e ocupação de territórios.
- Fazer inferências e tirar conclusões acerca de nossa sociedade, com base em dados confiáveis.
- Elaborar gráficos com dados estatísticos confiáveis.

Competências específicas de Matemática: 1, 2, 3, 4 e 5

Habilidades

EM13MAT101: Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

EM13MAT102: Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

EM13MAT104: Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

EM13MAT202: Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas.

EM13MAT302: Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT401: Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o

comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

EM13MAT501: Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

EM13MAT507: Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

EM13MAT510: Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Orientações ao professor

Para a realização desse projeto, sugere-se o compartilhamento com a área de Ciências Humanas, tendo em vista um estudo mais aprofundado das ações nacionais relacionadas à população indígena brasileira. O respeito à diversidade faz parte das Competências Gerais da BNCC e o conhecimento da cultura indígena como raiz da cultura nacional é tema transversal da Base. Assim, antes do primeiro contato dos estudantes com o projeto, convém propor estudos prévios que lhes tragam mais conhecimento sobre as instituições que cuidam dos direitos indígenas no país.

Com base nas leituras prévias, proponha um debate sobre os tópicos principais do tema, incluindo a questão disparadora do projeto. Explique que, ao final do projeto, eles deverão saber respondê-la:

- Será que teremos populações indígenas vivendo no Brasil daqui a 20 anos?

Após essa conversa inicial, organize a turma em grupos e combine um cronograma para a realização do projeto. Isso pode ser feito em conjunto com a turma, depois da leitura colaborativa [illegible] projeto: contexto, desenvolvimento, produto, apresentação e relatório coletivo. O cronograma deve conter, além do encontro inicial, as etapas a seguir.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1. Coleta de dados

Nesse momento, os grupos serão convidados a coletar dados quantitativos da população indígena por estado. Para isso, devem buscar diversas fontes históricas confiáveis que forneçam as informações sobre essas populações antes de 2010, além dos próprios censos demográficos produzidos pelo IBGE. Será preciso apoiar os estudantes na coleta e análise desses dados para que eles saibam não apenas onde coletar dados confiáveis mas também explicar e justificar os conjuntos desses dados. Além disso, é muito importante que os dados sejam estudados também qualitativamente, a fim de que justifiquem a presença dessas populações em maior ou menor número, de acordo com as macrorregiões brasileiras.

2. Organização de dados

Uma vez coletados os dados, é preciso orientar os estudantes na organização deles. Nesse momento, pode ser importante uma discussão coletiva para que os grupos verifiquem se os dados são coerentes. Uma vez que todos estão fazendo a mesma pesquisa, espera-se que todos tenham obtido informações parecidas. Assim, compartilhar os dados coletados pode permitir uma pesquisa mais acurada, evitando que possíveis erros na coleta se propaguem para a análise e para as conclusões. Depois desse processo de compartilhamento, caberá a cada grupo escolher a própria forma de organizar e tabular as informações considerando as variáveis tempo e espaço da distribuição da população indígena nos últimos 520 anos.

3. Análise dos dados

Ao analisar os dados, os estudantes precisarão lançar mão de boa parte dos estudos do volume. Deverão estudar formas de representação gráfica, progressões aritméticas e outras ferramentas matemáticas que permitam essa análise. Para isso, apoie as escolhas dos grupos. É importante que eles evitem trocar informações, para que cada grupo desenvolva estratégias próprias de abordagem dos dados coletados, permitindo, assim, que a turma desenvolva também as competências gerais de acolhimento das estratégias pessoais e de visão do conhecimento como um bem humano construído coletivamente.

Os grupos devem elaborar e estudar diversas progressões aritméticas, comparando-as com os dados dos censos demográficos. Em seguida, precisarão escolher uma progressão, determinar a razão e prever os próximos termos, relacionando-os a anos futuros. Por fim, devem reunir os dados passados (anteriores aos censos), presentes (dos censos) e futuros (previstos por eles) para definir quais representações gráficas serão mais eficientes para expor as informações.

4. Apresentação

A etapa final do projeto irá demandar bastante criatividade dos estudantes, para que os dados fiquem claros e a análise qualitativa figure nas apresentações de forma autoexplicativa. Discuta com a turma sobre a melhor forma de fazer as apresentações (se na forma de cartazes ou por meios digitais) e garanta que todos tenham uma quantidade mínima de conteúdo, de acordo com a proposta do projeto:

- ao menos um gráfico indicando a progressão da população indígena ao longo das últimas décadas;
- ao menos três gráficos (um para cada década) indicando os locais de concentração dessas populações;
- ao menos uma progressão aritmética inferindo o tamanho dessa população nas próximas décadas.

Se necessário, reveja essa quantidade mínima com a turma. De qualquer forma, será interessante incentivá-los a criar meios de estabelecer relações entre esses gráficos, para que a apresentação auxilie o leitor a interpretá-los conjuntamente. Isso irá auxiliar os estudantes também na elaboração do relatório final, que deve mostrar as reflexões do grupo sobre o processo, trazendo as aprendizagens e estratégias que eles desenvolveram. Assim, a avaliação deve considerar não somente a apresentação dos dados mas também como ela reflete as aprendizagens demonstradas pelos estudantes no relatório final.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Atividade 1

1ª parte – Individual

Faça uma busca em *sites* de notícias para encontrar uma matéria que envolva algum dos tipos de gráfico estudados na Unidade 3.

Leia a matéria e analise o gráfico em relação aos dados apresentados no texto. Em seguida, escreva um pequeno parágrafo abordando a seguinte questão: O gráfico é fiel ao texto? Exponha argumentos que justifiquem suas afirmações. Para fazer a parte em grupo, você deve apresentar a matéria – impressa ou no celular – e o texto escrito por você.

2ª parte – Em grupo

Cada um de vocês deve disponibilizar a matéria selecionada, devidamente comentada, para todos do grupo. Escolham então uma das matérias e elaborem uma questão contextualizada envolvendo os dados do gráfico.

A questão deve ser desafiadora, provocar boas discussões matemáticas, conter enunciado claro, conceitos matemáticos corretos e estar redigida corretamente.

Escrevam a resolução comentada e a resposta.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

As questões serão trocadas entre os grupos e as resoluções discutidas entre os que as resolveram e os que as elaboraram.

Comentários:

Incentive os estudantes a explorar matérias cujos gráficos possam gerar boas discussões matemáticas, inclusive os que contenham erros. No momento da atividade em grupo, deixe-os à vontade para discutir as matérias selecionadas por eles. Eles podem, inclusive, compartilhar a parte individual previamente usando meios digitais.

Caso você considere pertinente, em vez de os estudantes trocarem as questões entre eles, combine que elas serão recolhidas por você para que algumas integrem um instrumento de avaliação. Essa é uma oportunidade para reforçar a autoestima deles, bem como trazer à tona a discussão sobre a função dos instrumentos de avaliação. Para se aprofundar no assunto, consulte as referências comentadas que constam neste manual. Pode ser feita integração com Língua Portuguesa visando ao desenvolvimento da **habilidade EM13LP32**.

Atividade 2

Esta atividade deve ser desenvolvida em grupo.

1ª parte

Juntos, pesquisem uma série histórica sobre algum dado quantitativo nacional (número de habitantes de determinada localidade, número de escolas, expectativa de vida, número de desempregados etc.) e elaborem um gráfico de dispersão. Usem um recurso digital ou um papel milimetrado. Coloquem os anos no eixo horizontal e os valores no eixo vertical.

2ª parte

Tracem uma reta no gráfico de modo que metade dos pontos não atravessados pela reta fique abaixo dela, e metade, acima. Leiam na Unidade 1 o conceito de taxa de variação e obtenham a taxa de variação dessa reta. Então, façam o que se pede a seguir.

- Sabendo que a reta se chama reta média, expliquem por que ela tem esse nome.
- Como o conceito de taxa de variação pode ser utilizado para analisar a progressão de uma série histórica e fazer inferências sobre o comportamento futuro dessa série?

Com base nos dados coletados, escrevam um texto explicando como podemos empregar a taxa de variação e as retas médias para verificar se dados estatísticos podem ser modelados por uma função afim.

Comentários:

Esta atividade pode ser proposta durante o estudo da Unidade 1 para aprofundar a noção da turma sobre o uso de funções para aproximar o comportamento de dados estatísticos. Recomenda-se a integração com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas para análise dos dados e desenvolvimento da **habilidade EM13CHS103**.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, Claudio F. O pensamento computacional como estratégia de aprendizagem, autoria digital e construção da cidadania. *In*: *TECCOGS*, São Paulo, n. 18, p. 94-109, jul./dez. 2018. Disponível em: https://www.pucsp.br/pos/tidd/teccogs/artigos/2018/edicao_18/teccogs18_artigo05.pdf. Acesso em: 12 jun. 2020.
Esse artigo mostra a utilização do pensamento computacional como estratégia de aprendizagem para desenvolver a autoria digital e construir a cidadania.

BARBOSA, Jonei C. Integrando modelagem matemática nas práticas pedagógicas. *Educação Matemática em Revista*, n. 26, p. 17-25, 2013. Disponível em: http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/5. Acesso em: 11 jun. 2020.
Nesse artigo, o autor aborda os modelos matemáticos e como utilizá-los no dia a dia, dando sugestões de como a modelagem matemática pode facilitar a aprendizagem e despertar o interesse dos estudantes.

BARBOSA, Jonei C. Modelagem matemática: O que é? Por quê? Como? *Veritati*, n. 4, p. 73-80, 2004. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/artigo_veritati_jonei.pdf. Acesso em: 11 jun. 2020.
Nesse artigo o autor apresenta algumas ideias teóricas sobre modelagem da perspectiva da educação matemática.

IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos:* uma inteligência dos homens contados pelos números e pelo cálculo. São Paulo: Rio de Janeiro, 1997. t. 2.
O tomo 2 desse livro trata da história do cálculo binário, dos sistemas não decimais e da história do cálculo artificial, das origens ao surgimento do computador.

PASQUAL JR., Paulo Antonio. Pensamento computacional em sala de aula: muito além da programação. [Entrevista cedida a] *Fundação Telefônica Vivo*, [*s. l.*], 28 nov. 2019. Disponível em: http://fundacaotelefonica.org.br/noticias/pensamento-computacional-em-sala-de-aula-muito-alem-da-programacao/. Acesso em: 25 jul. 2020.
Nessa entrevista, o professor Paulo Antonio Pasqual Jr. comenta como o pensamento computacional pode ser desenvolvido em todas as áreas do conhecimento.

PENSAMENTO computacional e programação como ferramentas de aprendizagem. *In*: INSTITUTO AYRTON SENNA. São Paulo, 13 set. 2019. Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/pt-br/meu-educador-meu-idolo/materialdeeducacao/pensamento-computacional-e-programacao-como-ferramentas-de-aprendizagem.html. Acesso em: 25 jul. 2020.
Esse artigo trata do desenvolvimento do pensamento computacional e da programação como estratégias eficazes para o desenvolvimento pleno dos estudantes.

RIBEIRO, Alessandro Jacques; CURY, Helena Noronha. *Álgebra para a formação do professor*: explorando os conceitos [illegible]. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.
Nessa obra, voltada [illegible] formação de professores de Matemática, os autores mostram uma visão geral dos conceitos de equação e de função. Por meio de exemplos, discutem dificuldades encontradas na aprendizagem dos dois temas e, no último capítulo, sugerem algumas atividades para trabalhar com os estudantes.

VAN DE WALLE, John. *Matemática no Ensino Fundamental:* formação de professores e aplicação em sala de aula. Porto Alegre: Artmed, 2009.
Este livro oferece sugestões de como tornar a matemática significativa para estudantes e professores, propondo um trabalho voltado para a compreensão e o desenvolvimento de habilidades. O capítulo 15 aborda o estudo das funções, e o capítulo 22, o tratamento e a análise de dados.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

ENTRE AÇÃO

MATEMÁTICA

O TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR MEIO DA FUNÇÃO DO 1º GRAU

Luciana Maria Tenuta de Freitas (Coordenação)

Mestre em Ensino de Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC-Minas)

Bacharel e licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Assessora pedagógica da Educação Básica, com atuação na formação de professores

Adilson Longen

Doutor em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Mestre em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Professor do Ensino Médio

Rodrigo Morozetti Blanco

Mestre em Matemática com linha de pesquisa em Filosofia da Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat)

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP)

Professor da Educação Básica com atuação na formação de professores

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Ensino Médio

1ª edição
São Paulo, 2020

Editora do Brasil

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Longen, Adilson
Interação matemática : o tratamento da informação e a resolução de problemas por meio da função do 1º grau / Adilson Longen, Rodrigo Morozetti Blanco ; coordenação Luciana Maria Tenuta de Freitas. -- 1. ed. -- São Paulo : Editora do Brasil, 2020. -- (Interação)

ISBN 978-85-10-08356-0 (aluno)
ISBN 978-85-10-08357-7 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) 2. Matemática e suas tecnologias (Ensino médio) I. Blanco, Rodrigo Morozetti. II. Freitas, Luciana Maria Tenuta de. III. Título IV. Série.

20-38725 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Maria Alice Ferreira - Bibliotecária - CRB-8/7964

© Editora do Brasil S.A., 2020
Todos os direitos reservados

Direção-geral: Vicente Tortamano Avanso
Direção editorial: Felipe Ramos Poletti
Gerência editorial: Erika Caldin
Supervisão de arte: Andrea Melo
Supervisão de editoração: Abdonildo José de Lima Santos
Supervisão de revisão: Dora Helena Feres
Supervisão de iconografia: Léo Burgos
Supervisão de digital: Ethel Shuña Queiroz
Supervisão de controle de processos editoriais: Roseli Said
Supervisão de direitos autorais: Marilisa Bertolone Mendes

Supervisão editorial: Rodrigo Pessota
Consultoria técnico-pedagógica: Antonio Vicente Marafioti Garnica, Eduardo Wagner e Maria Cristina Bonomi
Edição: Adriana Soares Netto, Daniel Leme, Everton José Luciano, Katia Simões de Queiroz e Marcos Gasparetto
Assistência editorial: Juliana Bomjardim, Viviane Ribeiro e Wagner Razvickas
Especialista em revisão e copidesque: Elaine Cristina da Silva
Copidesque: Gisélia Costa, Ricardo Liberal e Sylmara Beletti
Revisão: Amanda [illegible] Almeida, Fernanda Sanchez, Flávia Gonçalves, Gabriel Ornelas, Jonathan Busato, Mariana Paixão, Martin Gonçalves e Rosani Andreani
Pesquisa iconográfica: [illegible]
Assistência de arte: Daniel Souza
***Design* gráfico:** Talita Lima
Capa: Megalo Design
Imagem de capa: akinbostanci/iStockphoto.com, AlexSecret/iStockphoto.com, AndreaAstes/iStockphoto.com e Korovin/iStockphoto.com
Edição de arte: Paula Coelho e Talita Lima
Ilustrações: Mauro Salgado, Reinaldo Vignati, Tarcísio Garbellini, Fábio Nienow
Editoração eletrônica: JS Design
Licenciamentos de textos: Cinthya Utiyama, Jennifer Xavier, Paula Harue Tozaki e Renata Garbellini
Controle de processos editoriais: Bruna Alves, Carlos Nunes, Rita Poliane, Terezinha de Fátima Oliveira e Valéria Alves

1ª edição, 2020

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Editora do Brasil

Rua Conselheiro Nébias, 887
São Paulo/SP – CEP 01203-001
Fone: +55 11 3226-0211
www.editoradobrasil.com.br

Começo de CONVERSA

A etapa do Ensino Médio é um desafio na vida de todo estudante. Especialmente neste momento, com as mudanças trazidas pelo Novo Ensino Médio, os desafios se acentuam e se tornam mais complexos.

A ideia deste novo modelo é que as aprendizagens escolares capacitem os estudantes para que, ao final dessa etapa de escolaridade, estejam aptos a atuar, com competência e responsabilidade, na sociedade em que vivem.

Para isso, é importante que você se aproprie dos conhecimentos escolares como uma das diversas formas de leitura da realidade, utilizando-os como ferramentas para intervir, de forma consciente e responsável, nessa realidade.

O Novo Ensino Médio

O Novo Ensino Médio está organizado em quatro áreas de conhecimento: **Linguagens e suas Tecnologias**, **Matemática e suas Tecnologias**, **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** e **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**.

De acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM)[1], os novos currículos são compostos de duas partes que se integram e se complementam: a **formação geral básica** e os **itinerários formativos**.

Na **formação geral básica**, "os currículos e as propostas pedagógicas devem garantir as aprendizagens essenciais definidas na BNCC", contemplando de modo integrado e articulado as quatro áreas de conhecimento. (BRASIL, 2018, p. 476.)

Os **itinerários formativos** possibilitam aos estudantes fazer escolhas que irão compor seu currículo. Eles dialogam com as áreas de conhecimento, uma vez que quatro deles estão diretamente ligados a cada uma dessas áreas: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Além desses, um quinto itinerário contempla a formação técnica e profissional.

Os itinerários formativos são orientados por meio de cinco eixos estruturantes:

I. investigação científica: supõe o aprofundamento de conceitos fundantes das ciências para a interpretação de ideias, fenômenos e processos para serem utilizados em procedimentos de investigação voltados ao enfrentamento de situações cotidianas e demandas locais e coletivas, e a proposição de intervenções que considerem o desenvolvimento local e a melhoria da qualidade de vida da comunidade;

II. processos criativos: supõem o uso e o aprofundamento do conhecimento científico na construção e criação de experimentos, modelos, protótipos para a criação de processos ou produtos que atendam a demandas para a resolução de problemas identificados na sociedade;

III. mediação sociocultural: supõem a mobilização de conhecimentos de uma ou mais áreas para mediar conflitos, promover entendimento e implementar soluções para questões e problemas identificados na comunidade;

IV. empreendedorismo: supõe a mobilização de conhecimentos de diferentes áreas para a formação de organizações com variadas missões voltadas ao desenvolvimento de produtos ou prestação de serviços inovadores com o uso das tecnologias (Resolução CNE/CEB nº 3/2018, Art. 12, § 2º). (BRASIL, 2018, p. 478-479.)

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Isaeva Anna/Shutterstock.com

1 BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. Parecer nº 3, de 8 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, observadas as alterações introduzidas na LDB pela Lei nº 13.415/2017. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, p. 49, 21 nov. 2018.

A BNCC e o Ensino Médio

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) está estruturada em **dez competências gerais** que devem ser desenvolvidas pelos estudantes desde a Educação Infantil até o Ensino Médio.

Cada uma das quatro áreas de conhecimento está definida por meio de **competências específicas** que se articulam às competências gerais. No caso da área de Matemática e suas Tecnologias, são cinco competências específicas, e cada uma delas se desdobra em um conjunto de habilidades que devem ser desenvolvidas ao longo dos três anos do Ensino Médio (BRASIL, 2018, p. 531).

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Nesse novo contexto, a palavra-chave passa a ser **flexibilidade**. Essa é a característica da coleção de Matemática que você tem em mãos. Esta coleção foi escrita para atender à **formação geral básica**, e a flexibilidade é seu eixo condutor.

elenabsl/Shutterstock.com

De acordo com o que propõe a BNCC, o desenvolvimento das habilidades e competências no Ensino Médio está articulado às "aprendizagens essenciais estabelecidas para o Ensino Fundamental".

> A área de Matemática, no Ensino Fundamental, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade (BRASIL, 2018, p. 471).

Sendo assim, as atividades desta coleção foram pensadas para que você possa ter experiências que o levem a desenvolver um pensamento matemático consistente, estabelecendo o maior número possível de relações, ao mesmo tempo que aplica esse conhecimento a outras disciplinas e a situações do mundo real. Esse processo, que visa a uma aprendizagem profunda dos conceitos matemáticos, também o prepara para avaliações de acesso às universidades, se essa for sua opção.

Por meio de atividades diversificadas, que envolvem resolução e elaboração de problemas, você terá a oportunidade de discutir com os colegas, levantar hipóteses, argumentar, defender suas ideias, mudar de ideia com base na argumentação do colega e, assim, desenvolver a empatia e o respeito pelo outro, que vão contribuir para sua formação humana, contemplando o desenvolvimento das competências gerais expressas na BNCC.

As atividades envolvem investigação de propriedades matemáticas, produção de textos relatando a conclusão das investigações, análise de gráficos e tabelas envolvendo situações cotidianas, modelagem para resolução de problemas reais, desenvolvimento de projetos etc. usando ou não a tecnologia. Dessa forma, você poderá desenvolver sua autonomia intelectual e pensamento crítico, fundamentais para contribuir na construção de "uma sociedade mais justa, ética, democrática, inclusiva, sustentável e solidária" (BNCC, 2018, p. 466).

Você está sendo chamado a ser **protagonista** de todo o processo de aprendizagem da Matemática ao longo do Ensino Médio. Esperamos que aproveite essa oportunidade.

Para conhecer um pouco mais a Base Nacional Comum Curricular, consulte: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ (acesso em: 7 maio 2020).

Objetivos e justificativas deste volume

Unidades	Objetivos	Justificativa	Competências e habilidades da BNCC
1 Função afim	• Estudar o raciocínio proporcional e aplicá-lo em situações cotidianas em que existe proporcionalidade direta. • Conhecer a função linear e relacionar sua taxa de variação com a proporção direta entre grandezas. • Entender quais situações podem ser modeladas por meio de uma função afim. • Utilizar procedimentos algébricos e gráficos para resolver problemas envolvendo a função afim.	• O trabalho com a função afim a partir da análise de grandezas diretamente proporcionais, por meio de situações reais representadas algébrica ou graficamente, favorece a consolidação de habilidades que permitem resolver problemas dos mais variados contextos que envolvem a função do 1º grau.	Gerais: 2, 4, 5 e 9 Matemática e suas Tecnologias: 1, 3, 4 e 5 EM13MAT101 EM13MAT302 EM13MAT401 EM13MAT404 EM13MAT501 EM13MAT510
2 Progressão aritmética, funções e sistemas lineares	• Relacionar progressão aritmética com função afim. • Investigar e obter as propriedades de uma progressão aritmética. • Resolver e elaborar problemas envolvendo uma progressão aritmética. • Relacionar a resolução de uma inequação do 1º grau com o estudo do sinal de uma função do 1º grau para resolver problemas. • Utilizar procedimentos para resolução de problemas envolvendo a resolução de sistemas de equações lineares. • Analisar o crescimento linear em situações que envolvem juros simples.	• O trabalho com sequências e progressões aritméticas permite a investigação de propriedades e o estabelecimento de conjecturas matemáticas. • A construção de modelos empregando as funções polinomiais de 1º grau, que podem envolver inequações, sistemas lineares ou progressões aritméticas, permite resolver problemas de variados contextos, sejam eles da esfera científica, sejam da vida cotidiana, como os da área financeira.	Gerais: 2, 4, 5 e 9 Matemática e suas Tecnologias: 2, 3, 4 e 5 EM13MAT203 EM13MAT301 EM13MAT302 EM13MAT405 EM13MAT507

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Elena Sharipova/Shutterstock.com

Unidades	Objetivos	Justificativa	Competências e habilidades da BNCC
3 Raciocínio lógico e tratamento da informação	• Desenvolver noções básicas referentes a linguagem computacional. • Utilizar algoritmos e fluxogramas para descrever procedimentos para a execução de uma atividade. • Localizar e analisar informações em textos, tabelas e gráficos estatísticos. • Detectar erros ou inadequações em informações presentes em gráficos estatísticos. • Interpretar taxas e índices socioeconômicos de forma crítica. • Construir e interpretar gráficos estatísticos.	• A análise e a construção de algoritmos e fluxogramas permitem o desenvolvimento do pensamento computacional. • A interpretação e a análise crítica de gráficos, tabelas e índices socioeconômicos permitem desenvolver a argumentação com base em fatos, dados e informações confiáveis.	Gerais: 1, 4, 5, 6, 7 e 9 Matemática e suas Tecnologias: 1, 3 e 4 EM13MAT102 EM13MAT104 EM13MAT315 EM13MAT405
Conexões & projetos	• Interpretar e elaborar tabelas e gráficos com dados estatísticos, fazendo inferências e tirando conclusões a partir de dados confiáveis. • Analisar a taxa de variação de uma variável a partir de dados coletados em pesquisas, utilizando-a para modelar situações e fazer inferências. • Utilizar progressões aritméticas para modelar uma relação, entre variáveis discretas, que sugira uma função afim. • Fazer inferências e tirar conclusões acerca de nossa sociedade com base em dados confiáveis, o que auxilia na compreensão de realidades complexas.	• Os projetos propostos permitem aos alunos colocar em ação de forma articulada as habilidades trabalhadas nos capítulos deste volume.	Gerais: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 Matemática e suas Tecnologias: 1, 2, 3, 4 e 5 EM13MAT101 EM13MAT102 EM13MAT104 EM13MAT202 EM13MAT302 EM13MAT401 EM13MAT501 EM13MAT507 EM13MAT510

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Enkel/Shutterstock.com

SUMÁRIO

UNIDADE 1 **Função afim** 10

1. Grandezas diretamente proporcionais 12

Aproveitando a oportunidade:

Regra de três 20

2. Função linear 22

Características da função linear 23

Gráfico da função linear 24

Taxa de variação da função linear 25

Função identidade 28

3. Função polinomial do 1º grau 29

Termo independente na função do 1º grau 30

Jonathan Kitchen/Photodisc/Getty Images

4. Função afim 32

Classificações da função afim 32

Função constante 32

Funções definidas por mais de uma sentença 33

Aproveitando a oportunidade:

Módulo de uma função afim 36

Atividades finais 38

UNIDADE 2 **Progressão aritmética, funções e sistemas lineares** 42

1. Sequências numéricas 44

[illegible] 45

[illegible] métricos 46

Lei de formação de uma sequência 49

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

GREG WOOD / AFP

2. Progressão aritmética 52

Termo geral de uma progressão aritmética 53

Progressão aritmética e outras relações 56

Propriedades de uma progressão aritmética 56

Juros simples e progressão aritmética 59

Funções e progressão aritmética 60

Soma dos termos de uma progressão aritmética 62

3. Funções e inequações 65

Estudo dos sinais de uma função do 1º grau 67

Resolução de inequações do 1º grau 70

4. Sistemas lineares 74

Resolução de um sistema de equações lineares 79

Atividades finais 84

UNIDADE 3

Raciocínio lógico e tratamento da informação 86

1. Pensamento computacional 88

Algoritmos e fluxogramas 89

Aproveitando a oportunidade:
Introdução à programação 95

2. Tabelas e gráficos estatísticos 96

Análise e construção de tabelas e gráficos 97

Cuidados com as informações nos gráficos 106

Os índices socioeconômicos 109

Outros índices importantes 113

Atividades finais 116

Tom Vieira Freitas/Fotoarena

CONEXÕES & PROJETOS

Organizar e transmitir informações 118

kan_chana/Shutterstock.com

Projeto 1

Uma maneira inteligente de informar 120

Projeto 2

O indígena e o censo demográfico brasileiro 123

Caixa de ferramentas 126

Gabarito 153

Competências gerais da BNCC 154

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC 154

Referências 158

Referências complementares 160

Jouke van Keulen/Shutterstock.com

UNIDADE 1

Jonathan Kitchen/Photodisc/Getty Images

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

FUNÇÃO AFIM

Nesta unidade, você vai:

- estudar o raciocínio proporcional e aplicá-lo em situações cotidianas em que existe proporcionalidade direta;
- conhecer a função linear e relacionar sua taxa de variação com a proporção direta entre grandezas;
- entender quais situações podem ser modeladas por meio de uma função afim;
- utilizar procedimentos algébricos e gráficos para resolver problemas envolvendo a função afim.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

Fotografia de bonecas Matrioscas. No Brasil, são chamadas bonecas russas.

Ideia de semelhança

As bonecas representadas na imagem são matrioscas, também conhecidas como *babushkas*. O termo **matriosca** é uma referência a Matriona – nome feminino comum na Rússia por volta do século XIX. A tradução para Matriona seria Maria, e o nome se refere à maternidade. Já o termo ***babushka***, como são conhecidas na Sérvia, significa "avozinha". Essas bonecas vêm na maior parte das vezes em conjuntos de 6 ou 7 peças que se encaixam uma dentro da outra. Por essa construção, seu significado remete ao poder da mulher, do matriarcado e da expansão.

Observando a imagem, você consegue prever qual será o tamanho da próxima boneca? Se você respondeu que sim, é porque está utilizando, mesmo que de forma intuitiva, o conceito de semelhança. Sempre que vemos duas figuras com formas idênticas, mas com tamanhos diferentes, é o raciocínio proporcional que nos possibilita chamá-las de semelhantes. Além de atestar a semelhança, esse raciocínio, que utiliza a ideia de taxa de variação, propicia prever o que aconteceria se continuássemos aumentando a figura para além do tamanho da maior ou diminuindo para aquém do tamanho da menor.

1. Sabendo que a menor figura tem 1 cm de altura por 0,4 cm de largura e a maior figura tem 23 cm de altura, qual será sua largura? 9,2 cm

2. Sabendo a altura da menor (1 cm) e da maior (23 cm), é possível descobrir a altura de todas as outras bonecas. Qual é a diferença em cm entre a altura de uma boneca e a altura da boneca seguinte? 2 cm

3. Se você fosse criar novas bonecas maiores com base nessas, aumentando o tamanho da coleção, como utilizaria a resposta do item 2 para descobrir a altura das próximas bonecas? Você acha que é possível escrever uma fórmula que determine a altura da maior boneca dessa nova coleção sabendo o número total de bonecas?

3. Sim. A altura de cada boneca é igual à altura da boneca anterior acrescida de 2 cm.

A fórmula seria $H = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1$, sendo H a altura de uma boneca qualquer e n seu número de ordem na sequência. Particularmente, sendo n o número de bonecas na coleção, H é a altura da maior boneca, mas os estudantes terão maior autonomia para deduzir essas relações após avançarem na unidade.

1 Grandezas diretamente proporcionais

Na BNCC

Nesta unidade você vai trabalhar as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias 1, 3, 4 e 5 e as habilidades EM13MAT101, EM13MAT302, EM13MAT401, EM13MAT404, EM13MAT501, EM13MAT510.

As bonecas matrioscas que aparecem na abertura são apenas um dos inúmeros exemplos em que há o raciocínio proporcional. A ideia de proporção e de taxa de variação estão presentes em quaisquer situações de ampliação ou redução de figuras semelhantes, mas não apenas nelas: utilizamos essa ideia quando comparamos grandezas, calculamos porcentagens, fazemos medidas etc.

Quando lidamos com duas grandezas que crescem proporcionalmente, dizemos que essas grandezas são diretamente proporcionais. Compreender como esse crescimento se comporta algebricamente é a base para entender o tema desta unidade.

Veja a reportagem a seguir.

SP registra em março mais de 90% do volume de chuva esperado para o mês, diz Prefeitura

Prefeitura criou comitê de crise que vai cadastrar e atender famílias que tiveram perdas nas áreas atingidas; 'Situação é absolutamente imprevisível e extraordinária', diz Tuma.

Por Bárbara Muniz Vieira, G1
11/03/2019 13h24

A Prefeitura de São Paulo disse, nesta segunda-feira (11), que a cidade acumula desde o dia 1º de março mais de 90% do total esperado para o mês inteiro (160 mm).

Em março, até as 7 h da manhã desta segunda, choveu na cidade 160,8 mm – isso equivale a 90,6% da média esperada para todo o mês, que é de 177,4 mm. Entre as 19 h deste domingo (10), quando começou a chuva mais intensa, até as 7 h desta segunda, choveu 57,8 mm, volume correspondente a 32,6% da média esperada para março.

Em entrevista coletiva, o prefeito em exercício [...] havia afirmado inicialmente que, em uma única noite, choveu 80% do esperado para o mês. A assessoria da Prefeitura, no entanto, corrigiu os números afirmando que, na verdade, choveu no acumulado de março 160 mm da média mensal de 177,4 mm.

Tuma classificou a situação ocorrida na noite deste domingo como "absolutamente imprevisível e extraordinária". "Não havia qualquer ação preventiva que pudesse corrigir o que aconteceu hoje."

VIEIRA, Bárbara M. SP registra em março mais de 90% do volume de chuva esperado para o mês, diz Prefeitura. *G1*, *São Paulo*, 11 mar. 2019. Disponível em: https://g1.globo.com/sp/sao-paulo/noticia/2019/03/11/choveu-em-uma-noite-80-esperado-para-o-mes-diz-prefeito-em-exercicio-de-sp-eduardo-tuma.ghtml. Acesso em: 22 maio 2020.

Bruno Rocha/Fotoarena

Carros encobertos pela água na Av. Presidente Wilson, zona leste, São Paulo, 11 mar. 2019.

O texto compara o volume de chuvas esperado para março e o volume de chuvas já registrado nos dez primeiros dias do mês. Os números auxiliam o leitor a entender a gravidade da situação, estabelecendo relações e tirando conclusões. Assim, ao lermos um texto jornalístico como esse, é essencial termos um olhar crítico sobre as informações para que não sejamos induzidos a erros ou más interpretações. Uma análise cuidadosa das grandezas apresentadas no texto pode auxiliar nesse olhar.

Para pensar e discutir Orientações no Manual do Professor.

1. Sobre o que trata a reportagem?
2. Ao ler apenas o título, é possível compreender a gravidade da situação? Justifique sua resposta.
3. O subtítulo da reportagem diz que a prefeitura criou um comitê de crise para lidar com a situação. Quais informações do texto você acha que são relevantes para justificar o fato de a situação ser considerada uma crise?
4. Segundo o texto do subtítulo, o prefeito em exercício, Romeu Tuma, teria dito que a "situação é absolutamente imprevisível e extraordinária". Lendo a reportagem, você concorda com ele? Justifique sua resposta
5. Você reparou que a unidade de medida utilizada pela reportagem para representar o volume de chuvas não é uma unidade comumente utilizada para medir volumes? Você sabe por que essa unidade é utilizada?
6. Como você explicaria o que significa 160 milímetros de chuva? E como explicaria a frase "choveu 90% do volume esperado para o mês"?

Quando utilizamos o milímetro (mm), que é uma medida de comprimento, para representar a medida de chuvas, estamos informando a altura que a quantidade de água precipitada teria atingido em cada metro quadrado da cidade. Para analisar melhor essa situação, é preciso lembrar-se da relação entre milímetros (mm) e metros (m) e entre metros cúbicos (m^3) e litros (L).

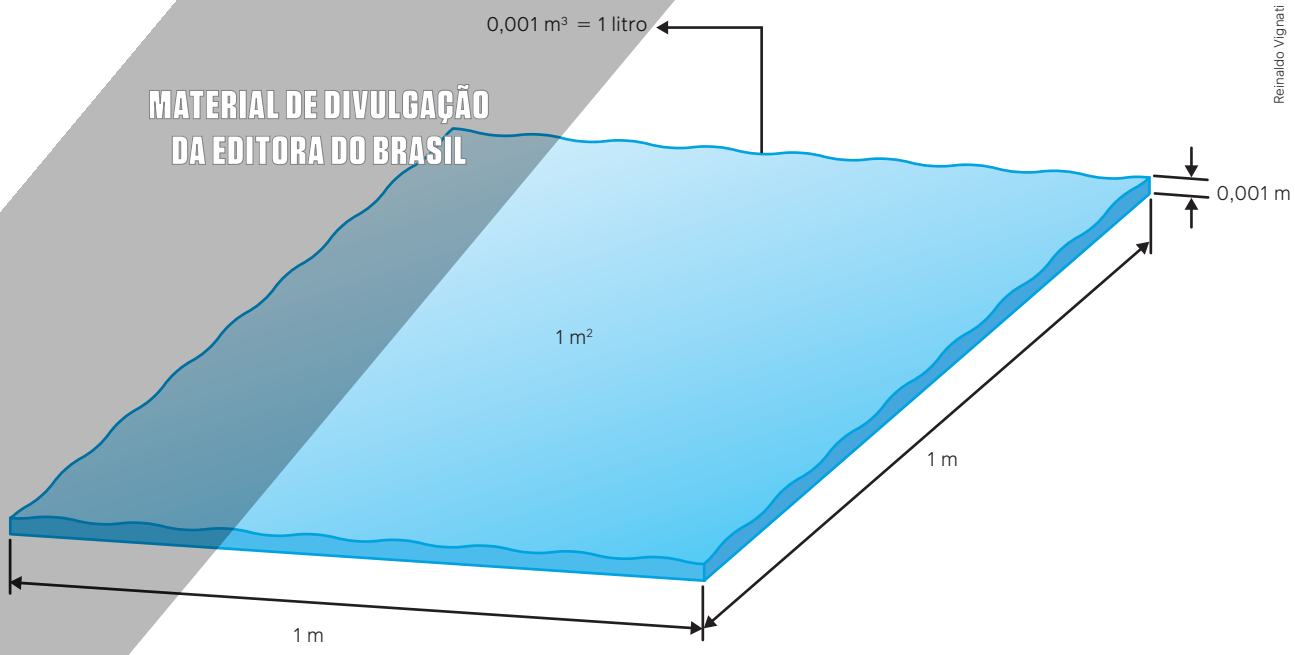
Na análise dessa reportagem, usaremos as seguintes relações entre **unidades de medida**:

$$1\ L = 0{,}001\ m^3$$

$$1\ mm = 0{,}001\ m$$

Para entender melhor essas transformações consulte o tópico **Unidades de medida** na **Caixa de ferramentas**.

Considerando então que há uma coluna de água de 0,001 m de altura sobre uma superfície de 1 m^2, temos, sobre essa superfície, um volume de 0,001 m^3 ou 1 L.



Reinaldo Vignati

Nota-se então que 1 mm de chuva é o mesmo que 1 L/m^2 (lê-se litro por metro quadrado), ou seja, 1 litro de água precipitada para cada metro quadrado da região.

Para explorar

Reúna-se com mais dois colegas para discutir as questões a seguir.

Vejam no texto qual foi a medida das chuvas que caíram do início do mês até às 7 h da manhã do dia 11/03/2019.

1. Utilizando a análise feita sobre a unidade de medidas de chuva, qual foi, em litros, o volume de chuva por metro quadrado na cidade de São Paulo nesse período? 160 litros
2. Qual volume de chuva, em litros, teria se precipitado sobre uma área de 5 m^2 em São Paulo nesse período? 800 litros
3. Qual operação vocês utilizaram para responder à questão 2? Explique por que utilizaram essa operação. Resposta no Manual do Professor.
4. Utilizando esse mesmo procedimento e supondo que a chuva tenha se distribuído uniformemente sobre a cidade, complete a tabela a seguir para determinar o volume em litros de água que caiu em cada região. Considere que 1 km^2 = 1 000 000 m^2. Resposta no Manual do Professor.

Zona	Área	Cálculo	Volume de água
Leste	380,7 km^2		
Norte	296 km^2		
Oeste	128 km^2		
Sul	607 km^2		

5. Considere as informações da reportagem:
   - em março, até as 7 h da manhã desta segunda (11/03), choveu na cidade 160,8 mm;
   - entre as 19 h deste domingo (10/03), quando começou a chuva mais intensa, até as 7 h desta segunda, choveu 57,8 mm;
   - a média mensal para o mês de março é de 177,4 mm.

   Com base nesses dados, determine em porcentagem a razão (resultado da divisão) entre:

   a) o total de chuvas até a manhã do dia 11 e a média mensal de chuvas em março;

   b) o total de chuvas durante a noite de domingo até a madrugada de segunda e a média de chuvas em março;

   c) o total de chuvas durante a noite de domingo até a madrugada de segunda e o total de chuvas até a manhã do dia [illegible]

   a) $\frac{160,8}{177,4}$ ≅ 0,91 ou 91% b) $\frac{57,8}{177,4}$ ≅ 0,33 ou 33% c) $\frac{57,8}{160,8}$ ≅ 0,36 ou 36%

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

6. Ainda com [illegible] questão anterior, responda as questões a seguir.
   a) As porcentagens apresentadas na reportagem estão corretas? Sim.
   b) Qual foi a informação errada dada pelo prefeito em exercício durante a entrevista coletiva? Qual seria a informação correta? Resposta no Manual do Professor.

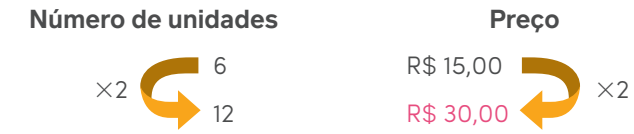
Utilizamos a proporcionalidade em inúmeras situações cotidianas, de modo muitas vezes intuitivo. Por exemplo, se determinado produto é vendido em embalagens de três unidades, é intuitivo pensarmos que para ter 6 produtos é preciso comprar 2 embalagens. Além disso, se a embalagem custa R$ 4,00, é também intuitivo pensarmos que 2 embalagens custarão R$ 8,00, caso não haja um desconto.

Esse raciocínio imediato acontece principalmente porque a proporção está relacionada com duas operações básicas da matemática: a multiplicação e a divisão. Vamos analisar um pouco mais essa situação. Para cada um dos exemplos a seguir considere a mesma informação abaixo:

> Seis unidades de determinado produto são vendidas por R$ 15,00.

Exemplo 1

Qual é o preço de 12 unidades desse produtos?



Sabendo que 12 é o dobro de 6, basta observarmos que, quando duplicamos a quantidade de produtos, devemos duplicar também o preço: $15{,}00 \cdot 2 = 30{,}00 \Rightarrow$ R$ 30,00.

Poderíamos também ter observado que cada produto custa R$ 2,50 ($15 : 6 = 2{,}5$). Logo, 12 produtos custariam R$ 30,00 ($12 \cdot 2{,}5 = 30$).

Em ambos os casos, a operação só pode ser feita porque sabemos que a razão "preço por unidade" é uma constante (no caso, 2,5). Dessa forma, as variáveis preço e quantidade de produtos são diretamente proporcionais.

Exemplo 2

Se eu gastei R$ 45,00 em produtos iguais a esse, quantas unidades eu comprei?

Sabendo que R$ 45,00 é o triplo de R$ 15,00, basta observarmos que, quando triplicamos o preço, devemos triplicar também a quantidade de produtos: $6 \cdot 3 = 18$.

Nesse caso, também poderíamos ter observado que com um real é possível comprar $6 : 15 = 0{,}4$ (40%) de um produto – ou seja, a razão "produto por real" é 0,4. Assim, com 45 reais posso comprar $45 \cdot 0{,}4 = 18$ produtos.

Exemplo 3

Vamos ver como podemos descobrir o preço a ser pago por 9 unidades desse produto.

- Note que esse caso é um pouco mais complexo, uma vez que 9 não é múltiplo de 6.
- Podemos observar que $9 : 6 = 1{,}5$.
- Como 9 é 1,5 · 6, então o preço será $1{,}5 \cdot 15 = 22{,}5 \Rightarrow$ R$ 22,50.
- Podemos observar que o preço por unidade é $15 : 6 = 2{,}5 \Rightarrow$ R$ 2,50;
- logo, o preço de 9 unidades será $9 \cdot 2{,}5 = 22{,}5 \Rightarrow$ R$ 22,50.
- Podemos observar que a razão "unidade do produto por real" é 0,4.
- Assim, para comprar 9 unidades, é preciso de $9 : 0{,}4 = 22{,}5 \Rightarrow$ R$ 22,50.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

A **razão** entre dois valores é dada pela divisão entre eles, representada como operação, fração ou notação decimal. Quando duas grandezas variam juntas, podemos observar que a razão entre os respectivos valores ***x*** e ***y*** das grandezas é sempre a mesma.

Dizemos que duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando há uma razão constante que determina a relação entre elas. Assim:

x e y são diretamente proporcionais se, para todo $x \neq 0$, $\frac{y}{x} = k$, em que k é uma constante real.

Note que, sendo k uma constante, $\frac{1}{k}$ também será. Assim, podemos escrever tanto a razão $x : y$ (x para y) quanto a razão $y : x$ (y para x), dependendo do que for mais interessante no contexto.

Além disso, uma consequência direta da definição é o fato de que, se y é diretamente proporcional a x, então $y = k \cdot x$ para algum $k \in \mathbb{R}$.

Para explorar

Reúna-se com um colega e, juntos, releiam atentamente os exemplos e elaborem um problema usando os mesmos dados iniciais (15 reais por 6 produtos). Esse problema deve ser resolvido por proporcionalidade. Expliquem passo a passo como vocês o resolveriam. Resposta pessoal.

Vamos ver algumas formas de atestar a existência de proporcionalidade entre duas grandezas.

I. A razão entre as grandezas é explicitada no contexto. Por exemplo:

IBGE: 11,8% de jovens entre 15 e 17 anos está fora da escola

49% da população de 25 a 64 anos não completou o ensino médio; entre membros da OCDE, resultado é um dos piores

AMORIM, D.; NEDER, V. IBGE: 11,8% de jovens entre 15 e 17 anos está fora da escola. *Terra Economia*, São Paulo, 6 nov. 2019. Disponível em: https://www.terra.com.br/economia/ibge-118-de-jovens-entre-15-e-17-anos-esta-fora-da-escola,caccc83faa267f3e7afcbddf7dca853cw0q6wypg.html. Acesso em: 22 maio 2020.

Nesse caso as variáveis são o número de jovens entre 15 e 17 anos fora da escola e o número de jovens dessa faixa etária. A razão é 11,8% ou 0,118. Em outras palavras, a cada 1000 jovens temos uma média de 118 fora da escola.

Mauro Salgado

II. A relação entre as grandezas é deduzida com base no contexto. Veja um exemplo na imagem ao lado.

Nesse caso, as variáveis são a quantidade de embalagens (em unidades) e o valor do prêmio (em reais). Pelo contexto, podemos considerar que a cada conjunto de 9 embalagens é possível ganhar R$ 250,00. A razão pode ser $\frac{9}{250} = 0{,}036$ (unidades por real) ou $\frac{250}{9} \cong 27{,}78$ (reais por unidade).

III. A relação entre as grandezas é dada pela razão entre duas unidades. Veja como exemplo o frasco abaixo.

A unidade mg/g indica uma razão constante. Nesse caso, as variáveis são a massa do princípio ativo (em miligramas) e a massa total do comprimido (em gramas). Como a razão é 26,67 mg/g, cada grama do remédio contém 0,2667 gramas de *Ferrum sidereum*.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Uma vez verificada a existência de proporcionalidade, é possível utilizar a razão entre as grandezas a fim de resolver diversos problemas. Para isso, é essencial saber organizar os dados e compreender o significado da razão. Veja a seguir.

Mauro Salgado

Exemplo

O soro caseiro é uma mistura de água, sal e açúcar, usada para resolver problemas de desidratação. A proporção entre sal e açúcar nesse composto é de 1 : 6.

Suponha que, a uma determinada quantidade de soro, foram acrescentados mais 400 mL de água e algumas colheres pequenas de sal e açúcar, mantendo a proporção original entre os três elementos e ficando com o total de 18 colheres de açúcar.

Sabendo que cada colher de sal ou de açúcar tem em torno de 3,5 g, e que a mistura original tinha 200 mL, podemos descobrir a concentração do soro.

Basta notar primeiro que a quantidade de colheres de sal é um sexto de 18, ou seja, 3. Se o soro tem agora 600 mL e originalmente tinha um terço disso, então tinha 7 colheres, totalizando 24,5 g em 200 mL ou 0,1225 g/mL.

Atividades

1. Determine as razões pedidas em cada caso a seguir.

a) A velocidade média em quilômetros por hora, de um automóvel que percorre 200 km em 2h30min. 80; 80 km/h

b) A densidade em gramas por cm^3 de um sólido de 0,01 m^3 que tem 500 g de massa. 0,05 g/cm^3

2. Ao abastecer o carro em um posto de gasolina, o motorista notou que com R$ 79,00 foi possível comprar exatamente 20 litros de gasolina. Complete a tabela abaixo com os preços para cada quantidade de litros de combustível.

Preço	Litros
	5
	10
	20
	30
	40
	45
	55

Preço
R$ 19,75
R$ 39,50
R$ 79,00
R$ 118,50
R$ 158,00
R$ 177,75
R$ 217,25

3. Observe as promoções a seguir. No caso da marca A, temos uma promoção em que se paga por 15 rolos e levam-se 16. Cada rolo tem 30 m. No caso da marca B, paga-se por 11 rolos e levam-se 12. Cada rolo tem 50 m.

Marca A

Preço da embalagem: R$ 22,50.

Marca B

Preço da embalagem: R$ 27,50.

Ilustrações: Mauro Salgado

Em qual das promoções o preço por metro é menor?
Marca A: 0,046875 reais por metro. Marca B: 0,0458333... reais por metro. A marca B é mais barata.

4. (Enem) Nos *shopping centers*, costumam existir parques com vários brinquedos e jogos. Os usuários colocam créditos em um cartão, que são descontados por cada período de tempo de uso dos jogos.

Dependendo da pontuação da criança no jogo, ela recebe um certo número de tíquetes para trocar por produtos nas lojas dos parques.

Suponha que o período de uso de um brinquedo em certo *shopping* custa R$ 3,00 e que uma bicicleta custa 9 200 tíquetes.

Para uma criança que recebe 20 tíquetes por período de tempo que joga, o valor, em reais, gasto com créditos para obter a quantidade de tíquetes para trocar pela bicicleta é Alternativa **d**.

a) 153.

b) 460.

c) 1218.

d) 1380.

e) 3066.

Para que serve e o que é o sistema de cotas nas universidades?

Leia os textos a seguir e responda às questões 1, 2 e 3.

Texto 1

A política pública de cotas em universidades, desempenho acadêmico e inclusão social

O sistema de cota fixa é um tipo de ação afirmativa, através do qual, em um processo competitivo por bens sociais, reserva-se um percentual de vagas para os membros de um determinado grupo social (ANDREWS, 1997).

No início do século XXI, a política de ação afirmativa, introduzida no cenário educacional brasileiro, que mais tem gerado debates é a do sistema de cotas para o ingresso de negros nas universidades federais, sendo a Universidade do Estado do Rio de Janeiro a primeira a introduzir tal sistema no Vestibular de 2002. [...]

Diversas organizações se mobilizaram para enfrentar esta realidade, com medidas de ação afirmativa que estão gerando alguns mitos e refutações, dentre os quais podem-se citar alguns (CEPAL, 2007):

– O sistema de reservas de cotas é inconstitucional, por não atender ao princípio de igualdade da Constituição Brasileira. Logo, a Constituição consagra, unicamente, a igualdade formal e não aquela que deve garantir igualdade de oportunidades. As políticas de afirmação de direitos, portanto, não se fixam no que preceitua a Constituição Brasileira;

– As cotas subvertem o princípio do mérito acadêmico, sendo este, para alguns, o único requisito que deve ser contemplado para o acesso à Universidade. Já, na visão de outros, o mérito acadêmico reflete as profundas desigualdades da sociedade brasileira, uma vez que as oportunidades sociais ampliam e multiplicam as oportunidades educativas. Por conseguinte, as políticas públicas de reparo dessas injustiças são um imperativo ético;

BEZERRA, Teresa Olinda Camila; GURGEL, Cláudio. A política pública de cotas em universidades, desempenho acadêmico e inclusão social. *Sustainable Business International Journal*, [*s. l.*], n. 9, p. 8, ago. 2011.Disponível em: https://periodicos.uff.br/sbijournal/article/view/10187/7076. Acesso em: 10 jul. 2020.

Texto 2

Ações afirmativas nas universidades brasileiras: uma questão política, um desafio pedagógico

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

O termo *Ação Afirmativa* refere-se a um conjunto de políticas públicas para proteger minorias e grupos que, em uma determinada sociedade, tenham sido discriminados no passado. A ação afirmativa visa remover barreiras, formais e informais, que impeçam o acesso de certos grupos ao mercado de trabalho, universidades e posições de liderança. Em termos práticos, as ações afirmativas incentivam as organizações a agir positivamente a fim de favorecer pessoas de segmentos sociais discriminados a terem oportunidade de ascender a postos de comando. Nessa perspectiva, a sub-representação de minorias, em instituições e posições de maior prestígio e poder na sociedade pode ser considerada um reflexo de discriminação. Portanto, visa-se, por um período provisório, a criação de incentivos aos grupos minoritários, que busquem o equilíbrio entre os percentuais de cada minoria na população em geral e os percentuais dessas mesmas minorias na composição dos grupos de poder nas diversas instituições que fazem parte da sociedade. [...]

Sergio Ranalli/Pulsar Imagens

Estudantes se concentram em local de prova para prestar segunda fase de vestibular. Londrina (PR), 2019.

OLIVEN, Arabela Campos. Ações afirmativas, relações raciais e política de cotas nas universidades: uma comparação entre os Estados Unidos e o Brasil. *Revista Educação*, Porto Alegre: PUC-RS, v. 30, n. 61, p. 30, jan./mar. 2007. Disponível em: https://www.redalyc.org/pdf/848/84806103.pdf. Acesso em: 23 maio 2020.

Texto 3

Pela primeira vez, negros são maioria nas universidades públicas

A taxa de ingresso no Ensino Superior, por outro lado, ainda é menor que a da população branca

A pesquisa "Desigualdades Sociais por Cor ou Raça no Brasil", divulgada pelo IBGE nesta quarta (13), mostra que, pela primeira vez, o índice de alunos pardos e negros matriculados em universidades públicas brasileiras superou a taxa de alunos brancos, alcançando 50,3%.

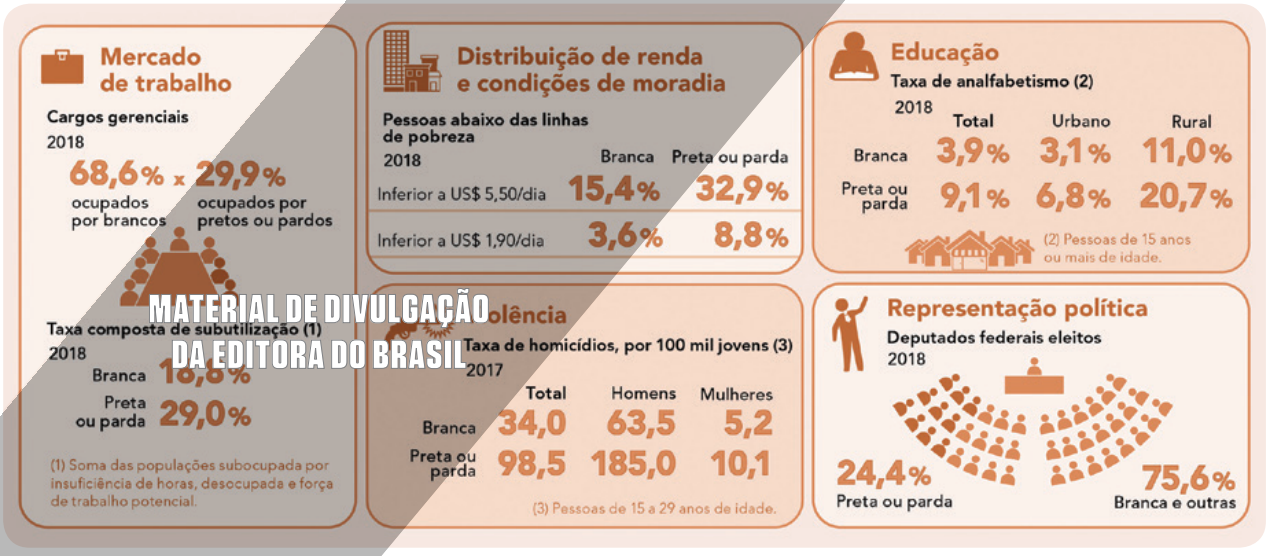
O estudo também aponta que outras taxas educacionais melhoraram entre a população negra desde 2016, como a diminuição do abandono escolar e o aumento do ingresso no Ensino Superior. No entanto, quando se compara esses números com os índices da população branca, a desigualdade racial continua latente.

A partir das pesquisas feitas durante o ano de 2018, o IBGE apontou que 78,8% dos jovens brancos entre 18 e 24 anos estão no Ensino Superior. Entre os negros na mesma faixa etária, essa porcentagem cai para 55,6%. A taxa de conclusão do Ensino Médio dessa parcela da população apresentou uma melhoria desde 2016 – de 58,1% para 61,8% – mas também continua menor do que de brancos (76,8%).

É importante pontuar também que negros e pardos representam 55,8% da população brasileira e, portanto, por mais que sejam maioria nas universidades públicas, ainda estão proporcionalmente sub-representados.

ILHÉU, Thaís. Pela primeira vez, negros são maioria nas universidades públicas. *Guia do Estudante*, [São Paulo], 14 nov. 2019. Disponível em: https://guiadoestudante.abril.com.br/universidades/pela-primeira-vez-negros-sao-maioria-nas-universidades-publicas/. Acesso em: 23 maio 2020.

Resultado da pesquisa "Desigualdades sociais por cor ou raça no Brasil"



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

IBGE. Desigualdades sociais por cor ou raça no Brasil. *Estudos e pesquisas*. Rio de Janeiro: IBGE, n. 41, p. 1, 2019. Disponivel em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101681_informativo.pdf. Acesso em: 23 maio 2020.

1. De acordo com o texto 2, negros e pardos "por mais que sejam maioria nas universidades públicas, ainda estão proporcionalmente sub-representados". Com base na ideia de proporcionalidade estudada até aqui, explique essa afirmação. Resposta pessoal.
2. Escreva um parágrafo explicando como o pensamento proporcional e o uso de dados estatísticos como os apresentados pelo IBGE no texto 3 podem servir de subsídio para argumentações qualitativas acerca de discriminações e preconceitos como as apresentadas no texto 1. Resposta pessoal.
3. Elabore uma questão para seu colega responder usando os dados do texto 3. Você responde à questão que ele vai elaborar e depois, juntos, discutem as respostas.
Resposta pessoal.

Regra de três

Uma forma de resolver problemas que envolvem a proporcionalidade é a regra de três, que tem esse nome por ser uma técnica para resolução de problemas com grandezas proporcionais em que são apresentadas três informações e é solicitada uma quarta. Essa regra serve para quaisquer relações de proporcionalidade, sejam elas diretas ou inversas.

Grandezas inversamente proporcionais

A proporcionalidade direta não é a única relação entre duas grandezas que envolve apenas multiplicações e divisões. Quando uma grandeza diminui à mesma proporção que a outra aumenta, dizemos que essas grandezas são inversamente proporcionais. Assim, se x e y são inversamente proporcionais e o valor de x duplica, então o valor de y será reduzido à metade.

Dizemos que duas grandezas são **inversamente proporcionais** quando há um produto constante que determina a relação entre elas. Assim:

x e y são inversamente proporcionais se, para todo x, $x \cdot y = k$, onde k é uma constante real não nula.

Exemplo

Consideremos todos os retângulos de área 24 cm². Sendo x a largura e y o comprimento desses retângulos, nota-se que, se $x = 1$ cm, $y = 24$ cm. Se duplicamos o valor de x para 2 cm, y passa a medir metade de 24, ou seja, 12 cm. Se reduzimos o valor de y a um terço do original, temos $y = 8$ cm e $x = 3$ cm, que é o triplo do valor original. De fato, para todo x, temos $x \cdot y = 24$.

Regra de três simples

A regra de três simples é a que utilizamos para resolver problemas quando há apenas duas grandezas envolvidas. A utilização dessa técnica demanda uma organização clara dos dados apresentados, que de modo geral pode ser feita no formato de **tabela de dupla entrada**. Se temos a informação de que duas grandezas são diretamente proporcionais à razão $a : b$ e temos um valor c dado para a segunda grandeza, podemos descobrir o valor que falta assim:

Grandeza 1	Grandeza 2
a	b
x	c

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- Sabemos que há uma razão constante k tal que $a : b = k$.
- Essa deve ser também a razão entre x e c, ou seja, $x : c = k$.
- Logo, se $x : c = k$, então $x = k \cdot c$.

A vantagem da organização dos dados na forma de tabela é que torna possível estabelecer diversas relações entre as grandezas. Por exemplo, se $c : b = k'$, então $x : a = k'$ e $x = k' \cdot a$. De modo geral, independentemente das relações encontradas, é possível concluir que $\boldsymbol{a \cdot c = b \cdot x}$ (chamamos essa operação de **multiplicação cruzada**). Para que isso funcione, entretanto, é preciso garantir que o valor que se quer descobrir esteja alinhado tanto com sua grandeza (x e a são valores da mesma grandeza) quanto com o valor respectivo da outra grandeza (x está para c à mesma razão em que a está para b).

Para utilizar a **regra de três** deve-se:

- organizar os dados na forma de tabela de dupla entrada, garantindo que o valor que se quer descobrir esteja alinhado corretamente;
- fazer a multiplicação cruzada para elaborar uma equação que possa ser resolvida, determinando o valor desconhecido.

Exemplo

Considere a manchete a seguir:

2 em cada 5 paulistanos não leram nenhum livro nos últimos três meses

Pesquisa "Viver em São Paulo: Cultura" aborda hábitos de leitura na cidade. Falta de tempo e cansaço são motivos apontados pelos entrevistados

SILVA, Eduardo. 2 em cada 5 paulistanos não leram nenhum livro nos últimos três meses. *32x SP*, São Paulo, 2 maio 2019. https://32xsp.org.br/2019/04/09/2-em-cada-5-paulistanos-nao-leram-nenhum-livro-nos-ultimos-tres-meses/. Acesso em: 23 maio 2020.

Para descobrir aproximadamente quantos paulistanos não leram nenhum livro nos últimos três meses considerando uma estimativa de que havia cerca de 12 milhões de habitantes na cidade em 2018 (ano da pesquisa que gerou os dados da notícia), vamos organizar as informações e utilizar a regra de três:

Total de paulistanos	Paulistanos que não leram livros
5	2
12000000	x

- Utilizando a multiplicação cruzada: $5x = 2 \cdot 12000000 = 24000000$
- Resolvendo a equação: $x = 24 : 5 = 4800000$

Note que podemos entender também que $2 : 5 = 0{,}4$ ou 40%, que é a razão entre as grandezas. Fazendo $0{,}4 \cdot 12000000 = 4800000$, obtemos a resposta sem utilizar a técnica da regra de três.

Regra de três composta

Utilizamos a regra de três composta quando, em uma mesma situação, lidamos com mais de duas grandezas que variam e que mantêm alguma proporcionalidade entre si, seja direta, seja inversa. Nesses casos, a organização das grandezas para a utilização da regra de três tem uma etapa a mais: além de colocar as grandezas na tabela, é preciso determinar a grandeza cujo valor se quer definir como sendo aquela que servirá de referência para determinar se as multiplicações serão diretas ou cruzadas. Veja nos exemplos a seguir.

Exemplo 1

A bula de determinado remédio infantil recomenda 3 gotas para cada 2 kg de massa corporal da criança, ministradas de 8 em 8 horas. Uma criança de 14 kg que tomar esse remédio corretamente por 3 dias terá tomado quantas gotas?

	Grandeza de referência	Diretamente proporcional à referência	Diretamente proporcional à referência
	Gotas	Massa (kg)	Horas
Situação 1	3	2	8
Situação 2	x	14	$3 \cdot 24 = 72$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Devemos fazer a multiplicação cruzada da primeira coluna com as duas colunas seguintes:

$x \cdot 2 \cdot 8 = 3 \cdot 14 \cdot 72 \Rightarrow 16x = 3024 \Rightarrow x = 3024 : 16 = 189 \Rightarrow x = 189$ gotas

Exemplo 2

Três torneiras idênticas abertas durante 10 horas enchem uma piscina. Quantas horas 5 torneiras com a mesma vazão demorarão para encher 2 piscinas?

	Inversamente proporcional à referência	Grandeza de referência	Diretamente proporcional à referência
	Torneiras	Horas	Piscina
Situação 1	3	10	1
Situação 2	5	x	2

Devemos fazer a multiplicação direta da primeira coluna com a segunda e a multiplicação cruzada com a coluna seguinte:

$$5 \cdot x \cdot 1 = 3 \cdot 10 \cdot 2 \Rightarrow 5x = 60 \Rightarrow x = 60 : 5 = 12 \Rightarrow x = 12 \text{ horas}$$

2 Função linear

Digital Vision/Getty Images

Observar a média de gastos mensais com combustível possibilita estimar o consumo de um carro em relação à quantidade de quilômetros rodados.

Sempre que duas variáveis representam grandezas diretamente proporcionais é possível estabelecer uma relação de dependência entre elas. Sabemos que, na Matemática, sempre que possível utilizamos funções para modelar essas relações de dependência. Para introduzir a função que estudaremos a seguir, vamos analisar a seguinte situação:

Karina vai viajar com dois amigos em seu carro. Antes do início da viagem, os três foram abastecer o tanque de combustível para que pudessem dividir o valor entre eles. Antes de chegar ao posto, Karina tinha anotado alguns dados sobre seu veículo a fim de fazer uma previsão de gastos para a viagem.

Veja a seguir algumas anotações de Karina:

	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio	Junho
Quantidade aproximada de quilômetros rodados no mês	1978	1932	1702	1771	1679	1702
Quantidade aproximada de litros de gasolina consumidos no mês	172	168	148	154	146	148

Para pensar e discutir

1. Quantos quilômetros o carro de Karina fez por litro em cada mês? 11,5 km
2. Podemos dizer que a taxa de variação entre a quantidade de quilômetros rodados e a quantidade de litros de gasolina consumidos pelo carro de Karina é constante? Se sim, qual é o valor dessa taxa? Sim, 11,5 km/L.
3. Podemos dizer que os quilômetros e os litros de gasolina nesse contexto são diretamente proporcionais? Explique como chegou a essa conclusão. Resposta no Manual do Professor.
4. Quantos quilômetros o carro de Karina consegue rodar com o tanque cheio se a capacidade máxima do tanque é de 51 litros? 586,5 km
5. Escreva uma expressão algébrica que relacione a quantidade y de quilômetros que podem ser rodados com x litros de gasolina. $y = 11{,}5x$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para entender melhor esse conceito, consulte o tópico **A linguagem das funções** na **Caixa de ferramentas**.

Como sabemos, quando duas grandezas são diretamente proporcionais, a razão entre elas é constante. Isso significa que, conhecendo a essa razão, podemos escrever uma das grandezas em **função** da outra.

Exemplo

- Se um automóvel se desloca com uma velocidade constante de 50 km/h, podemos concluir que em uma hora ele se desloca 50 km, em duas horas ele se desloca 100 km, e assim por diante. De modo geral, sendo S o espaço percorrido e t o tempo gasto, podemos dizer que 50 : 1 é a razão entre S e t. Note também que a razão entre t e S é de 1 : 50.

  Usando essas razões, podemos dizer que $S(t) = 50t$ ou que $t(S) = \frac{1}{50}s = 0{,}02s$.

- Se o lado de um quadrado mede 1 cm, seu perímetro mede 4 cm. Se o lado mede 3 cm, o perímetro mede 12 cm. De modo geral, sendo ℓ a medida do lado e p a medida do perímetro de um quadrado qualquer, então a razão entre ℓ e p é 1 : 4. Note também que a razão entre p e ℓ é de 4 : 1.

  Usando essas razões, podemos dizer que $p(\ell) = 4\ell$ ou que $\ell(p) = \frac{1}{4}p = 0{,}25p$.

Vamos ver como essas funções podem ser classificadas.

Características da função linear

O exemplo anterior sugere que grandezas diretamente proporcionais podem ser escritas uma em função da outra na forma $f(x) = ax$. Às funções desse tipo damos o nome de **função linear**.

> Denominamos **função linear** as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma $f(x) = a \cdot x$ com $a \in \mathbb{R}$.
> Note que, na lei da função, x é a variável e a é uma constante, que chamamos de **coeficiente** da variável.

Vamos investigar essas funções.

Para pensar e discutir

Considere que, ao analisar uma situação em que há a variação de duas grandezas x e y, observa-se que o valor de y é sempre o dobro do de x.

1. Qual é a razão entre dois valores quaisquer de y e x? 2
2. Como x e y são diretamente proporcionais, é possível usar a notação $y = f(x) = ax$ para escrever y em função de x. Qual é o valor do coeficiente a dessa função? $y = f(x) = 2x$. Nesse caso, $a = 2$.
3. Com base no que você observou, elabore uma hipótese que indique a relação entre o coeficiente a de uma função linear e a razão entre as variáveis dessa função. Resposta pessoal.
4. Utilizando a definição de taxa de variação de grandezas diretamente proporcionais e a definição de função linear, tente demonstrar que sua hipótese é verdadeira. Resposta no Manual do Professor.

A função linear é o modelo matemático que usamos para representar as situações em que há proporcionalidade. Isso ocorre porque todas as funções desse tipo têm a seguinte característica:

> Dada uma função linear $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma $f(x) = ax$ com $a \in \mathbb{R}$, temos: $f(kx) = k \cdot f(x)$

Demonstração:
$f(x) = ax \Leftrightarrow f(kx) = a \cdot k \cdot x = k \cdot a \cdot x = k \cdot (ax) = k \cdot f(x)$.

Para explorar

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Em duplas, considerem a situação apresentada anteriormente e vejam a seguir as anotações de alguns outros dados sobre o carro de Karina e sobre a viagem que fará com os colegas.

- Quilômetros que o carro roda por litro de álcool, em média: 7,5 km/L
- Preço do álcool por litro no posto em que abasteceram: R$ 3,36
- Total de quilômetros da viagem de ida: 210 km
- Média de quilômetros rodados por dia: 60 km

Com base nessas informações, resolvam as questões:

1. Na viagem que farão, Karina e os dois amigos irão passar cinco dias em uma cidade com muitos museus e eventos culturais. Karina está prevendo rodar, durante os dias da viagem, uma média de quilômetros 20% maior do que roda normalmente por dia. Considerando a viagem de ida, os quilômetros rodados na cidade e a viagem de volta e sabendo que Karina pretende abastecer o carro com álcool e dividir a conta igualmente com os amigos, quanto cada um dos três irá gastar com combustível nessa viagem? R$ 116,48
2. Entre as anotações dadas sobre a situação descrita, várias são diretamente proporcionais. Utilizando essas anotações, cada um de vocês deve criar um problema que possa ser resolvido utilizando uma ou mais funções lineares. Troquem os problemas entre si e os resolvam. Em seguida, escrevam um parágrafo em que expliquem quais são os procedimentos necessários para resolver problemas como esses. Respostas pessoais.

Gráfico da função linear

Para entender melhor por que chamamos as funções do tipo $f(x) = ax$ de lineares, vamos observar como são seus gráficos.

Para explorar

Em duplas, sigam os passos do exercício abaixo.

- Escrevam a lei de formação de uma função linear qualquer.
- Calculem $f(0)$.
- Utilizando uma malha quadriculada, desenhem um plano cartesiano e marquem o ponto formado pelo par $(0; f(0))$.
- Escolham ao menos mais três valores para x e marquem outros pares ordenados nesse gráfico.

Respondam às questões:

1. O valor de $f(0)$ depende do valor do coeficiente a escolhido por vocês? Resposta no Manual do Professor.

2. Observando os pontos que vocês marcaram, é possível supor como é o gráfico de uma função linear? Escrevam um parágrafo elaborando uma hipótese sobre como deve ser o gráfico de uma função linear. Resposta pessoal.

3. Observem no gráfico ao lado os pontos A e B e respondam às questões:

a) Quais são as coordenadas $(x; y)$ do ponto B? (2; 3)

b) Qual é a razão $\frac{y}{x}$ de suas coordenadas? 3 : 2 = 1,5

c) Sendo $f(x)$ uma função linear que passa por B, qual é o valor do parâmetro a tal que $f(x) = ax$? $f(x) = 1{,}5x$, ou seja, $a = 1{,}5$

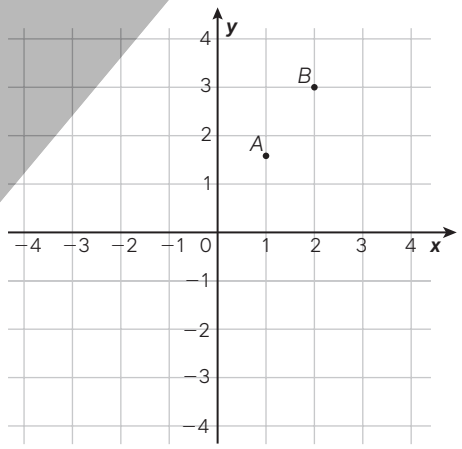
(Lembrem-se: se B pertence à função f, suas coordenadas satisfazem a igualdade da lei de formação da função.)

d) O ponto $A = (1; 1{,}5)$ pertence à função $f(x)$? Justifiquem a resposta. Sim, pois $f(1) = 1{,}5$.

e) O ponto $(3; 4)$ pertence à função $f(x)$? Justifiquem a resposta. Não, pois $f(3) = 4{,}5$.

f) O ponto $(0; 0)$ pertence à função $f(x)$? Justifiquem a resposta. Sim, pois $f(0) = 0$.

g) Marquem o ponto $(3; 4)$ no plano. Esse ponto está alinhado com os pontos A e B ou seja, os três estão na mesma reta? Não.



Tarcisio Garbellini

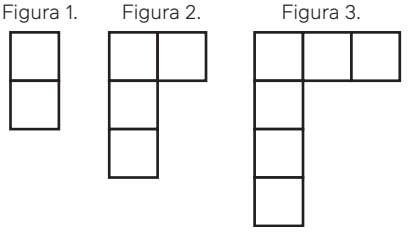
MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

4. Utilizem as respostas do item 3 para tentar justificar a hipótese criada no item 2. Resposta pessoal.

Com base nesses exemplos, podemos supor que os gráficos das funções lineares serão sempre retas que passam pela origem. Mas será que isso realmente vale para qualquer função linear? Vamos ver o exemplo a seguir.

Observe a sequência de figuras ao lado.

Considere que a taxa de variação entre a quantidade de quadrados de cada figura (y) e o número de ordem da figura (x) seja constante.



Tarcisio Garbellini

Para pensar e discutir

1. Determine o domínio, o contradomínio e a lei de formação da função que relaciona y e x. $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$

2. O ponto $(0; 0)$ pertence à essa função? Não, pois o ponto 0 não está no domínio.

3. O gráfico dessa função pode ser uma reta? Não, pois a função não está definida para valores não naturais de x.

De acordo com os exemplos analisados, podemos supor que os pontos do gráfico de uma função linear estão sempre alinhados. Para investigar essas hipóteses, vamos estudar o conceito de **taxa de variação**.

Taxa de variação da função linear

Chamamos de **taxa de variação de uma função** a razão entre a variação de $f(x)$ e x. Vamos ver um exemplo.

Exemplo

Considere um quadrado cujo lado mede x cm. Sabemos que sua área medirá x^2 cm e seu perímetro medirá $4x$ cm. Escrevendo na forma de função, temos a área como $A(x) = x^2$ e o perímetro como $p(x) = 4x$.

Veja alguns pontos dessas funções organizados em uma tabela:

Lado = x	1	2	3
Área = $A(x) = x^2$	1	4	9
Perímetro = $p(x) = 4x$	4	8	12

Vamos calcular a taxa de variação dessas funções quando x varia de 1 para 2, de 2 para 3 e de 1 para 3:

Variação da medida do lado	$2 - 1 = 1$	$3 - 2 = 1$	$3 - 1 = 2$
Variação da medida da área	$4 - 1 = 3$	$9 - 4 = 5$	$9 - 1 = 8$
Taxa de variação	$3 : 1 = 3$	$5 : 1 = 5$	$8 : 2 = 4$

Variação da medida do lado	$2 - 1 = 1$	$3 - 2 = 1$	$3 - 1 = 2$
Variação da medida do perímetro	$8 - 4 = 4$	$12 - 8 = 4$	$12 - 4 = 8$
Taxa de variação	$4 : 1 = 4$	$4 : 1 = 4$	$8 : 2 = 4$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Como podemos observar, a taxa de variação é constante na função perímetro, mas não na função área.

Dada uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dados dois números reais m e n distintos, a **taxa de variação** da função $f(x)$ para o intervalo entre m e n é dada pela razão:

$$\frac{f(m) - f(n)}{m - n}$$

Vamos ver agora como esse conceito nos ajuda a entender o comportamento da função linear.

Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função linear genérica dada por $f(x) = ax$ com a real, temos:

Ao aplicar a definição de taxa de variação em f, nota-se que:

$$\frac{f(m) - f(n)}{m - n} = \frac{am - an}{m - n} = \frac{a(m - n)}{m - n} = a$$

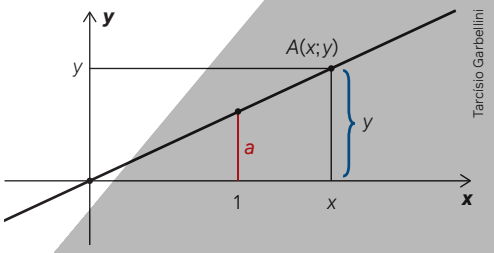
Logo, o coeficiente a é a taxa de variação da função linear.

Além disso, veja:

I. Para $x = 0$, temos $f(0) = a \cdot 0 = 0$. Logo, o ponto $(0; 0)$ pertence à função linear.

II. Para $x = 1$, temos $f(1) = a \cdot 1 = a$. Logo, o ponto $(1; a)$ pertence à função linear.

III. Traçando uma reta pelos pontos $(0; 0)$ e $(1; a)$ e escolhendo um ponto $A(x; y)$ qualquer dessa reta, temos a figura ao lado.



Tarcísio Garbellini

Nota-se que os **triângulos** formados pelos pontos $(0; 0)$, $(1; 0)$ e $(1; a)$ e pelos pontos $(0; 0)$, $(x; 0)$ e A são semelhantes.

Sendo assim, $\frac{y}{x} = \frac{a}{1} \Rightarrow a = y = ax$; ou seja, o ponto A pertence a $f(x)$.

Logo, todos os pontos da reta que passam por $(0; 0)$ e $(1; a)$ pertencem à função linear $f(x) = ax$.

Por I, II e III, conclui-se que:

O gráfico da função linear $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma $f(x) = ax$ com a real é uma reta que passa pelos pontos $(0; 0)$ e $(1; a)$.

Para entender melhor os conceitos relacionados aos triângulos retângulos e à semelhança de triângulos, consulte o tópico **Fundamentos de geometria plana** na **Caixa de ferramentas**.

Para explorar

Em duplas, utilizando um *software* de elaboração de gráficos, esbocem diversas funções lineares variando o valor do coeficiente a. Em seguida, respondam às questões:

1. Em todos os casos observados por vocês, a afirmação de que o gráfico da função linear é uma reta que passa pelos pontos $(0; 0)$ e $(1; a)$ se confirma? Sim.
2. O que acontece com o gráfico da função quando $a = 0$? O gráfico é uma reta sobre o eixo das abscissas.
3. O que acontece com o gráfico da função quando $a = 1$? Resposta no Manual do Professor.
4. Qual é a diferença entre os gráficos da função quando $a > 0$ e quando $a < 0$? Resposta no Manual do Professor.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

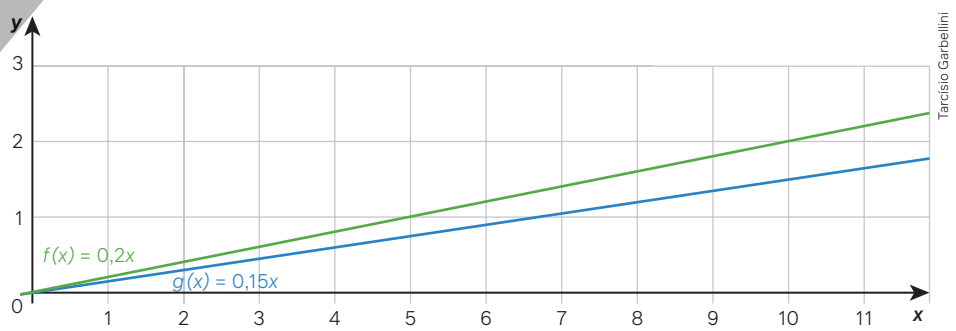
Para saber sobre o recurso destacado, consulte o tópico **Recursos digitais** na **Caixa de ferramentas**.

Considere que uma função f determina a quantidade de litros de água liberada por uma torneira em função dos segundos em que ela permanece aberta.

Sendo $y = f(x) = 0{,}2x$, então $\frac{y}{x} = 0{,}2$. Isso é o mesmo que dizer que a cada 1 segundo a torneira libera 0,2 litro.

Suponha agora que, para economizar água, foi instalado um restritor de vazão nessa torneira. Sendo $y = g(x) = 0{,}15x$, então $\frac{y}{x} = 0{,}15$. Isso é o mesmo que dizer que, com o restritor, a cada 1 segundo a torneira libera 0,15 litro.

Veja o gráfico de f e g a seguir.



Tarcísio Garbellini

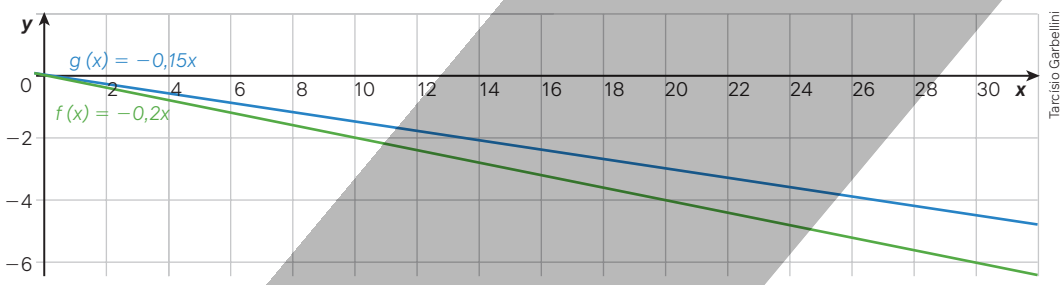
Pelo gráfico nota-se que, para cada unidade de x, a função f cresce mais rápido do que a função g. Esse exemplo nos ajuda a observar que o valor do coeficiente a representa a taxa de variação da função, ou seja, o quanto y varia para cada unidade de x. Sendo $a > 0$, quanto maior o valor de a, maior será o ângulo entre o eixo das ordenadas e a reta que representa o gráfico de $f(x)$.

Para pensar e discutir

Considere que, por uma questão didática, deseja-se representar a vazão de água da torneira por um número negativo, indicando desperdício. Respostas no Manual do Professor.

1. Como ficaria a função $f(x)$ nesse caso?
2. Calcule $f(1)$ e $f(2)$. Com base nos resultados, responda: Como ficaria o gráfico de $f(x)$?

Nos exemplos anteriores trabalhamos valores positivos para o coeficiente a. Com base nos experimentos realizados foi possível concluir o que esse coeficiente representa no contexto e no gráfico da função. Veja no gráfico abaixo o comportamento das funções f e g quando trocamos o sinal de a:



Tarcisio Garbellini

Analisando os gráficos podemos concluir que a variação de y para cada unidade de x continua sendo maior quanto maior for o valor absoluto de a. A diferença neste caso é que, quando x aumenta, y diminui.

Quando isso acontece, dizemos que a reta é decrescente, ou seja, à medida que o valor de x aumenta, o valor de y diminui.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax$ com $a \in \mathbb{R}$,

- se $a > 0$, a função é **crescente**;
- se $a < 0$, a função é **decrescente**.

Para entender melhor esses conceitos, consulte o tópico **A linguagem das funções** na **Caixa de ferramentas**.

Como pudemos observar, o gráfico das funções lineares de domínio real é sempre uma reta que passa pela origem. Entretanto, é preciso fazer algumas ressalvas:

- Se o domínio da função for um conjunto discreto (como o conjunto dos naturais), o gráfico da função será um conjunto de pontos que, mesmo estando alinhados, não podem ser ligados.
- Se o valor $x = 0$ não pertencer ao domínio da função, o gráfico da função não passará pela origem.

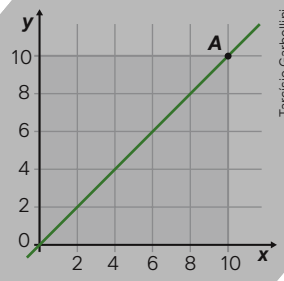
Vamos agora conhecer um caso particular dessa função.

Função identidade

Chama-se função identidade a função linear em que a taxa de variação é 1.

Nesse caso, a razão entre y e x é 1, o que significa que $y = x$, ou, explicitando o valor do parâmetro a, $y = 1x$.

Sendo A um ponto de coordenadas $(x_A; y_A)$ de modo que A pertence à função identidade, $x_A = y_A$. Nesse caso, se traçarmos o gráfico dessa função em um plano cartesiano cujos eixos têm a mesma unidade, a figura formada pelo cruzamento dos eixos com as retas horizontal e vertical que passam por A é um quadrado.



Tarcísio Garbellini

Podemos concluir então que, como o gráfico da função é a reta que passa pela diagonal do quadrado, essa reta é bissetriz do ângulo formado pelos eixos.

Como essa reta corta ao meio os quadrantes 1 e 3, dizemos que é bissetriz dos quadrantes ímpares.

Observação: a bissetriz dos quadrantes pares é o gráfico da função $f(x) = -x$.

Atividades

1. Ao analisar o fluxo de acessos ao perfil recém-criado numa rede social da empresa na qual trabalha, o funcionário responsável pelo marketing das mídias digitais observou que o número de inscritos variava em função do número de semanas passadas desde a inauguração do perfil de acordo com uma função identidade. Qual é a taxa de variação da quantidade de acessos por semana, em porcentagem? A taxa de variação é 1 ou 100%.

2. (Unicamp) Os preços que aparecem no cardápio de um restaurante já incluem um acréscimo de 10% referente ao total de impostos. Na conta, o valor a ser pago contém o acréscimo de 10% relativo aos serviços (gorjeta). Se o valor total da conta for p reais, o cliente estará desembolsando pelo custo original da refeição, em reais, a quantia de:

Alternativa **b**.

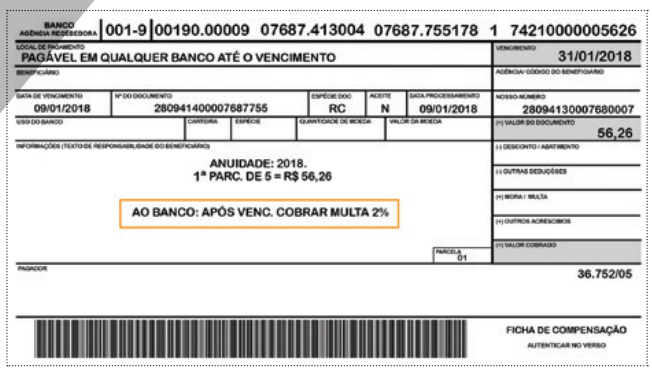
a) $\frac{p}{1{,}20}$. **b)** $\frac{p}{1{,}21}$. **c)** $\frac{p}{0{,}80}$. **d)** $\frac{p}{0{,}81}$.

3. Ao pagar uma conta fora do prazo é comum que seja cobrada uma multa pelo atraso, além dos juros que são cobrados a cada dia. Veja o boleto ao lado, por exemplo:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

a) Sendo x o valor da parcela e y o valor da multa, escreva a expressão de $y = f(x)$. $y = f(x) = 0{,}02x$

b) O gráfico de $f(x)$ será crescente ou decrescente? Crescente.


BANCO 001-9 | 00190.00009 07687.413004 07687.755178 1 74210000005626
LOCAL DE PAGAMENTO: PAGÁVEL EM QUALQUER BANCO ATÉ O VENCIMENTO — VENCIMENTO: 31/01/2018
BENEFICIÁRIO — AGÊNCIA/CÓDIGO DO BENEFICIÁRIO
DATA DE VENCIMENTO: 09/01/2018 | Nº DO DOCUMENTO: 280941400007687755 | ESPÉCIE DOC: RC | ACEITE: N | DATA PROCESSAMENTO: 09/01/2018 | NOSSO-NÚMERO: 28094130007680007
USO DO BANCO | CARTEIRA | ESPÉCIE | QUANTIDADE DE MOEDA | VALOR DA MOEDA | (=) VALOR DO DOCUMENTO: 56,26
INFORMAÇÕES (TEXTO DE RESPONSABILIDADE DO BENEFICIÁRIO)
ANUIDADE: 2018.
1ª PARC. DE 5 = R$ 56,26
AO BANCO: APÓS VENC. COBRAR MULTA 2%
(-) DESCONTO / ABATIMENTO
(-) OUTRAS DEDUÇÕES
(+) MORA / MULTA
(+) OUTROS ACRÉSCIMOS
(=) VALOR COBRADO
PARCELA 01
PAGADOR
36.752/05
FICHA DE COMPENSAÇÃO
AUTENTICAR NO VERSO
Mauro Salgado

4. (Enem) O pacote de salgadinho preferido de uma menina é vendido em embalagens com diferentes quantidades. A cada embalagem é atribuído um número de pontos na promoção:

"Ao totalizar exatamente 12 pontos em embalagens e acrescentar mais R$ 10,00 ao valor da compra, você ganhará um bichinho de pelúcia".

Massa da embalagem (g)	Pontos da embalagem	Preço (R$)
50	2	2,00
100	4	3,60
200	6	6,40

Esse salgadinho é vendido em três embalagens com as seguintes massas, pontos e preços:

A menor quantia a ser gasta por essa menina que a possibilite levar o bichinho de pelúcia nessa promoção é: Alternativa **c**.

a) R$ 10,80. **b)** R$ 12,80. **c)** R$ 20,80. **d)** R$ 22,00. **e)** R$ 22,80.

3 Função polinomial do 1º grau

As leis de formação das funções podem envolver diversas operações e expressões algébricas. Sendo assim, chamamos de funções polinomiais aquelas em que uma ou mais potências da variável independente são multiplicadas por algum número real e somadas. O grau da função é o maior expoente da variável.

Sendo assim, funções do 1º grau são aquelas em que a variável aparece sem nenhum expoente, podendo ou não ser somada a um valor constante. De maneira formal, temos:

Denominamos **função polinomial do 1º grau** às funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma $f(x) = ax + b$ com a e $b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

- Note que nessas funções temos dois **coeficientes**: a e b.
- Note também que devemos ter $a \neq 0$ para que a função seja do 1º grau.

Observando que a forma geral das funções do 1º grau é do tipo $f(x) = ax + b$ e que o coeficiente b pode assumir qualquer valor, vamos começar o estudo considerando o caso particular em que $b = 0$. Nesse caso, se y está em função de x, temos que $y = ax$ e, consequentemente, $\frac{y}{x} = a$. Podemos concluir então que y e x são diretamente proporcionais. Já sabemos que a esse caso particular de função damos o nome de função linear. Vejamos agora o que acontece quando $b \neq 0$.

Para explorar

Em duplas, escolham um *software* de elaboração de gráficos e representem as funções $f(x) = x$; $g(x) = x + 1$ e $h(x) = x - 1$. Em seguida respondam às questões:

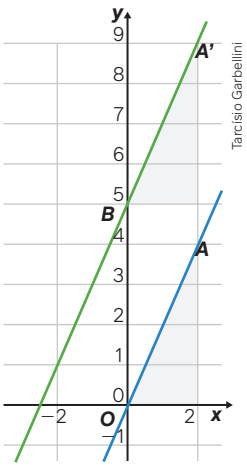
1. O que os três gráficos têm em comum? Eles são paralelos, pois possuem a mesma taxa de variação.
2. O que muda de um gráfico para o outro? O deslocamento em relação ao eixo das ordenadas.
3. Qual é a relação entre o coeficiente b (0, 1 e -1) e as alterações nos gráficos? São os pontos em que o gráfico intersecta o eixo das ordenadas.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Você deve ter notado que os gráficos formam três retas paralelas. Isso acontece porque as três funções têm a mesma taxa de variação, ou seja, o incremento no valor de y permanece o mesmo para cada x. Veja:

Nesse gráfico podemos ver em azul a função linear dada por $f(x) = 2x$ e em verde a função afim dada por $g(x) = 2x + 5$.

Escolhendo o ponto $A(2; 4)$ da função f, nota-se que a razão $\frac{y}{x} = \frac{4}{2} = 2$, que é a taxa de variação da função. Sabemos que esse número significa que, a cada unidade de x, o valor de y aumenta 2 unidades. Veja: quando $x = 1$, $y = 2$; quando $x = 2$, $y = 4$.



Tarcísio Garbellini

Ao olharmos para a função g, deslocada em 5 unidades na vertical, é preciso atentarmos para o fato de que, ao calcular a taxa de variação de y em relação a x, não podemos considerar apenas as coordenadas de um ponto. Se fizéssemos o cálculo considerando apenas o ponto $A'(2; 9)$, concluiríamos erroneamente que a taxa de variação é $\frac{y}{x} = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

O que podemos fazer nesse caso é olhar a variação entre dois pontos da função g: $A'(2; 9)$ e $B(0; 5)$. Olhando para esses dois pontos é possível observar que, indo de B para A', o valor de x aumentou 2 unidades $(2 - 0)$, enquanto o valor de y aumentou 4 unidades $(9 - 5)$. A taxa de variação então continua sendo $\frac{4}{2} = 2$.

Para pensar e discutir

1. Considere que uma mangueira está sendo usada para encher uma piscina que já está com 500 litros de água. A quantidade de litros de água que a mangueira despeja na piscina a cada minuto é denominada **vazão**.

a) Se após 1 minuto a piscina tem 508 litros e após 2 minutos tem 516, qual é a vazão da mangueira? $a = 8$ L/min

b) Se a vazão for constante, qual será a taxa de variação da quantidade de água na piscina por minuto? $a = 8$ L/min

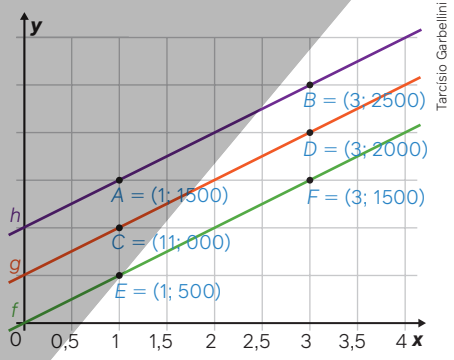
c) Essa taxa de variação mudaria caso a piscina estivesse vazia a princípio? E se a piscina tivesse inicialmente 1000 litros? A vazão não mudaria.

d) Considerando o caso em que a piscina tenha de início 500 litros, qual função expressa a relação entre a quantidade de litros de água na piscina e o tempo em minutos? $y = 500 + 8x$

2. Ao analisar um contexto que pode ser modelado por uma função do 1º grau, como esse visto na **atividade 1**, como podemos encontrar o valor do coeficiente a da função? O coeficiente a é a taxa de variação estabelecida entre as variáveis.

3. O gráfico ao lado mostra a quantidade de água na piscina em milhares de litros em função do tempo em horas no qual a mangueira esteve aberta:

A função f considera a piscina inicialmente vazia. Já as funções g e h consideram a piscina inicialmente com 500 L e com 1000 L respectivamente.



Tarcísio Garbellini

a) Qual é a taxa de variação da quantidade de litros de água na piscina por hora (vazão da mangueira) considerando a função f? 500 L/h

b) A taxa de variação de f e g são iguais às de h? Por quê? Sim, pois as retas são paralelas.

4. Dados dois pontos quaisquer de uma função do 1º grau, como é possível encontrar a taxa de variação dessa função? Basta dividir a diferença entre os valores de $f(x)$ pela diferença entre os respectivos valores de x.

Nas funções do tipo $y = ax + b$ com a e $b \neq 0$, embora os valores de x e y não sejam diretamente proporcionais, a taxa de variação, como nas funções lineares, é constante. Retomando o conceito de taxa de variação, podemos demonstrar esse fato.

Considerando uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dois números reais m e n distintos, a **taxa de variação** da função $f(x)$ para o intervalo entre m e n é dada pela razão:

$$\frac{f(m) - f(n)}{m - n}$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Sendo f uma função afim dada por $f(x) = ax + b$ com a e b reais e $a \neq 0$, a taxa de variação será:

$$\frac{f(m) - f(n)}{m - n} = \frac{(am + b) - (an + b)}{m - n} = \frac{am + b - an - b}{m - n} = \frac{am - an}{m - n} = \frac{a(m - n)}{m - n} = a$$

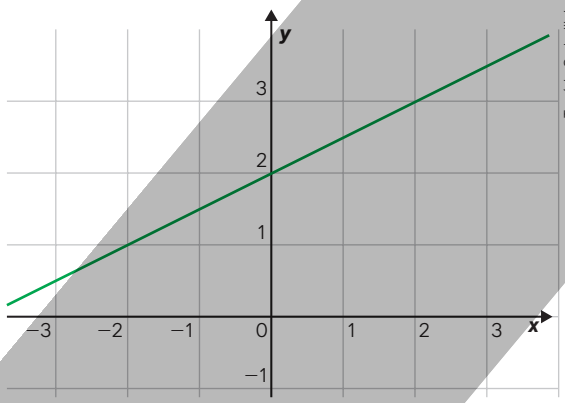
Nota-se assim que o coeficiente b não interfere nessa taxa, sendo responsável apenas pelo deslocamento vertical do gráfico.

Quando observamos uma situação contextualizada que pode ser modelada por uma função afim e na qual a taxa de variação entre duas grandezas é dada, essa taxa é o valor do coeficiente a da função. Da mesma forma que na função linear, o valor de a determina a inclinação da reta, que pode ser crescente (quando $a > 0$) ou decrescente (quando $a < 0$). A seguir estudaremos um pouco mais o papel do coeficiente b.

Termo independente na função do 1º grau

Em uma função do 1º grau, o valor do coeficiente b é chamado de valor fixo ou valor inicial da função. Na expressão da função, ele é chamado de termo independente, uma vez que representa um termo que é somado à função independentemente do valor de x escolhido.

Para pensar e discutir



Tarcísio Garbellini

1. Considere uma função do 1º grau genérica, do tipo $f(x) = a \cdot x + 2$. Responda:
   a) Quanto é $f(0)$? 2
   b) Esse valor depende da taxa de variação? Não.
2. Veja o gráfico da função ao lado.
   a) Quanto é $f(0)$? 2
   b) Mesmo sem saber a taxa de variação da função, é possível saber o valor do coeficiente b? Como?

   b) Sim, $b = 2$. É possível encontrar esse valor pois, sendo o gráfico uma reta, sabemos que a função que gera o gráfico é do tipo $f(x) = ax + b$. Como $f(0) = 2$, então $0 + b = 2$, ou seja, $b = 2$.

Podemos concluir assim que o valor do coeficiente b define o ponto $(0; b)$, no qual a função intersecta o eixo das ordenadas. Em situações contextualizadas, o valor de b é obtido com base na situação inicial, ou seja, é o valor dado quando $x = 0$.

Para pensar e discutir

Você já usou um leitor de livros digitais?

São aparelhos fabricados para melhorar a experiência da leitura de livros ou documentos digitalizados. Entre outras funções, esses aparelhos costumam mostrar o tempo que falta para você terminar a unidade que está lendo.

Para determinar esse valor, o *software* do aparelho pode fazer uma operação simples, considerando seu tempo médio de leitura e a quantidade de páginas da unidade. Suponha por exemplo que um leitor vai iniciar um capítulo que tem 40 páginas e o tempo médio de leitura é de 0,5 minuto por página.

RLRRLRLL/Shutterstock.com

1. Quanto tempo falta para o leitor terminar o capítulo no início da leitura? 20 minutos
2. Quanto es[illegible] página lida? 0,5 minuto
3. Relacione os [illegible] questões 1 e 2 com os coeficientes de uma função do 1º grau. 20 é o valor de b e 0,5 é o valor de a
4. Sendo x o número de páginas já lidas e y o tempo que falta para terminar a unidade, escreva y em função de x e determine o domínio e a imagem da função. $f: \{0; 1; 2; 3; \ldots; 40\} \to [0; 20]$, $f(x) = 20 - 0{,}5x$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Seja $f(x) = ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ uma **função do 1º grau**, as afirmações a seguir são verdadeiras.

- Todos os pontos do gráfico de $f(x)$ pertencem à mesma reta que intersecta o eixo vertical no ponto $(0; b)$ caso $x = 0$ esteja no domínio.
- O coeficiente a é a **taxa de variação da função**.
- O coeficiente b é o **termo independente da função**.
- Se $a > 0$, a função é **crescente** (o valor de y aumenta quando x aumenta).
- Se $a < 0$, a função é **decrescente** (o valor de y diminui quando x aumenta).

4 Função afim

Toda função que possui uma taxa de variação constante é chamada de função afim. Podemos defini-las assim:

> Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de **função afim** quando existem constantes a e $b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo x real.

Note que as funções lineares e do 1º grau estudadas anteriormente são tipos de função afim. Vamos ver como essas funções se classificam de acordo com os coeficientes.

Classificações da função afim

Antes de reunir todas as classificações da função afim, vamos estudar um último conceito.

Função constante

Chamamos de função constante toda função afim onde $a = 0$. Note que, se $a \neq 0$, temos uma função do 1º grau. Vamos estudar o comportamento dessas funções.

Para explorar

Em duplas, realizem as atividades a seguir: Orientações no Manual do Professor.

1. Sabemos que as funções do tipo $f(x) = ax + b$ são crescentes se $a > 0$ e decrescentes de $a < 0$. Esbocem o gráfico de uma função afim crescente e de uma função afim decrescente. Elaborem uma hipótese sobre como seria o gráfico da função constante.
2. Considerem a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$. Representem alguns pontos dessa função e elaborem seu gráfico. Se acharem necessário, utilizem um *software* para isso. Esse gráfico confirma a hipótese que vocês propuseram na atividade anterior?
3. Retomem os conceitos de função do 1º grau e função linear apresentados no livro. Com base nesses conceitos, reproduzam no caderno o quadro a seguir e completem-no com as classificações "função constante", "função do 1º grau", "função linear", "função crescente" e "função decrescente". Note que é possível colocar mais de uma classificação em uma célula.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Funções afim	$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
$b = 0$			
$b \neq 0$			

4. Elaborem um fluxograma que recebe os valores de a e b e classifica a função como função do 1º grau, função linear do 1º grau, função linear constante ou função constante. Para cada classificação da função seu fluxograma apresenta como resultado um exemplo de situação que pode ser modelada por essa função.

Concluindo:

São casos particulares de função afim:

- todas as funções do 1º grau, que ocorrem quando $a \neq 0$;
- todas as funções lineares, que ocorrem quando $b = 0$;
  (note que as funções lineares em que $a \neq 0$ são também do 1º grau);
- todas as funções constantes, que ocorrem quando $a = 0$.

Com base na definição, as funções afins se caracterizam como a classe de funções que modelam situações em que a taxa de variação é uma constante.

Funções definidas por mais de uma sentença

Durante o estudo das funções afins vimos uma série de contextos em que elas são utilizadas. Há ainda outros contextos nos quais a função que modela a situação demanda de mais de uma lei de formação, de acordo com trechos do domínio. Veja como isso ocorre no exemplo a seguir.

Como calcular o Imposto de Renda?

As bases para o cálculo do IR são muitas, de acordo com o modo pelo qual a pessoa está cadastrada no sistema da Receita Federal. A forma mais comum de cálculo do Imposto de Renda é a do trabalhador assalariado, chamada de Imposto de Renda Retido na Fonte (IRRF). Esse cálculo é feito pelo empregador, que recolhe parte do salário do funcionário e envia diretamente para a receita. Para determinar quanto do salário será retido na fonte, o cálculo é feito com base na seguinte tabela:

- A base de cálculo mensal é dada pelo valor do salário registrado, descontando-se outros impostos e taxas (por exemplo, o INSS).
- A alíquota é a porcentagem do salário que formará o IR.
- A parcela a deduzir é um valor a ser subtraído da alíquota.

Base de cálculo mensal (em R$)	Alíquota	Parcela a deduzir do IR (em R$)
Até 1.903,98	isento	isento
De 1.903,99 até 2.826,65	7,50%	142,8
De 2.826,66 até 3.751,05	15%	354,8
De 3.751,06 até 4.664,68	22,50%	636,1
Acima de 4.664,68	27,50%	869,4

Fonte: IRRF – Imposto de Renda Retido na Fonte. *Dicionário Financeiro*. Disponível em: https://www.dicionariofinanceiro.com/irrf-imposto-de-renda-retido-na-fonte/. Acesso em: 23 maio 2020.

Utilizar a tabela é simples:

1. Observe quanto sobra do salário após o desconto dos impostos como INSS: por exemplo, R$ 2.000,00.
2. Veja em que faixa está esse valor: R$ 2.000,00 está na segunda linha.
3. Calcule uma porcentagem desse valor de acordo com a taxa indicada na linha da tabela: olhando a segunda linha, a porcentagem é 7,5%; calculando 7,5% de R$ 2.000,00, temos R$ 150,00.
4. Subtraia do valor encontrado a parcela a deduzir observando mais uma vez a linha da tabela: olhando a segunda linha, a dedução é de R$ 142,80; fazendo 150 − 142,8 = 7,2, conclui-se que alguém que recebe R$ 2.000,00 como salário-base terá R$ 7,20 retidos na fonte no momento do recebimento do salário.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir

Leia o texto sobre o cálculo do Imposto de Renda e resolva as seguintes questões:

1. Considere x o salário-base de um funcionário, ou seja, o valor que sobra do salário após a dedução de outros impostos e que serve como base para cálculo do IRRF. Sendo y o valor do imposto calculado em função de x, determine:

   a) $y = f(x)$, sendo f: $[1903{,}99; 2825{,}66[\to \mathbb{R}$ $f(x) = 0{,}075x - 142{,}8$

   b) $y = g(x)$, sendo g: $[2825{,}66; 3751{,}96[\to \mathbb{R}$ $g(x) = 0{,}15x - 354{,}8$

   c) $y = h(x)$, sendo h: $[3571{,}96; 4664{,}69[\to \mathbb{R}$ $h(x) = 0{,}225x - 636{,}1$

   d) $y = m(x)$, sendo m: $[4664{,}69; +\infty[\to \mathbb{R}$ $m(x) = 0{,}275x - 869{,}4$

Você deve ter observado que os gráficos das quatro funções se conectam, formando uma função contínua com quatro taxas de variação diferentes, dependendo do trecho do domínio utilizado.

2. Elabore em um mesmo gráfico as funções f, g, h e m e classifique cada trecho da função como função do 1º grau, linear ou constante. Resposta no Manual do Professor.

3. Escreva a lei de formação da função Imposto de Renda para $0 < x < 1903{,}99$. Represente-a no gráfico e classifique-a como do 1º grau, linear ou constante. Resposta no Manual do Professor.

Veja como podemos representar a função Imposto de Renda com a simbologia própria das funções definidas por mais de uma sentença.

Note que as leis de formação dessa função pertencem a classificações diferentes. Enquanto as expressões que determinam o valor da função para $x >$ R$ 1.903,98 são funções do 1º grau, a expressão que determina os valores da função para o primeiro trecho do domínio é uma função constante.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ para } 0 < x < 1903{,}99 \\ \frac{7{,}5}{100}x - 142{,}8, \text{ para } 1903{,}99 \leqslant x < 2\,826{,}66 \\ \frac{15}{100}x - 354{,}8, \text{ para } 2\,826{,}66 \leqslant x < 3\,751{,}05 \\ \frac{22{,}5}{100}x - 636{,}1, \text{ para } 3\,751{,}05 \leqslant x < 4\,664{,}68 \\ \frac{27{,}5}{100}x - 869{,}4, \text{ para } 4\,664{,}68 \leqslant x \end{cases}$$

Para explorar

1. Os valores de dedução garantem que a função seja contínua, ou seja, que quem está no extremo superior de um intervalo do domínio pague o mesmo imposto de quem está no extremo inferior do intervalo seguinte.

Reúna-se com um colega para responder às questões a seguir.
Converse com os professores de Ciências Humanas para embasar sua pesquisa.

1. Observem que o gráfico da função $\mathbb{R}$ é contínuo (os trechos se encontram em seus extremos). Com base nessa observação, elaborem uma justificativa para os valores das parcelas a deduzir que estão na última coluna da tabela. Se acharem necessário, esbocem como seria o gráfico se essas parcelas não existissem.

2. Discutam sobre os seguintes tópicos:

a) Por que faixas salariais maiores pagam uma porcentagem maior de Imposto de Renda?

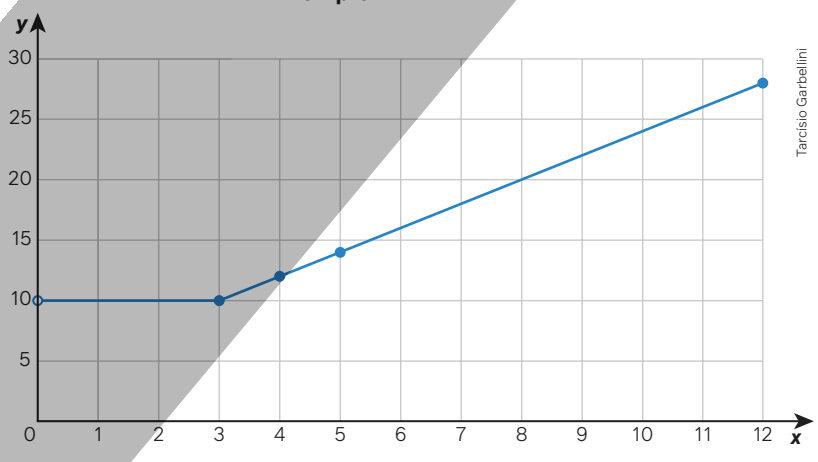
b) Para que serve o Imposto de Renda? Qual sua função na sociedade?

c) Você acha que essa quantidade de faixas salariais é suficiente? Por quê? Escrevam um parágrafo com suas conclusões. Respostas pessoais.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para saber mais: outro contexto que usa funções definidas por várias sentenças.

Exemplo



Tarcísio Garbellini

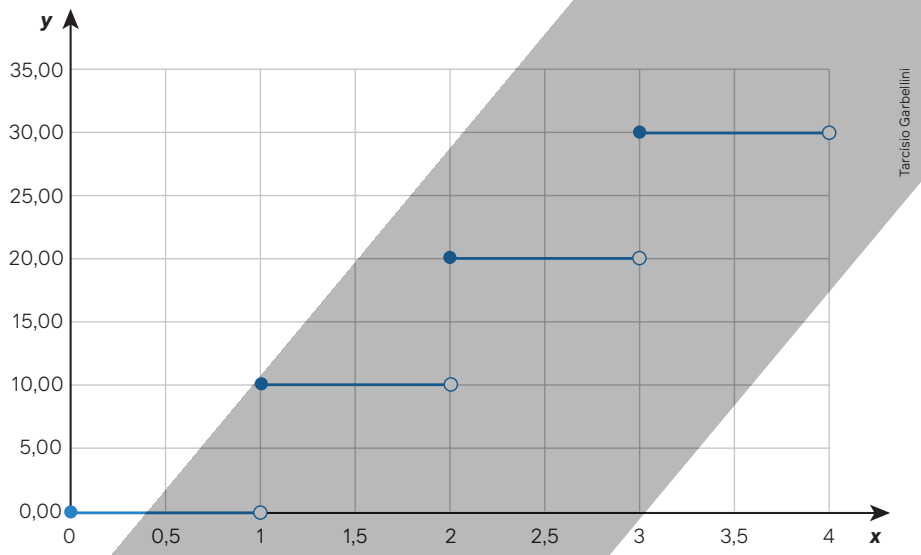
Considere um estacionamento onde é cobrado um preço fixo de R$ 10,00 para até 3 horas de estacionamento e, a partir desse momento, cobram-se R$ 2,00 por hora, contando continuamente (e não apenas no momento em que se completa uma hora a mais). Sendo $f(x)$ a função que determina o preço por x horas de estacionamento, o gráfico de $f(x)$ será:

Note que para $x \in [0,3]$ a função é constante, mas para $x > 3$ a função é afim. Veja como podemos escrever a lei de formação da função:

$$f(x) = \begin{cases} 10 \text{ para } 0 < x \leqslant 3 \\ 10 + 2(x - 3) \text{ para } x > 3 \end{cases}$$

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. Por que no exemplo anterior, ao descrever a segunda expressão de $f(x)$, multiplicou-se a taxa de variação 2 por $(x - 3)$?
2. O que aconteceria com o gráfico de $f(x)$ se a função estivesse representando o preço de um estacionamento que cobra, após as 3 primeiras horas, 2 reais por hora completa? Por exemplo, um carro estacionado por 3h30min ou por 3h59min pagaria os mesmos R$ 12,00, enquanto um carro estacionado por 4 h pagaria R$ 14,00.
3. Observe o gráfico abaixo. Escreva a lei de formação dessa função definida por quatro sentenças e elabore um contexto que possa ser modelado por essa função.



Tarcísio Garbellini

Para retomar

Jonathan Kitchen/Photodisc/Getty Images

1. Sabendo que a menor figura tem 1 cm de altura por 0,4 cm de largura e a maior figura tem 23 cm de altura, qual será sua largura? 9,2 cm
2. Sabendo a altura da menor (1 cm) e da maior (23 cm), é possível descobrir a altura de todas as outras bonecas. Qual é a diferença em cm entre a altura de uma boneca e a altura da boneca seguinte? 2 cm
3. Se você fosse criar novas bonecas maiores com base nessas, aumentando o tamanho da coleção, como utilizaria a resposta do item 2 para descobrir a altura das próximas bonecas? Você acha que é possível escrever uma fórmula que determine a altura da maior boneca dessa nova coleção sabendo o número total de bonecas? Resposta na página 11.

Para pensar e discutir Orientações no Manual do Professor.

No início desta unidade perguntamos se você achava que era possível escrever uma fórmula que determinasse o tamanho da próxima boneca sabendo que a primeira tem 1 cm de altura por 0,4 de largura e a última tem 23 cm de altura.

Agora sabemos que é possível!

Sendo x o número da boneca, $h(x)$ sua altura e $l(x)$ sua largura temos:

$h(1) = 1$

$h(12) = 23$

$l(1) = 0,4$

Sabemos também que os tamanhos das bonecas têm uma taxa de variação constante, tanto na altura quanto na largura.

E então? Quais são as fórmulas $h(x)$ e $l(x)$?

Módulo de uma função afim

Talvez você se lembre de que o módulo de um número real é seu valor absoluto. Em outras palavras, podemos dizer que o módulo de um número é dado pela distância que esse número está do zero na reta numérica, não importando se está à direita ou à esquerda dele.

De acordo com esse conceito, o módulo de um número é sempre um valor positivo, excetuando o módulo de zero, que é zero. Por isso podemos afirmar que, se um número é positivo ou nulo, seu módulo é igual a ele mesmo. Por outro lado, se o número é negativo, seu módulo é seu oposto. Algebricamente, o conceito de módulo de um número real x pode ser representado por meio de uma dupla sentença:

Sendo $x \in \mathbb{R}$ o módulo real x é representado por $|x|$ tal que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Assim, dizemos que estamos extraindo o módulo de um número quando substituímos o número por seu valor absoluto:

- $|3| = 3$
- $0 = 0$
- $\left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$
- $|1{,}5 - 4| = |-2{,}5| = 2{,}5$

Para aprofundar mais esse conceito, reflita e resolva as questões a seguir.

1. Para que valores de x podemos afirmar que $|2 - x|$ é igual a $2 - x$? Para $x < 2$.

2. Para que valores de x podemos afirmar que $|2 - x|$ é o oposto de $2 - x$? Para $x \geqslant 2$.

3. Utilize os conceitos para resolver os módulos a seguir:

a) $|2 - \sqrt{2}|$ $2 - \sqrt{2}$ **b)** $|2 - \sqrt{3}|$ $2 - \sqrt{3}$ **c)** $|2 - \sqrt{5}|$ $\sqrt{5} - 2$ **d)** $|2 - \pi|$ $\pi - 2$

Já vimos que, para determinar o módulo de um número, basta considerar seu valor absoluto.

Quando temos uma expressão dentro do módulo que não pode ser escrita por um único número (ou seja, envolve números irracionais ou termos desconhecidos), precisamos analisar o sinal do resultado da expressão que está dentro do módulo. Veja os exemplos:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Exemplo 1

Para calcular $|2\pi - 3\sqrt{5}|$, precisamos saber se o resultado de $2\pi - 3\sqrt{5}$ é um número positivo ou negativo. Sabemos que, se $3\sqrt{5}$ for maior que 2π, o resultado será negativo, pois estaremos subtraindo um número maior de um número menor.

Como $2\pi \approx 6{,}18$ e $3\sqrt{5} \approx 6{,}7$, então $2\pi < 3\sqrt{5}$. Logo, $|2\pi - 3\sqrt{5}| = 3\sqrt{5} - 2\pi$

Exemplo 2

Para calcular $|x^2 + 5|$ basta observar que nenhum número real elevado ao quadrado é negativo. Logo, $x^2 + 5$ é positivo para qualquer valor de x e $|x^2 + 5| = x^2 + 5$.

Exemplo 3

Para calcular $|x + 1|$ é preciso saber se $x + 1$ é positivo ou negativo. Entretanto, x não tem um valor determinado. Neste caso, devemos considerar duas possibilidades:

- se $x \geqslant -1$, $x + 1$ é positivo ou nulo; então, $|x + 1| = x + 1$;
- se $x < -1$, $x + 1$ é negativo; então, $|x + 1| = -x - 1$.

Agora que sabemos determinar um módulo qualquer, vamos ver como o conceito de módulo se relaciona com a ideia de função definida por mais de uma sentença.

Para explorar

Respostas no Manual do Professor.

Reúna-se com um colega para resolver as atividades a seguir.

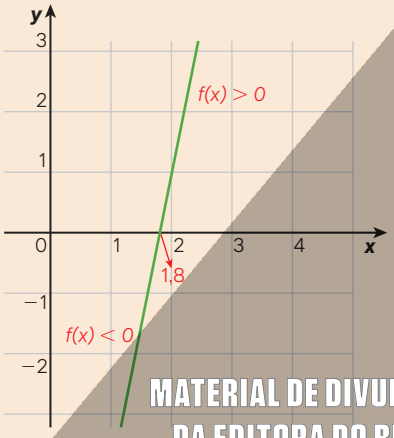
Vamos retomar a definição de módulo dada anteriormente:

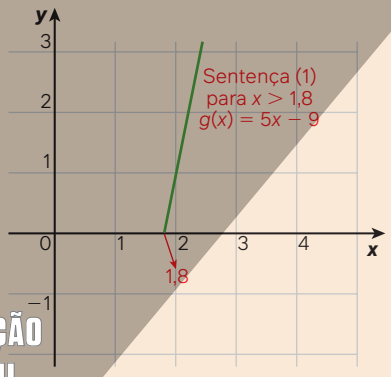
$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

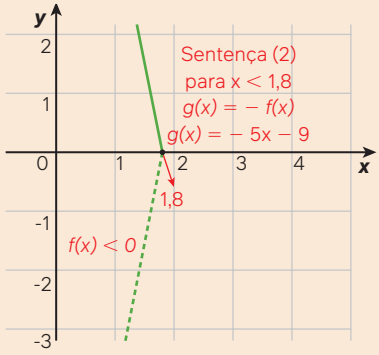
1. Utilizando essa linguagem simbólica e com base nos exemplos anteriores, escrevam a função $f(x) = |x + 1|$ como uma função de duas sentenças: $f(x) = \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$

2. Utilizando um *software* de representação gráfica, elaborem os gráficos de uma função afim qualquer dada por $f(x) = ax + b$ e no mesmo plano elaborem o gráfico de $g(x) = |ax + b|$. Repitam quantas vezes acharem necessário. Em seguida respondam: Dado o gráfico de uma função afim $f(x)$, como podemos obter com facilidade o gráfico de $g(x) = |f(x)|$?

Ao aplicar o módulo a uma função, a função pode ser reescrita com duas sentenças. Assim, quando escrevemos $g(x) = |f(x)|$, uma das sentenças de $g(x)$ é definida para os valores do domínio de f para os quais a função é positiva ou nula. Chamaremos de sentença (1). A outra, que chamaremos de sentença (2), ocorre para os valores do domínio para os quais a função é negativa. Veja como exemplo o gráfico de $f(x) = 5x - 9$ abaixo.







Gráficos: Tarcísio Garbellini

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- Para $x \geqslant 1{,}8$ a função é positiva ou nula.
- Para $x < 1{,}8$ a função é negativa.
- Para escrever $g(x) = |f(x)|$, temos de escrever duas sentenças:
  - a sentença (1) será válida para $x \geqslant 1{,}8$;
  - a sentença (2) será válida para $x < 1{,}8$.

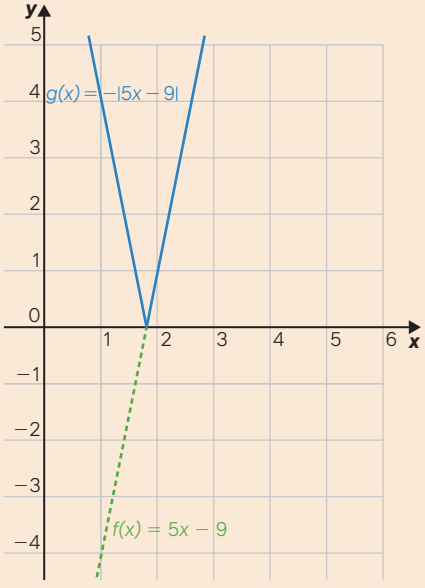
No caso da sentença (1), como ela ocorre apenas quando a função f é positiva ou nula, ela é igual à função. Isso significa que nesse trecho do domínio a função não muda. Temos $g(x) = f(x)$. Veja ao lado.

No caso da sentença (2), como ela ocorre apenas quando a função f é negativa, ela é oposta à função. Isso significa que nesse trecho do domínio a função é substituída pela sua oposta. Temos $g(x) = -f(x)$.

Em relação ao gráfico, vimos que o gráfico da oposta de f é simétrico ao gráfico de f, refletido sobre o eixo das abscissas.

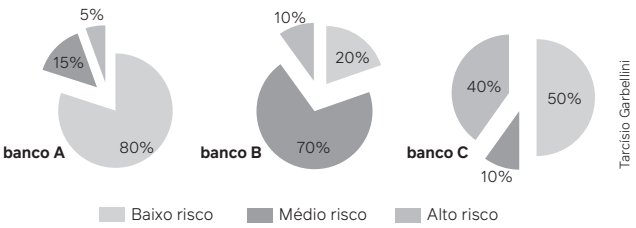
Veja ao lado.

Com isso podemos concluir que, para desenhar o gráfico de uma função modular, basta refletir sobre o eixo das abscissas, a parte negativa do gráfico.



Atividades finais

1. (Unesp) Os gráficos indicam a diversificação de aplicações para um investimento, por grau de risco, sugeridas por cada um dos bancos A, B e C.



Tarcísio Garbellini

Um investidor decidiu aplicar um capital de R$ 6.000,00 em partes que foram distribuídas pelos três bancos, seguindo a diversificação do grau de risco sugerida por cada banco. O capital aplicado foi distribuído da seguinte forma:

- total de R$ 1.000,00 no banco A (considerando os três graus de risco juntos);
- R$ 2.700,00 em investimentos de baixo risco (nos três bancos juntos);
- R$ 1.850,00 em investimentos de médio risco (nos três bancos juntos);
- R$ 1.450,00 em investimentos de alto risco (nos três bancos juntos).

O gráfico a seguir representa a diversificação da aplicação, por grau de risco, juntando os três bancos.

Investimento total de R$ 6.000,00 (bancos A,B e C)

Tarcísio Garbellini

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

Foram investidos R$ 2.000,00 em B e R$ 3.000,00 em C.

$\alpha = 87°$; $\beta = 162°$ e $\gamma = 111°$

Calcule os montantes de capital que foram investidos nos bancos *B* e *C*, e as medidas dos ângulos α, β e γ indicados no gráfico.

2. (Fuvest) A hortênsia (*Hydrangea macrophylla*) produz flores azuis quando cultivada em solo de pH < 5. Quando o pH do solo é maior do que 5, as flores tornam-se rosadas.

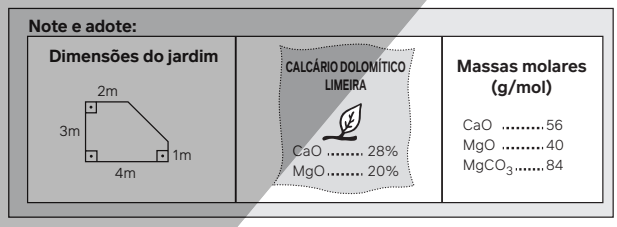
Um jardineiro recebeu uma encomenda de hortênsias rosadas. Ele dispõe de um jardim plano, com as formas e dimensões descritas na figura abaixo, e cujo solo apresenta pH = 4. Para obter um solo adequado à produção de flores rosadas, o jardineiro deverá adicionar uniformemente 300 g de calcário dolomítico por m^2 de terreno.

a) Calcule a massa, em quilogramas, de calcário dolomítico necessária para a correção do solo do jardim.

3 kg

O calcário dolomítico é uma mistura de carbonato de cálcio e carbonato de magnésio. Ao adquirir um pacote desse produto, o jardineiro observou que, no rótulo, sua composição estava expressa na forma das porcentagens, em massa, dos óxidos de cálcio e de magnésio que poderiam ser obtidos a partir dos correspondentes carbonatos contidos no calcário dolomítico.

b) Calcule a porcentagem, em massa, de carbonato de magnésio presente no calcário dolomítico adquirido pelo jardineiro. 42%



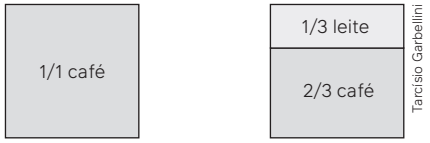
Tarcísio Garbellini

3. (Unicamp) Diversas padarias e lanchonetes vendem o "cafezinho" e o "cafezinho com leite". Uma pesquisa realizada na cidade de Campinas registrou uma variação grande de preços entre dois estabelecimentos, A e B que vendem esses produtos com um volume de 60 mL conforme mostra a tabela abaixo.

Produto	A	B
Cafezinho	R$ 2,00	R$ 3,00
Cafezinho com leite	R$ 2,50	R$ 4,00

a) Determine a variação percentual dos preços do estabelecimento A para o estabelecimento B, para os dois produtos. 50%

b) Considere a proporção de café e de leite servida nesses dois produtos conforme indica a figura abaixo. Suponha que o preço cobrado se refere apenas às quantidades de café e de leite servidas. Com base nos preços praticados no estabelecimento B, calcule o valor que está sendo cobrado por um litro de leite. R$ 100,00 por litro



Tarcísio Garbellini

4. (Fuvest) O Sistema Cantareira é constituído por represas que fornecem água para a Região Metropolitana de São Paulo. Chama-se de "volume útil" do Sistema os 982 bilhões de litros que ficam acima do nível a partir do qual a água pode ser retirada sem bombeamento. Com o uso de técnicas mais elaboradas, é possível retirar e tratar parte da água armazenada abaixo desse nível. A partir de outubro de 2014, a Sabesp passou a contabilizar uma parcela de 287 bilhões de litros desse volume adicional, denominada "reserva técnica" ou "volume morto", e chamou de "volume total" a soma do volume útil com a reserva técnica. A parte do volume total ainda disponível para consumo foi chamada de "volume armazenado".

O primeiro índice usado pela Sabesp para divulgar o nível do Sistema, após o início do uso da reserva técnica, foi o percentual do volume armazenado em relação ao volume útil (e não ao volume total). Chama-se este percentual de Índice 1.

a) Calcule o valor que terá o Índice 1 quando as represas estiverem completamente cheias, supondo que a definição de "volume armazenado" não tenha mudado. 129,23%

A partir de abril de 2015, a Sabesp passou a divulgar outros dois índices, além do Índice 1 (veja o Quadro). Note que o Índice 3 pode assumir valores negativos e valerá 100% quando as represas do Sistema estiverem completamente cheias.

b) No momento em que o Índice 1 for 50% que valores terão os Índices 2 e 3? 38,69% e 20,77%

c) Qual é o valor do Índice 2 no momento em que o Índice 3 é negativo e vale −10%? 14,88%

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

QUADRO

$$\text{índice 1} = \frac{\text{volume armazenado}}{\text{volume útil}} \times 100\%$$

$$\text{índice 2} = \frac{\text{volume armazenado}}{\text{volume total}} \times 100\%$$

$$\text{índice 3} = \frac{(\text{vol. armazenado}) - (\text{vol. da reserva técnica})}{\text{vol. útil}} \times 100\%$$

5. (Enem) Os sistemas de cobrança dos serviços de táxi nas cidades A e B são distintos. Uma corrida de táxi na cidade A é calculada pelo valor fixo da bandeirada, que é de R$ 3,45, mais R$ 2,05 por quilômetro rodado. Na cidade B, a corrida é calculada pelo valor fixo da bandeirada, que é de R$ 3,60, mais R$ 1,90 por quilômetro rodado.

Uma pessoa utilizou o serviço de táxi nas duas cidades para percorrer a mesma distância de 6 km. Qual o valor que mais se aproxima da diferença, em reais, entre as médias do custo por quilômetro rodado ao final das duas corridas? Alternativa **e**.

a) 0,75

b) 0,45

c) 0,38

d) 0,33

e) 0,13

6. (Enem) O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4300 vagas no setor, totalizando 880605 trabalhadores com carteira assinada.

Disponível em: http://www.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano.

Considerando-se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é: Alternativa **c**.

a) $y = 4300x$.

b) $y = 884905x$.

c) $y = 872005 + 4300x$.

d) $y = 876305 + 4300x$.

e) $y = 880605 + 4300x$.

7. (Unesp) Em um dia de aula, faltaram 3 alunas e 2 alunos porque os cinco estavam gripados. Dos alunos e alunas que foram à aula, 2 meninos e 1 menina também estavam gripados. Dentre os meninos presentes à aula, a porcentagem dos que estavam gripados era 8% e, dentre as meninas, a porcentagem das que estavam gripadas era 5%. Nos dias em que a turma está completa, a porcentagem de meninos nessa turma é de: Alternativa **c**.

a) 52%.

b) 50%.

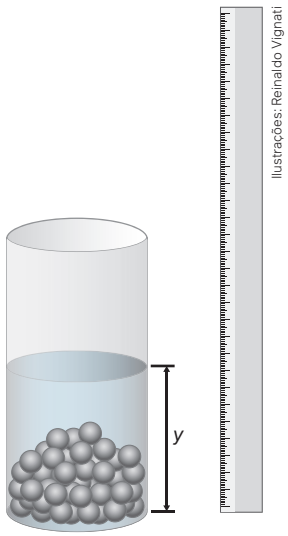
c) 54%.

d) 56%.

e) 46%.

8. (Enem) Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível

da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.



Ilustrações: Reinaldo Vignati

O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

Número de bolas (x)	Nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)?

Alternativa **e**.

a) $y = 30x$

b) $y = 25x + 20{,}2$

c) $y = 1{,}27x$

d) $y = 0{,}7x$

e) $y = 0{,}07x + 6$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

9. (Enem) Em fevereiro [illegible] da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra.

Revista Exame. 21 abr. 2010.

A expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam x horas extras nesse período é:

Alternativa **d**.

a) $f(x) = 3x$.

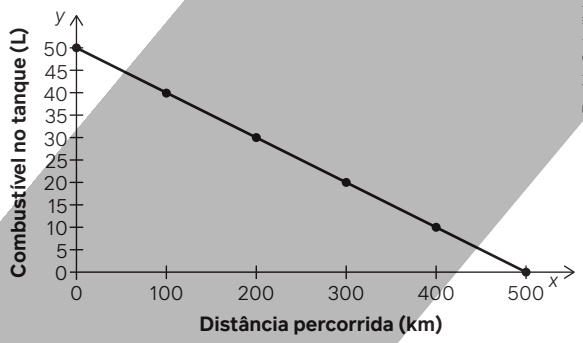
b) $f(x) = 24$.

c) $f(x) = 27$.

d) $f(x) = 3x + 24$.

e) $f(x) = 24x + 3$.

10. (Enem) Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo x (horizontal).



Tarcísio Garbellini

A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é:

Alternativa **b**.

a) $y = -10x + 500$.

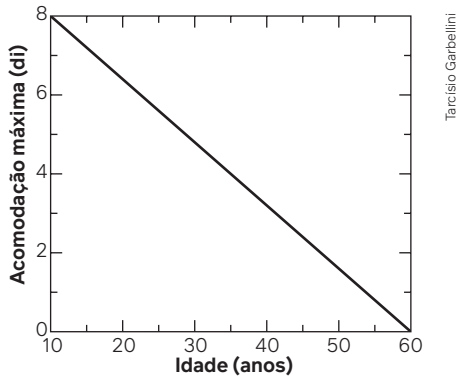
b) $y = -\frac{x}{10} + 50$.

c) $y = -\frac{x}{10} + 500$.

d) $y = \frac{x}{10} + 50$.

e) $y = \frac{x}{10} + 500$.

11. (Enem) O cristalino, que é uma lente do olho humano, tem a função de fazer ajuste fino na focalização, ao que se chama acomodação. À perda da capacidade de acomodação com a idade chamamos presbiopia. A acomodação pode ser determinada por meio da convergência do cristalino. Sabe-se que a convergência de uma lente, para pequena distância focal em metros, tem como unidade de medida a diopria (di). A presbiopia, representada por meio da relação entre a convergência máxima $C_{máx}$ (em di) e a idade T (em anos), é mostrada na figura seguinte.



Tarcísio Garbellini

COSTA E. V., FARIA LEITE C. A. F. **Revista Brasileira de ensino de Física**, v. 20, n. 3, set. 1998.

Considerando esse gráfico, as grandezas convergência máxima $C_{máx}$ e idade T estão relacionadas algebricamente pela expressão:

Alternativa **e**.

a) $C_{máx} = 2T$.

b) $C_{máx} = T2 - 70T + 600$.

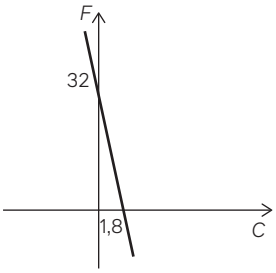
c) $C_{máx} = \log 2\,(T2 - 70T + 600)$.

d) $C_{máx} = 0{,}16T + 9{,}6$.

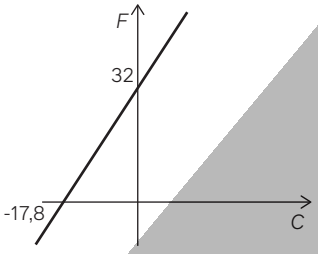
e) $C_{máx} = -0{,}16T + 9{,}6$.

12. (Enem) No Brasil, costumamos medir temperaturas utilizando a escala Celsius. Os países de língua inglesa utilizam a escala Farenheit. A relação entre essas duas escalas é dada pela expressão $F = C \cdot 1{,}8 + 32$, em que F representa a medida da temperatura na escala Farenheit e C a medida da temperatura na escala Celsius.
O gráfico que representa a relação entre essas duas grandezas é: Alternativa **b**.

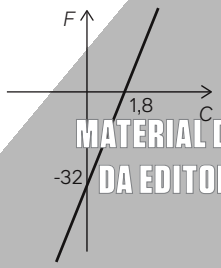
a)



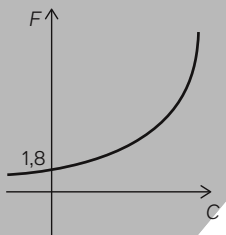
b)



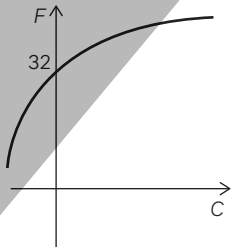
c)



d)



e)



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

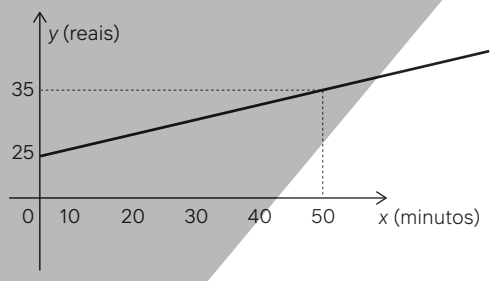
13. (Enem) De acordo com os números divulgados pela Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel), já há no país 91 celulares em cada grupo de 100 pessoas. Entre as várias operadoras existentes, uma propõe o seguinte plano aos seus clientes: R$ 25,00 mensais para até 40 minutos de conversação mensal e R$ 1,00 por minuto que exceda o tempo estipulado.

Disponível em: http://www.economia.ig.com.br. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

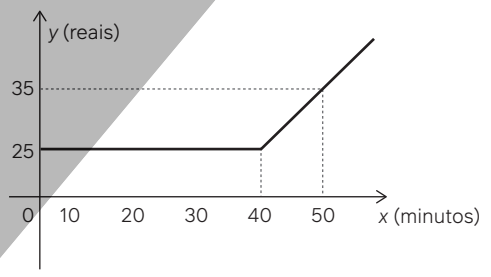
Qual dos gráficos a seguir corresponde aos possíveis gastos mensais (y), em reais, de um cliente dessa operadora de celular, em função do tempo (x) utilizado, em minutos? Alternativa **b**.

Gráficos: Tarcísio Garbellini

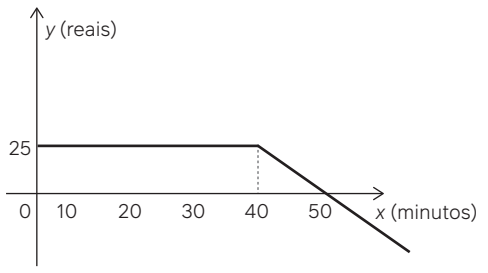
a)



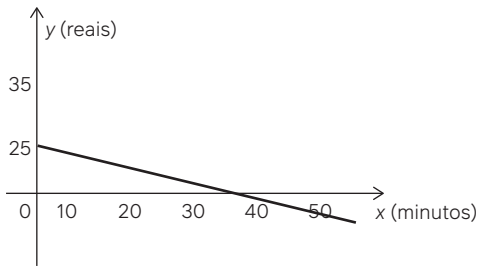
b)



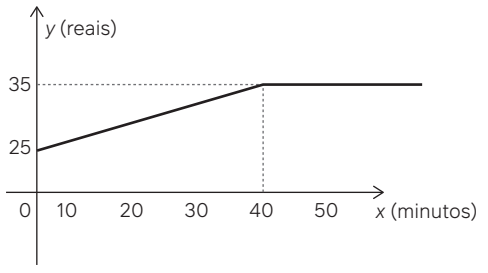
c)



d)



e)



UNIDADE 2

GREG WOOD / AFP

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

PROGRESSÃO ARITMÉTICA, FUNÇÕES E SISTEMAS LINEARES

Acrobatas formam "pirâmide" humana. Sidney, Austrália, 2009.

Nesta unidade, você vai:

- relacionar progressão aritmética com função afim;
- investigar e obter as propriedades de uma progressão aritmética;
- resolver e elaborar problemas envolvendo uma progressão aritmética;
- relacionar a resolução de uma inequação do 1º grau com o estudo do sinal de uma função do 1º grau para resolver problemas;
- utilizar procedimentos para resolução de problemas envolvendo a resolução de sistemas de equações lineares;
- analisar o crescimento linear em situações que envolvem juros simples.

Padrões e relações

Há quem defina a Matemática como a ciência dos padrões e das relações. Com base em observações de fenômenos, a ciência investiga, por meio de padrões observáveis, o comportamento das grandezas envolvidas. Assim, sua busca é o estabelecimento de relações entre essas grandezas.

Uma "pirâmide" humana, como a mostrada na fotografia ao lado, possibilita observar padrões de formação.

1. Como você justifica que os dias 7, 14, 21 e 28 de um mesmo mês sempre estão no mesmo dia da semana?

2. O ano 2004 foi ano bissexto? E o ano 1900? E o ano 2000?

Essas questões propiciam uma discussão para envolver os estudantes no assunto a ser abordado ao longo desta unidade.

1. A semana é formada por 7 dias. Como os números são múltiplos de 7, estarão no mesmo dia da semana do mesmo mês.

2. O ano 2004 foi ano bissexto. O ano 1900 não foi ano bissexto. E o ano 2000 foi ano bissexto. Há uma atividade nesta unidade que explica isso.

1 Sequências numéricas

Na BNCC

Nesta unidade você vai trabalhar as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias 2, 3, 4 e 5 e as habilidades EM13MAT203, EM13MAT301, EM13MAT302, EM13MAT405, EM13MAT507.

Utilizamos sequências numéricas em contextos variados com o objetivo de organizar as informações e de nos orientar de forma geral. Você já observou, por exemplo, como são os números das casas numa mesma rua? Em cidades encontramos placas não apenas das ruas, mas também da numeração das casas e edifícios, como na imagem ao lado.

Maurício Mercer/Folhapress

Placas que indicam o nome de ruas e a numeração de casas e edifícios. Curitiba (PR), 2015.

Para pensar e discutir Orientações no Manual do Professor.

1. Qual é o objetivo da preocupação de enumerar as casas de uma mesma rua?
2. Na rua em que você mora, as casas são numeradas? Como são numeradas dos dois lados da rua?

A contagem dos anos, dos meses, das horas, enfim, nosso calendário de modo geral é uma organização que fazemos, por meio de sequências, para organizar nossa vida. Podemos ter também sequências não necessariamente numéricas, mas que representam uma ordenação. Um exemplo são as estações do ano, que seguem determinado padrão. Se iniciarmos, por exemplo, com o verão, teremos:

..., verão, outono, inverno, primavera, verão, outono, inverno, primavera, ...

Nosso objetivo nesta unidade é estudar sequências, particularmente, uma sequência denominada progressão aritmética. Antes, porém, vamos abordar uma sequência muito curiosa, que faz parte da história da Matemática, já foi incluída em livros de ficção e também em filme. Essa sequência se deve a um personagem que deu uma importante contribuição para a introdução [illegible] numeração indo-arábica na Europa. Contudo, sua fama está relacionada [illegible] sequência de números. Leia o texto a seguir.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Leonardo Fibonacci

No limiar do século XIII despontou a figura de Leonardo Fibonacci ("Leonardo filho de Bonaccio", c. 1175-1250), o matemático mais talentoso da Idade Média. Também conhecido como Leonardo de Pisa (ou Leonardo Pisano). Leonardo nasceu em Pisa, centro comercial importante, onde seu pai era ligado aos negócios mercantis.

Icas94/De Agostini/Getty Images

Leonardo Fibonacci (c. 1175-1250).

Muitas das grandes cidades comerciais italianas daqueles tempos mantinham entrepostos em várias partes do mundo mediterrâneo. Esse foi o caminho que levou Leonardo a receber parte de sua educação em Bejaia, norte da África, onde seu pai fora desempenhar uma função alfandegária.

As atividades do pai logo despertaram no garoto um interesse pela aritmética, que se canalizou, posteriormente, para extensas viagens ao Egito, à Sicília, à Grécia e à Síria, onde pôde entrar em contato direto com os procedimentos matemáticos orientais e árabes. Inteiramente convencido da superioridade prática dos métodos indo-arábicos de cálculo, Fibonacci, em 1202, logo depois de retornar a sua terra natal, publicou sua famosa obra intitulada *Liber abaci*.

Conhecemos esse trabalho através de uma segunda versão surgida em 1228. O trabalho se ocupa de aritmética e álgebra elementares e, embora seja em essência uma pesquisa independente, mostra a influência das álgebras de al-Khwârizmî e Abû Kâmil. O livro ilustra com profusão e defende com energia a notação indo-arábica, muito se devendo a ele pela introdução desses numerais na Europa.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 1997. p. 292-293.

Embora seja indiscutível a importância que sua obra teve para a ampla difusão do sistema de numeração decimal pela Europa, seu nome está relacionado a uma intrigante **sequência numérica** de números inteiros que Leonardo obteve na tentativa de modelar uma população reprodutiva de coelhos – sequência pela qual acabou sendo reconhecido.

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Reúna-se a mais três colegas e, juntos, façam o que se pede.

1. Pesquisem a população reprodutiva de coelhos idealizada por Fibonacci.
2. Escrevam os 20 primeiros números da sequência de Fibonacci.
3. Pesquisem alguma curiosidade a respeito da sequência de Fibonacci.
4. Escrevam um **algoritmo** para formar a sequência de Fibonacci. Apresentem esse algoritmo para outro grupo analisar e verificar a validade. Vocês analisam o algoritmo elaborado por eles e depois, juntos, discutem as análises que fizeram.

Padrões

Podemos ter sequências formadas por figuras geométricas, por exemplo. Também podemos observar e obter relações interessantes envolvendo figuras e números. Veja, por exemplo, a ilustração a seguir.

Para saber mais informações sobre o conceito destacado, consulte o tópico **Algoritmos e fluxogramas** na **Caixa de ferramentas**.

Reinaldo Vignati

Figura 1. Figura 2. Figura 3. Figura 4. Figura 5.

Os triângulos externos das cinco figuras têm o mesmo tamanho e são triângulos equiláteros (seus lados têm as mesmas medidas), e os triângulos menores formados nas figuras também são equiláteros. Mas o que há de interessante nessa sequência de triângulos?

Para pensar e discutir

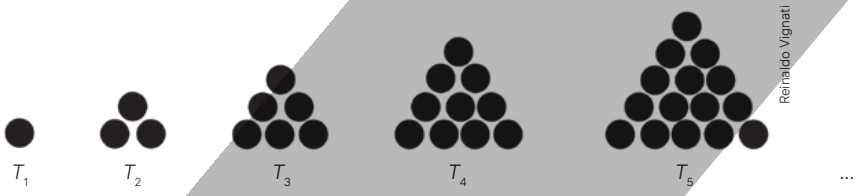
1. Na figura 2, cada um dos triângulos equiláteros congruentes em que a figura está dividida representa que percentual da área do triângulo equilátero da figura 1? 25%
2. Qual é a sequência formada pelas quantidades de triângulos de cor preta nessas cinco figuras? E de triângulos brancos (não importa o tamanho)? Faça uma tabela ou um quadro com essas quantidades. Resposta no Manual do Professor.

Nesta unidade, nosso estudo é voltado aos aspectos gerais a respeito de sequências numéricas, retomando e aprofundando algumas ideias estudadas no Ensino Fundamental.

Padrões numéricos e geométricos

A busca de padrões envolvendo números e formas geométricas aparece na história da Matemática em momentos diversos. Um exemplo está em Pitágoras e seus discípulos, que viveram há mais de 2500 anos na Grécia. Os pitagóricos tinham uma concepção de mundo em que tudo podia, a princípio, ser explicado por meio dos números. Eles elaboraram os chamados números figurados, que podem ser ilustrados por pontos em determinada configuração geométrica, gerando triângulos, quadrados, pentágonos, por exemplo. Vamos exemplificar com três sequências.

Números triangulares



Reinaldo Vignati

A sequência dos números triangulares pode ser representada por meio de parênteses, em que os números (chamados termos da sequência) são separados por ponto e vírgula:

(1; 3; 6; 10; 15;...)

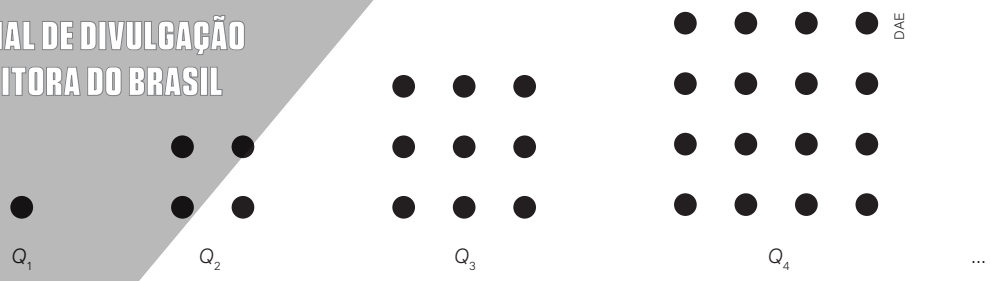
sequência de números triângulares

Um número triangular pode ser representado por uma letra T (triangular) com um índice que indica a ordem do número na sequência:

$$T_1 = 1,\ T_2 = 3,\ T_3 = 6,\ T_4 = 10,\ T_5 = 15,\ \ldots$$

Números quadrados

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL



DAE

Os números quadrados formam uma sequência que pode ser representada por meio de parênteses, em que os números (chamados termos da sequência) são separados por ponto e vírgula:

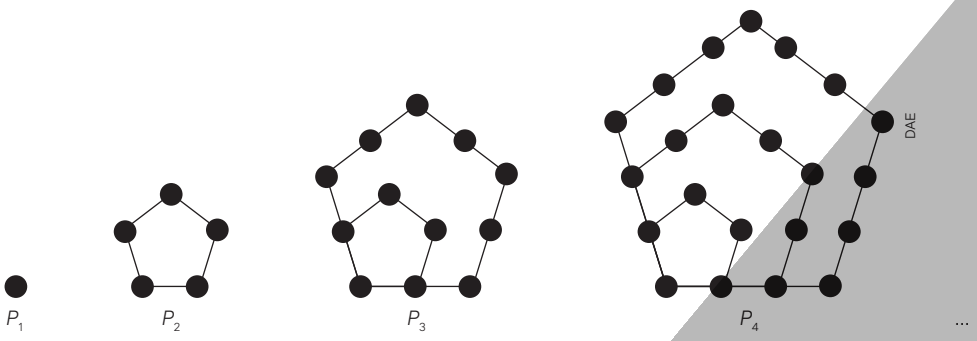
(1; 4; 9; 16; ...)

sequência de números quadrados

Representando cada número quadrado por uma letra Q (quadrado) com um índice que indica a ordem do número na sequência, temos:

$$Q_1 = 1,\ Q_2 = 4,\ Q_3 = 9,\ Q_4 = 16,\ \ldots$$

Números pentagonais



Já a sequência dos números pentagonais observada na figura, é a seguinte:

(1; 5; 12; 22; ...) → sequência de números pentagonais

Analogamente, temos a sequência:

$$P_1 = 1, P_2 = 5, P_3 = 12, P_4 = 22, \ldots$$

Para pensar e discutir Orientações no Manual do Professor.

1. Observando os números triangulares, qual número corresponde a T_6? 21
2. Qual é o 10º termo da sequência dos números quadrados, isto é, Q_{10}? 100
3. Qual é o 5º termo da sequência dos números pentagonais, isto é, P_5? 35
4. Escreva com suas palavras como são formados os números triangulares e os números pentagonais. Resposta pessoal.

Os números pitagóricos correspondem apenas um exemplo de padrões numéricos e de padrões geométricos. Vocês podem criar também uma sequência de números ou de formas geométricas. Observe, por exemplo, como podemos relacionar os números ímpares consecutivos com os números quadrados perfeitos:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

$1 = 1^2$

$1 + 3 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 7^2$

⋮

Essa é uma intrigante sequência!
Você saberia explicá-la?

Para pensar e discutir Orientações no Manual do Professor.

1. Explique oralmente como cada linha é formada? Resposta pessoal.
2. Será que a sequência de números pares consecutivos e positivos pode ser relacionada com alguma outra sequência? Resposta pessoal.

Atividades

Orientações no Manual do Professor.

1. Observe a sequência formada por quadradinhos de mesmo tamanho e faça o que se pede.

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

Reinaldo Vignati

a) Represente a quantidade de quadradinhos que farão parte da Fig. 4 dessa sequência e justifique. 8

b) Quantos quadradinhos farão parte da Fig. 10? 20

c) Quantos quadradinhos farão parte da enésima figura? $2n$

2. A ilustração a seguir representa formas geométricas formadas por palitos, segundo determinado padrão.

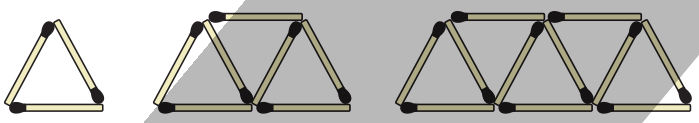


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

Reinaldo Vignati

a) Desenhe no caderno a Fig. 4 que continua essa sequência.

b) A tabela a seguir foi elaborada com base na sequência ilustrada.
A resposta será uma planilha elaborada pelos estudantes.

Figura	Número de palitos	Número de triângulos
1	3	1
2	7	3
3	11	5

Com base a tabela, elabore uma **planilha eletrônica** que contenha as quantidades de palitos e de triângulos para as 20 primeiras figuras dessa sequência. Imprima a planilha ou, com o aparelho celular, faça uma foto dela para apresentar aos colegas.

Para saber mais informações sobre o conceito destacado, consulte o tópico **Recursos digitais** na **Caixa de ferramentas**.

Orientações no Manual do Professor.

3. Esta atividade é uma curiosidade que já apareceu em diversos livros de lógica. É um desafio intrigante. Orientações no Manual do Professor.

Observe atentamente a sequência numérica abaixo, formada por 7 números, sendo o último desconhecido. Há um padrão na formação dos números nessa sequência. Descubra e determine qual número falta.

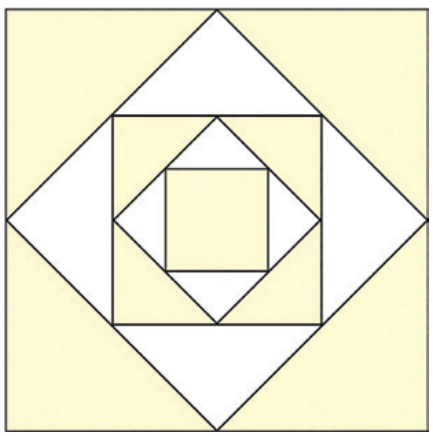
2 → 12 → 16 → 17 → 18 → 19 → //////

4. Elabore um desafio envolvendo sequência numérica para que os colegas resolvam. Nesse desafio, é importante que haja um padrão numérico que relacione os números.

5. Observe como a figura ao lado, composta apenas de quadrados, é formada iniciando com o quadrado maior.

Escreva um algoritmo que determine como essa figura poderá ser formada iniciando com o quadrado maior.

Orientações no Manual do Professor.



Reinaldo Vignati

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Lei de formação de uma sequência

Vamos considerar a seguinte sequência de números naturais, representada entre parênteses e cujos elementos estão separados por ponto e vírgula:

(0; 4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; ...)

→ sequência de números naturais que são múltiplos de 4

Podemos representar essa sequência de números por meio do seguinte quadro:

1º termo	2º termo	3º termo	4º termo	5º termo	6º termo	7º termo	8º termo	...
0 ou 4 · 0	4 ou 4 · 1	8 ou 4 · 2	12 ou 4 · 3	16 ou 4 · 4	20 ou 4 · 5	24 ou 4 · 6	28 ou 4 · 7	...

Para pensar e discutir

1. Qual é o 10º termo dessa sequência? E o 20º termo? 36 e 76, respectivamente
2. Qual é a expressão matemática que representa o n-ésimo termo dessa sequência? $4(n - 1)$
3. Substituindo n, nessa expressão, por 22, qual termo você obtém? O 22º termo da sequência.

A expressão que você obteve na questão 2 é chamada de lei de formação da sequência. Como o próprio nome sugere, ela permite determinar qualquer termo da sequência conhecendo-se sua posição nela. Há uma maneira de representar os termos de uma sequência, por exemplo, pode-se utilizar a letra a (poderia ser outra letra) com um índice que indica a posição do termo nela. Assim, retomando a sequência dos múltiplos naturais de 4, temos:

1º termo: $a_1 = 0$
2º termo: $a_2 = 4$
3º termo: $a_3 = 8$
4º termo: $a_4 = 12$
5º termo: $a_5 = 16$
6º termo: $a_6 = 20$
7º termo: $a_7 = 24$
⋮

nº termo: $a_n = 4 \cdot (n - 1)$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

→ lei de formação da sequência pelo termo geral a_n

Podemos dizer que, de modo geral, as sequências numéricas obedecem a uma lei de formação que pode ser apresentada ou obtida basicamente de duas maneiras diferentes. Observe os exemplos a seguir.

Exemplo 1

Considere a sequência cujos termos são dados por $a_n = (n - 1)^2$, sendo n um número natural não nulo, isto é, $n \in \mathbb{N}^*$.

Atribuindo valores naturais não nulos a n, obtemos alguns dos termos da sequência:

$n = 1$: $a_1 = (1 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0$
$n = 6$: $a_6 = (6 - 1)^2 = 25 \Leftrightarrow a_6 = 25$
$n = 10$: $a_{10} = (10 - 1)^2 = 81 \Leftrightarrow a_{10} = 81$

Termo geral de uma sequência

Quando conhecemos a lei de formação pelo termo geral, cada termo é expresso em função de sua posição na sequência, ou seja, temos uma fórmula que representa a_n em função de n.

Exemplo 2

Quais são os cinco primeiros termos da sequência cujo termo geral é $a_n = (n - 1)^2 + (n + 1)^2$?

Vamos atribuir a n os valores naturais 1, 2, 3, 4 e 5 para obter os cinco primeiros termos dessa sequência:

$n = 1$: $a_1 = (1 - 1)^2 + (1 + 1)^2 = 0 + 4 \Leftrightarrow a_1 = 4$

$n = 2$: $a_2 = (2 - 1)^2 + (2 + 1)^2 = 1 + 9 \Leftrightarrow a_2 = 10$

$n = 3$: $a_3 = (3 - 1)^2 + (3 + 1)^2 = 4 + 16 \Leftrightarrow a_3 = 20$

$n = 4$: $a_4 = (4 - 1)^2 + (4 + 1)^2 = 9 + 25 \Leftrightarrow a_4 = 34$

$n = 5$: $a_5 = (5 - 1)^2 + (5 + 1)^2 = 16 + 36 \Leftrightarrow a_5 = 52$

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Junte-se a um colega para fazer a atividade a seguir.

1. Escrevam uma fórmula do termo geral de uma sequência e, a seguir, determinem os 8 primeiros termos dessa sequência. Resposta pessoal.
2. Expliquem, por meio de uma frase, como a sequência elaborada é formada. Resposta pessoal.
3. Pesquise, individualmente, os anos bissextos e explique, em um pequeno texto, como esses anos são identificados. Resposta pessoal.

Atividades

1. Na sequência parcialmente representada a seguir, as figuras são formadas por triângulos de mesmo tamanho. Então, faça o que se pede.

Ilustrações: DAE

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

a) Escreva os seis primeiros termos da sequência formada pelas quantidades de triângulos que compõem as figuras. 5, 9, 13, 17, 21 e 25.

b) Qual é o 10º termo dessa sequência? 41.

c) Verifique se o termo geral dessa sequência é $a_n = 4n + 1$. Explique como você verificou. Orientações no Manual do Professor.

2. O termo geral de uma sequência é dado por $a_n = \sqrt{n}$, sendo n um número natural não nulo, isto é, $n \in \mathbb{N}^*$. Faça o que se pede a seguir.

a) Escreva os 6 primeiros termos dessa sequência.

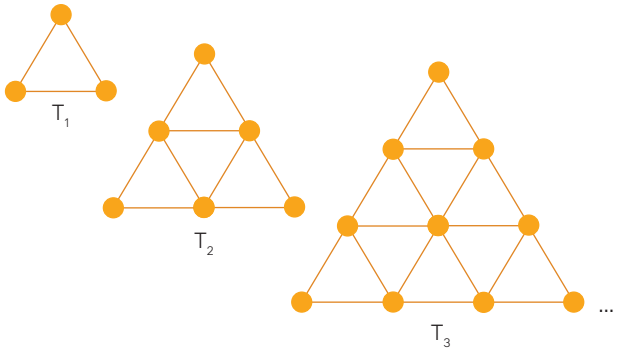
b) Quais são os cinco primeiros números naturais dessa sequência? **2. a)** $(\sqrt{1}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{4}; \sqrt{5}; \sqrt{6})$ **b)** 1, 2, 3, 4 e 5.

3. Determine:

a) os 10 primeiros termos da sequência formada pelos números naturais que são primos. (2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29)

b) o 10º termo da sequência dos números naturais que são cubos perfeitos. 729

4. Observe a figura formada por triângulos e faça o que se pede.



a) Escreva a sequência (apenas os 5 primeiros termos) formada pelas quantidades de pontos ligados pelos segmentos de mesmo tamanho nessas figuras. (3; 6; 10; 15; 21)

b) Escreva a sequência (apenas os 5 primeiros termos) formada pelas quantidades de triângulos de mesmo tamanho que compõem cada figura. (1; 4; 9; 16; 25)

5. No quadro abaixo, considere a sequência de figuras formadas da seguinte maneira: em cada etapa, desde a primeira, são feitos novos triângulos pequenos sobre cada lado livre dos triângulos da figura anterior. Respostas no Manual do Professor.

Etapa	1	2	3	4	5
Figura					
Número de triângulos pequenos	1	4	10	19	31

Ilustrações: Reinaldo Vignati

a) Quantos triângulos pequenos formarão a figura da etapa 6?

b) Explique como a sequência (1; 4; 10; 19; 31; ...) é formada.

6. Observe atentamente como e quais números formam cada linha da figura a seguir.

1ª linha → 1

2ª linha → 1 1

3ª linha → 1 2 1

4ª linha → 1 3 3 1

5ª linha → 1 4 6 4 1

6ª linha → 1 5 10 10 5 1

... ...

Faça o que se pede a seguir.

a) Qual é a sequência formada pelos números que ocuparão a 7ª linha dessa figura? (1; 6; 15; 20; 15; 6; 1)

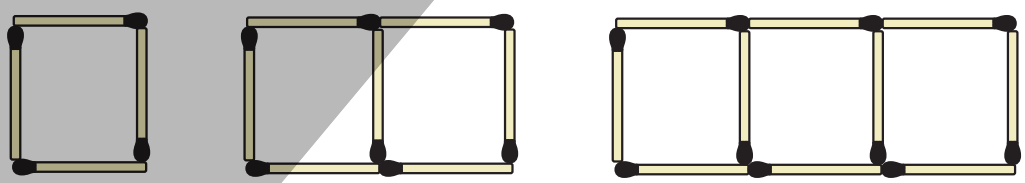
b) Obtenha a sequência formada pela soma dos números que aparecem em cada linha da figura. (1; 2; 4; 8; 16; 32; ...)

c) Qual é a soma de todos os números existentes na 11ª linha dessa figura? 1024

d) Explique em uma frase como essa figura é formada. Resposta pessoal.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

7. A sequência de figuras a seguir é formada por palitinhos de mesmo tamanho.



1ª figura 2ª figura 3ª figura

Faça o que se pede. Orientações no Manual do Professor.

a) Elabore e resolva uma situação envolvendo a sequência formada pelo número de quadradinhos de mesmo tamanho existentes na sequência de figuras.

b) Elabore e resolva uma situação envolvendo a sequência formada pelo número de palitinhos de mesmo tamanho existentes na sequência de figuras.

Depois, entregue essas duas questões a um colega para que ele as resolva. A finalidade é verificar se vocês compreenderam as situações e confrontar as respostas obtidas.

2 Progressão aritmética

Existem sequências numéricas cujos padrões estão relacionados a uma adição de números constantes. Exemplo disso é o que acontece quando, em um restaurante, a pedido dos clientes, juntam-se mesas para que as pessoas do mesmo grupo fiquem próximas.

Por exemplo, na imagem a seguir, considere que uma mesa quadrada acomode quatro pessoas. Ao se juntarem duas mesas, três mesas, e assim por diante, observe o que acontece com a quantidade de lugares para acomodar as pessoas.

Mauro Salgado

Para pensar e discutir

1. Duas mesas separadas acomodam 8 pessoas. Ao se juntarem 2 mesas, quantos "lugares" se perdem? E ao se juntarem 3 mesas? Perdem-se 2 lugares e 4 lugares, respectivamente.
2. Quantas pessoas ao todo podem ser acomodadas juntando-se 4 mesas? 10 pessoas
3. Quantas mesas são necessárias juntar para que 30 pessoas fiquem acomodadas? 14 mesas
4. Qual é a sequência formada pela quantidade de pessoas que podem ser acomodadas em 1 mesa, 2 mesas juntas, 3 mesas juntas, 4 mesas juntas e assim sucessivamente? Explique como formar esse padrão numérico. Resposta no Manual do Professor.

Na situação mostrada, observando-se a quantidade de mesas nas figuras, temos uma sequência numérica (1; 2; 3; 4; ...) com infinitos termos (é claro que há um limite no número de mesas conforme o restaurante). Caso consideremos o número de lugares à medida que vamos juntando as mesas, teremos a sequência (4; 6; 8; 10; 12; ...). Essas duas sequências são exemplos de progressão aritmética.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Progressão aritmética é toda sequência numérica na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo anterior adicionado a uma constante. Essa constante é chamada de razão da progressão.

Há outra maneira de conceituarmos uma progressão aritmética (representada por PA): é a sequência de números na qual a diferença entre cada termo, a partir do segundo, e o termo anterior é constante. Essa constante é a razão da progressão aritmética e é representada pela letra ***r***.

Você pode voltar ao início desta unidade e verificar que sequências apresentadas são exemplos de progressão aritmética. Procure, ao investigar essas sequências, explicar o motivo de elas serem, ou não, exemplos de progressão aritmética.

Analise alguns exemplos a seguir.

Crescente

Se considerarmos a sequência formada pelos números que indicam os anos de eleições brasileiras para presidente no século XXI, temos:

(2002; 2006; 2010; 2014; 2018; ...)

PA crescente de razão igual a 4

Decrescente

Uma caixa-d´água numa residência está cheia com 1500 L de água. Considerando que o consumo por hora seja de aproximadamente 50 L e que não entre mais água nessa caixa ao final das próximas seis horas, vamos escrever a sequência formada pelas quantidades de litros de água com o tempo.

Tempo (h)	0	1	2	3	4	5	6
Capacidade (L)	1500	1450	1400	1350	1300	1250	1200

(1500; 1450; 1400; 1350; 1300; 1250; 1200)

PA decrescente de razão igual a −50

Constante

Pedro recebe 1000 reais, por semana, por um trabalho de digitação que realiza para uma empresa. Assim, a sequência formada pelos salários semana após semana é:

(1000; 1000; 1000; 1000; 1000; ...)

PA constante de razão igual a zero

Para pensar e discutir

1. Que característica deve ter a razão de uma progressão aritmética para que ela seja crescente?
   A razão deve ser maior que zero ($r > 0$).
2. Quanto ao crescimento, qual é a classificação de uma progressão aritmética de razão igual a zero?
   Progressão aritmética constante.
3. O que se pode afirmar quanto ao crescimento de uma progressão aritmética quando sua razão é negativa?
   A progressão aritmética é decrescente.

Termo geral de uma progressão aritmética

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Um dos problemas existentes numa sequência de progressão aritmética é a determinação de um termo dessa sequência conhecendo-se o primeiro termo, a razão da sequência e também a ordem desse termo. Vamos considerar a situação a seguir.

Exemplo

Roberta representou, no quadro abaixo, uma progressão aritmética escrevendo os cinco primeiros termos. Indicou nele o 44º e o 99º termos para os determinar.

4	12	20	28	36	...	a_{44}	...	a_{99}	...

Como você faria para determinar esses dois termos?

Uma possibilidade seria calcular os termos um a um, mas seria extremamente trabalhoso, você não acha? Voltaremos a essa situação após obtermos a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética.

Como numa progressão aritmética qualquer termo a partir do segundo é o termo anterior adicionado a uma constante (razão da PA), podemos escrever:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r \Leftrightarrow a_3 = a_1 + 2 \cdot r$$
$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 2 \cdot r + r \Leftrightarrow a_4 = a_1 + 3 \cdot r$$
$$a_5 = a_4 + r = a_1 + 3 \cdot r + r \Leftrightarrow a_5 = a_1 + 4 \cdot r$$
$$a_6 = a_5 + r = a_1 + 4 \cdot r + r \Leftrightarrow a_6 = a_1 + 5 \cdot r$$
$$\vdots$$

Observe que, com base na definição de progressão aritmética, podemos expressar o segundo, o terceiro, o quarto, o quinto e o sexto termos da sequência em função do primeiro termo e da razão. Então:

Para pensar e discutir Orientações no Manual do Professor.

1. Como obter o 7º termo dessa sequência em função do 1º termo e da razão? $a_7 = a_1 + 6r$
2. E o 100º termo dessa sequência? $a_{100} = a_1 + 99r$
3. Qual é o termo (ordem do termo) que corresponde a $a_1 + 502 \cdot r$? 503º termo
4. E como você representaria o termo a_n? $a_n = a_1 + (n - 1)r$

A fórmula do termo geral de uma progressão aritmética $(a_1; a_2; a_3; \ldots a_n; \ldots)$ de razão igual a r é dada por:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$.

Atribuindo-se alguns valores a n nessa fórmula do termo geral, temos:

$n = 1$: $a_1 = a_1 + (1 - 1) \cdot r \Leftrightarrow a_1 = a_1$

$n = 5$: $a_5 = a_1 + (5 - 1) \cdot r \Leftrightarrow a_5 = a_1 + 4r$

$n = 8$: $a_8 = a_1 + (8 - 1) \cdot r \Leftrightarrow a_8 = a_1 + 7r$

$n = 32$: $a_{32} = a_1 + (32 - 1) \cdot r \Leftrightarrow a_{32} = a_1 + 31r$

Retomando a situação anterior, temos:

Para retomar

Roberta representou, no quadro abaixo, uma progressão aritmética escrevendo os cinco primeiros termos. Indicou nele o 44º e o 99º termos para os determinar.

4	12	20	28	36	...	a_{44}	...	a_{99}	...

Como você faria para determinar esses dois termos?

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- Observando que a razão r dessa PA é igual a 8 e utilizando a fórmula do termo geral, temos:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

44º termo:

$a_{44} = a_1 + (44 - 1) \cdot r$

$a_{44} = a_1 + 43 \cdot r$

$a_{44} = 4 + 43 \cdot 8 \Leftrightarrow a_{44} = 348$

99º termo:

$a_{99} = a_1 + (99 - 1) \cdot r$

$a_{99} = a_1 + 98 \cdot r$

$a_{99} = 4 + 98 \cdot 8 \Leftrightarrow a_{99} = 788$

- Outra maneira de determiná-los seria, inicialmente, obter o termo geral da progressão aritmética em função apenas de n (que indica a posição do termo na PA):

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

Considerando que $a_1 = 4$ *e* $r = 8$

$a_n = 4 + (n - 1) \cdot 8 \Leftrightarrow a_n = 8n - 4$

Substituindo n por 44 e por 99:

$a_n = 8n - 4$

$a_{44} = 8 \cdot 44 - 4 \Leftrightarrow a_{44} = 348$

$a_{99} = 8 \cdot 99 - 4 \Leftrightarrow a_{99} = 788$

Para explorar

Reúna-se a um colega para resolver algumas situações envolvendo progressão aritmética.

1ª parte

1. A sequência (1; 3; 5; 7; ...) é formada pelos números naturais ímpares e consecutivos. Obtenham o 10º termo dessa progressão aritmética. 19
2. Informem qual é o 20º termo dessa sequência e o 100º termo. 39 e 199
3. Obtenham a fórmula do termo geral dessa progressão aritmética. $a_n = 2n - 1$

2ª parte

1. Elaborem 3 progressões aritméticas escrevendo os cinco primeiros termos dessas sequências. Resposta pessoal.
2. Para cada uma dessas progressões aritméticas, obtenham o termo geral correspondente. Resposta pessoal.

3ª parte

1. Pesquisem o significado de interpolação aritmética e, entre os números 10 e 400, façam a interpolação de 14 números formando uma progressão aritmética. Escrevam essa sequência. Resposta pessoal.
2. Elaborem um problema envolvendo interpolação aritmética e apresentem a outra dupla para resolução. Resposta pessoal.

Atividades

1. Considere a progressão aritmética (20; 15; 10; 5; ...). Obtenha:
   a) a fórmula do termo geral dessa sequência; $a_n = -5n + 25$
   b) o 15º termo dessa sequência. -50
2. O termo geral de uma progressão aritmética é dado por $a_n = 4n - 1$. Faça o que se pede a seguir.
   a) Escreva os 4 primeiros termos dessa sequência. (3; 7; 11; 15)
   b) Determine o 25º dessa progressão. 99
3. Numa progressão aritmética, sabe-se que a razão $r = -7{,}2$ e que o primeiro termo $a_1 = 100$. Faça o que se pede a seguir.
   a) Obtenha o [illegible] termo dessa progressão. $-36{,}8$
   b) Escreva a fórmula do termo geral dessa progressão aritmética. $a_n = -7{,}2n + 107{,}2$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

4. Considere a sequência de números reais $(3 - \sqrt{2}\ ;\ 2 - 2\sqrt{2}\ ;\ 1 - 3\sqrt{2}\ )$. Responda:
   a) É uma progressão aritmética? Justifique. Resposta no Manual do Professor.
   b) Qual é o 20º termo dessa sequência? $-16 - 20\sqrt{2}$.
5. Escreva o termo geral da sequência de cada caso a seguir.
   a) Sequência formada por todos os múltiplos de 3 maiores que 100. $a_n = 3n + 99$
   b) Sequência formada por todos os números pares maiores que 1. $a_n = 2n$
   c) Sequência formada por todos os múltiplos de 4 maiores que 50. $a_n = 4n + 48$
6. Resolva cada uma das seguintes situações envolvendo progressão aritmética.
   a) Determine o 8º termo de uma progressão aritmética considerando que seu 3º termo é igual a 16 e a razão é igual a -6. O 8º termo será -14.
   b) Quantos são os termos da progressão aritmética finita $(-2; 3; 8; ...; 48)$? 11 termos
   c) Determine o primeiro termo de uma progressão aritmética considerando que o 10º termo é igual a 39 e a razão é igual a 4. O primeiro termo é 3.
   d) Calcule a quantidade de múltiplos de 7 existentes entre 30 e 250. 31 múltiplos de 7
   e) Elabore e resolva uma situação envolvendo múltiplos de 11 em certo intervalo. Resposta pessoal.
7. Junte-se a um colega para essa atividade.

> Artifício de três números em progressão aritmética de razão r: $(x; x + r; x + 2r)$

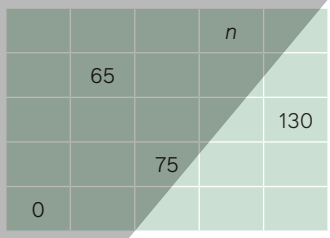
   a) Considerem que três números formam uma progressão aritmética de razão r e, além disso, o termo central seja representado pela letra x. Como vocês representariam os três termos dessa sequência em função de x e de r? $(x - r; x; x + r)$
   b) Agora, imaginem que numa progressão aritmética de razão r o termo central seja x. Como vocês representariam os 5 termos dessa sequência em função de x e de r? $(x - 2r; x - r; x; x + r; x + 2r)$
   c) Verifiquem: se as medidas dos ângulos internos de um triângulo estiverem em progressão aritmética, então uma dessas medidas deverá ser igual a 60°. Resposta no Manual do Professor.
   d) Verifiquem: se as medidas dos três lados de um triângulo retângulo estiverem em progressão aritmética, então os lados terão medidas proporcionais aos números 3, 4 e 5? Resposta no Manual do Professor.

Progressão aritmética e outras relações

A sequência denominada progressão aritmética permite estabelecer relações diversas envolvendo, por exemplo, juros simples e função afim. Além disso, o conhecimento de propriedades que relacionam os termos de uma PA facilita a resolução de situações de contagem.

Apenas para exemplificar, há uma curiosa questão que já fez parte de avaliação para o ingresso em instituição superior envolvendo progressão aritmética. Leia-a com atenção.

(Uerj) A figura ao lado apresenta 25 retângulos. Observe que quatro desses retângulos contêm números e um deles, a letra *n*. Podem ser escritos, em todos os outros retângulos, números inteiros positivos, de modo que, em cada linha e em cada coluna, sejam formadas progressões aritméticas de cinco termos.



Calcule:

a) a soma dos elementos da quarta linha da figura;

b) o número que deve ser escrito no lugar de *n*.

- O item **a** dessa questão pode ser resolvido considerando-se que, na quarta linha da tabela, conhecemos o termo central. Como os cinco números que compõem essa linha formam da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda uma progressão aritmética, podemos expressá-los da seguinte maneira em função da razão *r* da PA:

$$(75 - 2r;\ 75 - r;\ 75;\ 75 + r;\ 75 + 2r)$$

Como queremos a soma desses números, temos:

$$S = (75 - 2r) + (75 - r) + 75 + (75 + r) + (75 + 2r)$$

$$S = 5 \cdot 75 \rightarrow S = 375$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e responder

1. Se três números estiverem em PA de razão ***r*** e o segundo for igual a *x*, como você representa os outros dois em função de *x* e de *r*? Os três termos podem ser representados por $(x - r, x, x + r)$.
2. Desafio: Como você resolveria o item **b** da questão acima? Resposta pessoal. Retomaremos essa questão.

Voltaremos a esse problema após compreendermos as propriedades da PA.

Propriedades de uma progressão aritmética

Escreva no caderno 11 números em progressão aritmética. A seguir, junte-se a um colega para investigar a veracidade das seguintes afirmações sobre essa progressão aritmética:

Afirmação 1 – O 4º termo é a média aritmética entre o 3º termo e o 6º termo.

Afirmação 2 – O 10º termo é a média aritmética entre o 9º termo e o 11º termo.

Afirmação 3 – A soma resultante da adição do 2º termo com o 10º termo é igual à soma resultante da adição do 1º termo e do 11º termo.

Afirmação 4 – A soma resultante da adição do 3º termo com o 9º termo é igual à soma resultante da adição do 1º termo com o 11º termo.

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. A sequência que você elaborou é diferente da sequência feita pelo colega?
2. O que você observou em relação à veracidade das quatro afirmações anteriores?
3. Seu colega chegou à mesma conclusão?

Muito bem! Agora que fez algumas investigações por meio de exemplos que você mesmo elaborou, apresentamos resultados que denominamos propriedades de uma progressão aritmética e os justificamos.

Numa progressão aritmética qualquer, podemos observar duas propriedades que relacionam os termos dela:

Propriedade 1 – Qualquer termo de uma PA, a partir do segundo, é sempre a média aritmética entre os termos anterior e posterior a ele.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \text{ para } n \geqslant 2$$

Exemplo 1

Considerando a progressão aritmética (10; 25; 40; 55; 70; 85, ...), temos, conforme a propriedade:

$25 = \frac{10 + 40}{2}$ $\quad 40 = \frac{25 + 55}{2}$ $\quad 55 = \frac{40 + 70}{2}$ ...

Essa propriedade pode ser justificada por meio do conceito de razão de uma progressão aritmética. Assim, se considerarmos genericamente que os números a, b e c são termos consecutivos de uma PA, então vale:

$$(...; a; b; c; ...) \text{ em PA} \rightarrow \begin{cases} b - a = r & \text{(I)} \\ c - b = r & \text{(II)} \end{cases}$$

Comparando I com II, temos:

$b - a = c - b$

$b + b = a + c$

$2b = a + c \rightarrow b = \frac{a + c}{2}$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

O termo central é a média aritmética dos outros dois.

Propriedade 2 – Em uma PA finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos termos extremos.

Exemplo 2

Considerando a progressão aritmética finita (85, 70, 55, 40, 25, 10, −5, −20), temos que os termos equidistantes dos extremos têm a mesma soma:

85	70	55	40	25	10	−5	−20

Note que, nesse exemplo, a soma de dois termos que são equidistantes dos extremos é igual à soma dos dois termos extremos: soma igual a 65.

Para justificar essa propriedade, vamos considerar uma progressão aritmética finita formada por n termos, em que os termos a_p e a_q, abaixo representados, são equidistantes dos extremos:

$$(a_1; a_2; a_3; \ldots a_p; \ldots a_q; \ldots; a_{n-2}; a_{n-1}; a_n)$$

- Se os termos a_p e a_q são equidistantes dos extremos, então a quantidade de termos existente antes de a_p é a mesma quantidade de termos existente após a_q, isto é:

$$p - 1 = n - q \text{ (I)}$$

- Utilizando o termo geral da progressão aritmética, temos:

$$a_p = a_1 + (p - 1) \cdot r \text{ (II)}$$

$$a_q = a_1 + (q - 1) \cdot r \text{ (III)}$$

- Adicionando membro a membro II com III:

$$a_p + a_q = a_1 + (p - 1) \cdot r + a_1 + (q - 1) \cdot r$$

$$a_p + a_q = a_1 + a_1 + (p - 1 + q - 1) \cdot r$$

(I)

$$a_p + a_q = a_1 + a_1 + (n - q + q - 1) \cdot r$$

$$a_p + a_q = a_1 + a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_p + a_q = a_1 + a_n$$

Retomando a questão dos 25 retângulos (página 56) e as progressões aritméticas, vamos considerar o fato de que, em qualquer linha e em qualquer coluna, temos progressões aritméticas.

- Podemos formar uma PA na primeira coluna utilizando x como o segundo elemento.
- Na 3ª linha, o 3º elemento (representamos por y) é a média aritmética entre $2x$ e 130, isto é:

$$y = \frac{2x + 130}{2} \Rightarrow y = x + 65 \text{ (I)}$$

$4x$			n	
$3x$	65	z		
$2x$		y		130
x		75		
0				

- Na 3ª coluna, o terceiro elemento é a média aritmética entre o 2º e o 4º elementos, isto é:

$$y = \frac{z + 75}{2}$$

Substituindo pela equação (I)

$$2x + 130 = z + 75 \Rightarrow z = 2x + 55 \text{ (II)}$$

- Na 2ª linha, o segundo elemento é a média aritmética entre o 1º e o 3º elementos, ou seja:

$$65 = \frac{3x + z}{2}$$

$$130 = 3x + z$$

Substituindo pela equação (II)

$$130 = 3x + 2x + 55 \Rightarrow x = 15$$

Agora que você conhece o valor de x, é possível preencher a tabela, explorando-a.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

Para explorar

Junte-se a um colega e façam o que se pede a seguir.

1ª parte

1. Façam a tabela anterior substituindo x por 15.
2. Completem a tabela escrevendo todos os termos.

2ª parte

1. Façam uma tabela formada por cinco linhas e cinco colunas.
2. Elaborem 5 progressões aritméticas diferentes nas linhas e 5 progressões aritméticas diferentes nas colunas, deixando alguns elementos para serem completados.

Depois, apresentem essa tabela a outra dupla de colegas para que a preencham aplicando propriedades de progressão aritmética.

1ª parte

1. e **2.**

60	75	90	105	120
45	65	85	105	125
30	55	80	105	130
15	45	75	105	135
0	35	70	105	140

2ª parte

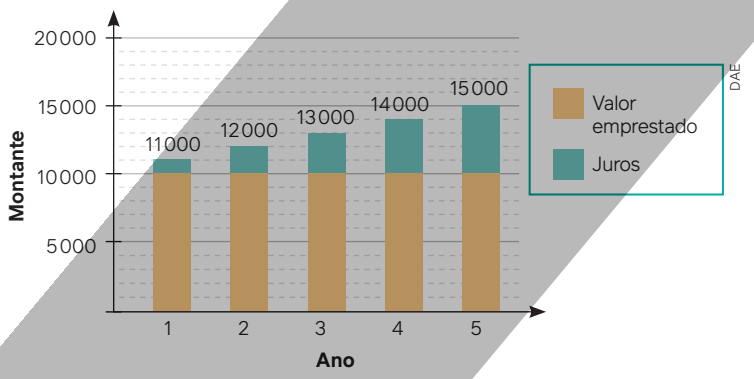
1. e **2.** Resposta pessoal: depende da tabela formada pela dupla.

Juros simples e progressão aritmética

Você sabe o que significa juros? Já ouviu falar em juros simples? Mesmo sem ter observado alguma situação referente ao assunto, você sabe que quando emprestamos dinheiro de algum banco, por exemplo, pagamos uma compensação por esse empréstimo. Essa compensação é chamada de juros. Também pagamos juros (e multa) quando não quitamos uma conta na data de vencimento.

Vamos supor que Júlia pegou emprestados R$ 10.000,00 de seu pai. Ela combinou que pagaria juros de 10% ao ano na modalidade de juros simples, isto é, os juros seriam calculados anualmente sempre tomando por base o capital emprestado. Para compreender como seria a sequência de montantes (montante = capital + juros) se ela não efetuasse nenhum pagamento ao longo dos cinco primeiros anos, Júlia elaborou o gráfico ao lado:

Dívida a juros simples



Fonte: Dados fornecidos por Júlia (dados fictícios).

Observação;
Juros simples são os juros cobrados sobre o valor emprestado.

Para pensar e discutir

1. Os juros, ano a ano, estão aumentando? Justifique.
   Não. Os juros são fixos e representam sempre 10% sobre o valor emprestado.
2. E os montantes ano a ano? Justifique.
   Sim. Eles aumentam sempre R$ 1.000,00, correspondentes a 10% sobre o valor emprestado.
3. Qual será a dívida no final de 10 anos caso Júlia não efetue nenhum pagamento? R$ 20.000,00.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Observando o gráfico elaborado por Júlia é possível perceber que o crescimento do montante ano a ano é sempre o mesmo. Assim, se considerarmos a sequência formada pelos montantes, estaremos [illegible] sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o anterior acrescido dos juros do período, sendo que os juros são sempre os mesmos.

Observando a sequência formada pelos montantes ao longo dos cinco primeiros anos, temos uma progressão aritmética:

(11 000; 12 000; 13 000; 14 000; 15 000) → PA de razão igual a 1 000

No regime de juros simples, os montantes formam uma progressão aritmética em que a razão corresponde ao juro cobrado em cada período, isto é, o percentual aplicado ao capital inicial.

Se considerarmos um capital C aplicado a uma taxa i (na forma decimal) na modalidade de juros simples, os montantes (M_n) ao longo de períodos irão formar a seguinte progressão aritmética:

$$M_1 = C + iC = C(1 + i)$$
$$M_2 = C(1 + i) + iC = C(1 + 2i)$$
$$M_3 = C(1 + 2i) + iC = C(1 + 3i)$$
$$\vdots$$

Para pensar e discutir

1. Seguindo esse padrão, qual é o montante ao final do quarto período de aplicação, isto é, como seria M_4 em função de C e de i? $M_4 = C(1 + 4i)$
2. E qual seria o M_{10} nessa mesma sequência? $M_{10} = C(1 + 10i)$

Agora observe o que acontece quando aplicamos a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética considerando a sequência dos montantes:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$
$$M_n = M_1 + (n - 1) \cdot iC$$
$$M_n = C(1 + i) + (n - 1) \cdot iC$$
$$M_n = C + iC + niC - iC$$
$$M_n = C + niC \Rightarrow M_n = C(1 + ni)$$

Para explorar

Resposta no Manual do Professor.

Junte-se a um colega e façam o que se pede a seguir.

1ª parte

Considerem uma dívida de R$ 6.000,00 ao longo de 10 meses, a juros simples de 1,5% ao mês.

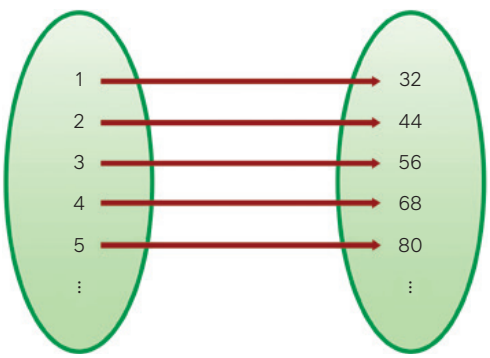
Utilizando planilha eletrônica, elaborem uma tabela e um gráfico de colunas com os valores mês a mês dessa dívida considerando que não houve pagamento.

2ª parte

Criem uma situação envolvendo um empréstimo feito na modalidade de juros simples ao longo de 12 meses. Com base nela, escrevam a sequência dos montantes considerando que não houve pagamento ao longo dos 12 meses.

Funções e progressão aritmética

Quando escrevemos o termo geral de uma progressão aritmética, expressamos qualquer termo em função de sua posição na sequência. Por exemplo, vamos considerar a progressão (32, 44, 56, 68, 80, ...). No diagrama ao lado, representamos a relação entre os índices (que indicam as posições dos termos na sequência) e os termos da PA.



Mauro Salgado

Agora, observe o que acontece quando obtemos o termo geral dessa progressão aritmética:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$
$$a_n = 32 + (n - 1) \cdot 12$$
$$a_n = 12n + 20$$
$$a_n = f(n) = 12n + 20$$

O termo geral é uma função de n (n sendo um número natural não nulo que indica a posição do termo na sequência).

Observe o que acontece nessa função quando atribuímos à variável n valores naturais iniciando por 1:

$$n = 1 \rightarrow a_1 = f(1) = 12 \cdot 1 + 20 \Rightarrow a_1 = f(1) = 32$$
$$n = 2 \rightarrow a_2 = f(2) = 12 \cdot 2 + 20 \Rightarrow a_2 = f(2) = 44$$
$$n = 3 \rightarrow a_3 = f(3) = 12 \cdot 3 + 20 \Rightarrow a_3 = f(3) = 56$$
$$\vdots$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

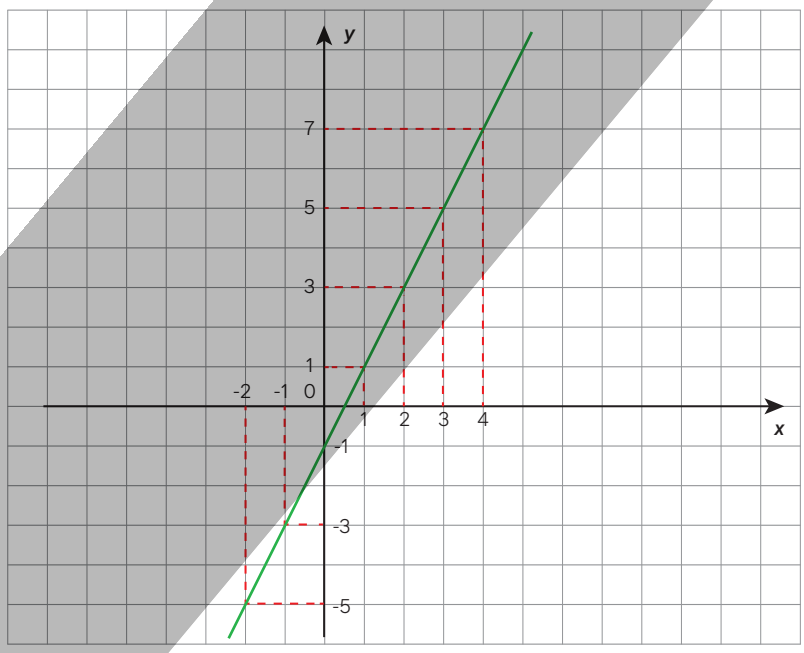
Para pensar e discutir

1. Na função obtida no exemplo, isto é, $f(n) = 12n + 20$, qual o significado do coeficiente da variável n? E o que esse coeficiente representa na progressão aritmética? Qual é o significado de $f(10)$ em relação à progressão aritmética? É chamado de taxa de crescimento da função e, na progressão aritmética, indica o valor da razão. É o 10º termo da progressão aritmética.
2. Na função afim definida por $f(x) = -5x + 20$, a sequência $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$; ... representa uma PA. Qual é a razão dessa PA? Representa uma PA de razão -5.

Observamos anteriormente a relação entre o termo geral de uma progressão aritmética e a lei de formação de uma função afim. Agora, vamos analisar graficamente uma função afim definida no conjunto dos números reais. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo

No plano cartesiano ao lado está esboçado o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 1$. Observe alguns desses pontos no gráfico.



Mauro Salgado

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Vamos listar os pares ordenados indicados com linha tracejada no gráfico na ordem em que eles aparecem, ou seja, da esquerda para a direita:

Valores das abscissas

$(-2; -5)$
$(-1; -3)$
$(0; -1)$
$(1; 1)$
$(2; 3)$
$(3; 5)$
$(5; 7)$

Valores das ordenadas

Para pensar e discutir Orientações no Manual do Professor.

1. Qual é a taxa de crescimento da função afim? Como você a identificou?
2. Os valores das abscissas, na ordem colocada acima, estão variando de quanto em quanto? E na mesma ordem, o que ocorre com os valores das ordenadas correspondentes?
3. As ordenadas indicadas formam uma progressão aritmética? Qual é a relação entre a taxa de crescimento da função e a razão da progressão aritmética?

Atividades

1. Considere a função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 10$. Responda:

a) A sequência $(f(1); f(2); f(3); ...)$ é uma progressão aritmética? Sim. É uma PA de razão igual a 2.

b) Qual é o valor da diferença $f(30) - f(29)$? A que ele corresponde?
O valor é 2 e corresponde à razão da progressão aritmética.

2. Considere a progressão aritmética em que estão representados os três primeiros termos (10; 8; 6; ...). Determine:

a) o termo geral dessa progressão aritmética em função de n; $a_n = -2n + 12$

b) o 120º termo dessa sequência. -228

3. Em cada caso a seguir, a sequência representada é uma progressão aritmética. Determine x.

a) $(4x; x + 2; -x - 6)$ 10 Orientações no Manual do Professor.

b) $x^2 - 1; 4x - 1; x + 5)$ $x = 1$ ou $x = 6$

4. Considere a função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -2x - 1$. Respostas no Manual do Professor.

a) Indique o conjunto imagem dessa função.

b) Esboce no plano cartesiano o gráfico dessa função.

5. Juliana contraiu uma dívida de R$ 1.500,00 com um colega de trabalho. Combinou que pagaria 2% ao mês de juros na modalidade de juros simples e que pagaria o empréstimo e os juros correspondentes em um só pagamento 8 meses depois.

a) Elabore uma tabela contendo, mês a mês, os juros e os montantes correspondentes.
Resposta no Manual do Professor.

b) Qual valor ela deverá pagar, no final, somente de juros? R$ 240,00

c) E que valor total deverá pagar? R$ 1.740,00.

6. Elabore uma situação de empréstimo a juros simples usando como referência a situação da atividade anterior, porém com dados diferentes. Apresente essa situação a um colega para que ele a resolva e, no final, confira os resultados obtidos. Resposta pessoal.

Soma dos termos de uma progressão aritmética

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Você já deve ter já ouviu falar dos pitagóricos. Anteriormente, no início desta unidade, já abordamos os números figurados. Os chamados padrões numéricos associados às formas geométricas fizeram com que pitagóricos dedicassem boa parte de seu tempo buscando regularidades. Assim, como fruto de suas pesquisas, surgiram os números triangulares, os números quadrados, os números pentagonais etc.

Nesse contexto, atribui-se a *Nicômaco de Gerasa* (c. 60 d.C. – 120 d.C.) um resultado muito curioso envolvendo a soma de cubos de números naturais consecutivos e o quadrado da soma desses mesmos números naturais. A seguir, você poderá observar esse resultado.

$$1^3 = 1^2$$
$$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)^2$$

Um problema a ser resolvido: Qual é o valor da soma $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + (...) + 20^3$?

Expresse, com suas palavras, como calcularia esse resultado. Que tal calculá-lo e anotar o procedimento no caderno? O resultado é 44100.

Queremos resolver a situação sem calcular a soma dos cubos. Retornaremos a esse problema resolvendo-o por meio da soma dos termos de uma progressão aritmética. Antes, leia um texto extraído sobre a história da Matemática que trata da precocidade de um gênio matemático.

Carl Gauss

SSPL/Getty Images

Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Carl foi uma das mais notáveis crianças prodígio, dessas que aparecem de raro em raro. Diz-se que com a idade de 3 anos detectou um erro aritmético no borrador de seu pai. Há uma história segundo a qual o professor de Carl na escola pública, quando ele tinha 10 anos de idade, teria passado à classe, para mantê-la ocupada, a tarefa de somar os números de 1 a 100. Quase que imediatamente Carl colocou sua lousa sobre a escrivaninha do irritado professor. Quando as lousas foram finalmente viradas, o professor, surpreso, verificou que Carl tinha sido o único a acertar a resposta correta, 5050, mas sem fazê-la acompanhar de nenhum cálculo. Carl havia mentalmente calculado a soma da progressão aritmética $1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$, observando que $100 + 1 = 101$, $99 + 2 = 101$, $98 + 3 = 101$, e assim por diante, com os cinquenta pares possíveis dessa maneira, sendo a soma, portanto, $50 \cdot 101 = 5050$. Mais tarde, quando adulto, Gauss costumava jactar-se de ter aprendido a contar antes de aprender a ler.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 519.

Para pensar e discutir

1. Como Carl calculou $1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$? Explique. Resposta pessoal.
2. Qual o resultado de $2 + 4 + 6 + \ldots + 100 + 102 + 104$? Utilize o procedimento de Carl. 2756
3. Qual é a propriedade de uma PA que permite justificar o procedimento de Carl? Resposta no Manual do Professor.

Observe que a soma calculada por Carl envolve termos de uma progressão aritmética. Assim, vamos obter uma relação matemática que permita calcular a soma dos n termos de uma progressão aritmética conhecendo o primeiro termo, o último termo e a quantidade de termos da sequência.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- Escrevemos a soma dos n termos da PA de duas maneiras:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ (I)

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$ (II)

- Adicionamos membro a membro I e II agrupando os termos do segundo membro de dois em dois:

$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$

- Observando que dois termos equidistantes dos extremos têm a mesma soma que a dos dois termos extremos:

$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$

$2 \cdot S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ vezes}}$

$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ ou $S_n = \left(\dfrac{a_1 + a_n}{2}\right) \cdot n$

soma dos n primeiros termos da PA

A soma dos n termos de uma progressão aritmética pode ser calculada pela relação:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \cdot n$$

Vamos retomar a situação envolvendo a soma de cubos de números naturais:

Para retomar

$1^3 = 1^2$

$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)^2$

Um problema a ser resolvido: Qual é o valor da soma $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + 20^3$?

- Conforme visto, podemos escrever:

$x = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + 20^3$

$x = (1 + 2 + 3 + \ldots + 20)^2$

Utilizamos a fórmula: $S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \cdot n$

$x = \left[\left(\frac{1 + 20}{2}\right) \cdot 20\right]^2$

$x = 210^2$

$x = 44\,100 \Rightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + 20^3 = 44\,100$

Atividades

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1. Faça o que se pede.

a) Calcule a soma dos 100 primeiros números naturais ímpares. 10 000

b) Calcule a soma dos n primeiros números naturais ímpares. n^2

2. A expressão $S_n = 2n^2$ representa a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética. Então:

a) determine o primeiro termo da PA; 2

b) determine o segundo termo da PA; 6

c) obtenha a razão da PA; 4

d) calcule o 20º termo dessa sequência. 78

3. Considere a progressão aritmética $(-10; -6; -2; \ldots)$ e faça o que se pede.

a) Obtenha a fórmula que representa o termo geral dessa sequência. $a_n = 4n - 14$

b) Determine a expressão matemática que representa a soma dos n termos dessa progressão aritmética em função do número de termos n. $S_n = 2n^2 - 12n$

4. Reúna-se a um colega e façam a atividade a seguir. Respostas pessoais.

a) Elaborem uma progressão aritmética decrescente.

b) Escrevam a fórmula do termo geral dessa sequência.

c) Com base na fórmula do termo geral, obtenham uma expressão matemática que forneça a soma (S_n) dos seus n termos em função apenas do n.

5. Resolva as seguintes situações.

a) Sabe-se que a soma dos 10 termos de uma progressão aritmética é igual a 200. Calcule o 10º termo dessa progressão considerando que o 1º termo é igual a 2. 38

b) Numa progressão aritmética formada por 100 termos, sabe-se que o 3º termo é 10 e o 98º termo é igual a 90. Qual é a soma dos termos dessa progressão aritmética? 5000

c) Numa progressão aritmética finita, sabe-se que o 1º termo é 3 e o último termo é igual a 31. Se, além disso, a soma de todos os termos for igual a 136, quantos termos tem essa sequência? 8 termos

3 Funções e inequações

Você sabe o que é uma microempresa?

É comum ouvirmos que o brasileiro é muito criativo. Devido a inúmeras pressões e dificuldades do mundo contemporâneo, muitas pessoas estão usando a criatividade para abrir pequenas empresas. A partir de uma boa ideia e de bastante trabalho acabam tendo uma fonte de renda. Um exemplo disso está ligado à alimentação. Pequenas empresas familiares iniciam seus negócios alimentícios, por exemplo, com uma receita de trufa de chocolate.

Fernando Favoretto/Criar Imagem

Trufas de chocolate produzidas artesanalmente.

Agora, não basta saber fazer uma saborosa trufa de chocolate para que o empreendimento dê certo. É necessário buscar apoio, principalmente no que diz respeito à questão financeira. Para isso, existem órgãos públicos que fornecem orientações de como a empresa dever ser organizada e mantida.

Vamos considerar, por exemplo, que alguém de sua família resolva produzir trufas de chocolate para vender. Algumas questões iniciais a respeito das trufas precisariam ser respondidas diretamente.

Para pensar e discutir Orientações no Manual do Professor.

1. Quais os ingredientes necessários para fazer uma trufa de chocolate?
2. Quais os custos desses ingredientes?
3. Em que ambiente essas trufas seriam produzidas?
4. Como estocar as trufas?
5. Qual o valor de venda de cada trufa?
6. Nesse exemplo, que outras questões você faria?

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Por que todos esses e outros cuidados devem ser tomados ao abrir uma pequena empresa? Existem dados estatísticos que podem nos ajudar para uma resposta:

> Porque 82% das empresas são encerradas em até seis meses.

SEBRAE. Causa mortis: o sucesso e o fracasso das empresas nos primeiros cinco anos de vida. São Paulo: Sebrae, 2014. Disponível em: https://bibliotecas.sebrae.com.br/chronus/ARQUIVOS_CHRONUS/bds/bds.nsf/333000e30d218194165cd787496e57f9/$File/5712.pdf. Acesso em: 11 maio 2020.

A Matemática pode auxiliar na questão do levantamento de custos, nos cálculos de valor de venda para a determinação de lucros que possibilitem que empresas sobrevivam e não tenham suas portas fechadas. Vamos considerar a situação a seguir, que envolve uma pequena empresa de trufas de chocolate.

Exemplo

Marta iniciou uma pequena empresa para produzir trufas de chocolate. Observou que o custo de fabricação era dividido em duas partes. A primeira parte era independente da quantidade de chocolates produzidos e tinha um valor mensal aproximado de R$ 1.600,00. Já a segunda, era constituída pelo custo de R$ 0,90 para a produção de cada trufa. Marta resolveu vender cada trufa por R$ 3,50.

Para pensar e discutir

1. Se numa situação de comércio L representa lucro, V representa valor de venda e C representa o custo, como você relaciona esses valores por meio de uma igualdade? $L = V - C$
2. Lúcia terá lucro se produzir e vender 200 trufas no mês? Justifique. Não. Terá um prejuízo de R$ 1.080,00.
3. E se Lúcia produzir e vender 800 trufas no mês? Justifique. Sim. Terá um lucro de R$ 480,00.
4. Quantas trufas no mínimo ela deverá vender no mês para ter lucro?
   Essa questão será retomada no decorrer da unidade.

Na situação apresentada, Lúcia observou que além do custo variável, ou seja, aquele que depende da quantidade de trufas produzidas e vendidas, havia um custo fixo mensal. Esse custo fixo normalmente pode ser o consumo de energia, de água, valor de aluguel etc. A equação $L = V - C$ representa a relação entre lucro, valor de venda e custo. Para ser considerado lucro, devemos ter L positivo. Se L for negativo, dizemos que há prejuízo e, quando L for igual a zero, não há nem lucro nem prejuízo.

Para explorar

Sugestão de encaminhamento: em duplas. Orientações no Manual do Professor.

Explorem essa mesma situação com o auxílio de **planilha eletrônica** na tentativa de descobrir a partir de qual quantidade de trufas produzidas e vendidas Lúcia terá lucro.

Instruções

1. Abram uma planilha eletrônica e façam uma tabela com as seguintes informações:

Quantidade	Valor de venda	Valor de custo	Lucro/Prejuízo

A coluna "Quantidade" refere-se ao número de trufas produzidas e vendidas e as demais colunas aos valores totais de venda, de custo e de lucro (ou prejuízo) correspondentes.

2. Investiguem algumas quantidades atribuindo valores para a coluna "Quantidade".
3. Para cada valor atribuído no item anterior, preencham os valores correspondentes nas demais colunas.

Ao final, elaborem um texto para explicar as conclusões tiradas com base nos valores atribuídos e informar a partir de qual quantidade foi possível obter lucro.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para saber mais informações sobre o recurso destacado, consulte o tópico **Recursos digitais** na **Caixa de ferramentas**.

Agora que você explorou a situação e, provavelmente, já tirou suas conclusões, apresentamos uma forma alternativa de resolvê-la envolvendo conhecimentos algébricos. Como desconhecemos a quantidade de trufas que Lúcia deverá produzir e vender, vamos representá-la por meio de uma variável. Com base nisso, podemos obter expressões algébricas que representem L, V e C:

- trufas: x
- custo total da produção considerando x a quantidade de trufas: $C(x) = 0{,}90 \cdot x + 1600$
- valor de venda em função de x: $V(x) = 3{,}50 \cdot x$
- cálculo do lucro em função de x:

$$L(x) = V(x) - C(x)$$
$$L(x) = 3{,}50x - (0{,}90x + 1600)$$
$$L(x) = 3{,}50x - 0{,}90x + 1600$$
$$L(x) = 2{,}60x - 1600$$

Para que tenhamos lucro, devemos ter $L(x)$ assumindo apenas valores positivos, isto é:

$L(x) > 0$

$2{,}60x - 1600 > 0$

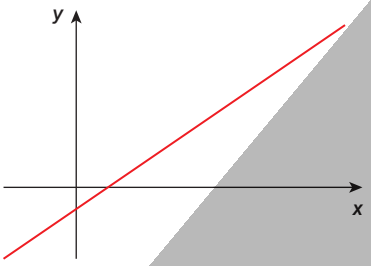
Essa desigualdade é chamada de inequação do 1º grau na incógnita x.

A resolução de uma inequação do 1º grau envolve o conhecimento do sinal de uma função afim. A seguir vamos compreender como resolver uma inequação do 1º grau. Então, voltaremos a essa situação.

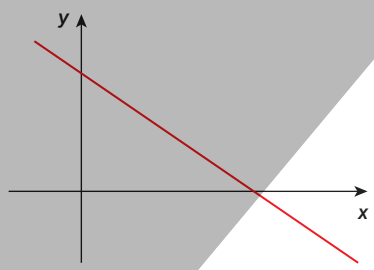
Estudo dos sinais de uma função do 1º grau

Ampliaremos agora o estudo de função afim desenvolvido na Unidade deste livro. Essa ampliação nos possibilita enfrentar matematicamente situações que envolvem inequações.

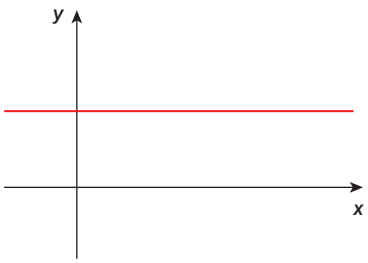
Lembre-se de que uma função afim é representada pela lei $f(x) = ax + b$, com a e b números reais. O gráfico de uma função afim, no plano cartesiano, quando a variável x é real, é uma reta. Existem três situações possíveis para o comportamento do gráfico quanto ao crescimento.



Função crescente.



Função decrescente.



Função constante.

Gráficos: Tarcísio Garbellini

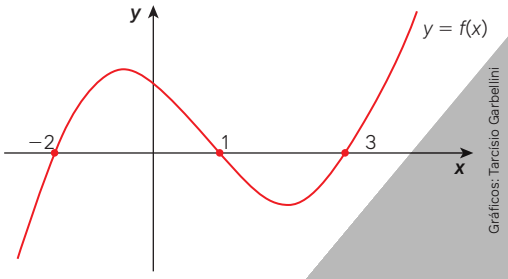
MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. Considerando $f(x) = ax + b$, qual é a condição para o gráfico representar uma função constante?
2. E uma função crescente? E decrescente?
3. Qual é a condição para que uma função afim seja denominada função do 1º grau?
4. Quantos pontos em comum com o eixo das abscissas pode ter o gráfico de uma função do 1º grau?
5. Sendo x a variável real, como é o gráfico da função $f(x) = ax + b$ em que a e b são ambos iguais a zero? Quantos pontos em comum haverá com o eixo das abscissas?

O comportamento gráfico de uma função nos auxilia a compreender melhor como, por exemplo, as grandezas envolvidas estão relacionadas. Além de observarmos o crescimento ou decrescimento de uma grandeza em função da outra, podemos analisar o **sinal da função**.

Nosso interesse agora é o estudo do sinal de uma função do 1º grau. Entretanto, antes de procedermos com esse estudo, consideramos importante que você tenha uma ideia mais abrangente do que é o estudo do sinal de uma função qualquer. Assim, considere que no plano cartesiano esteja representado o gráfico a seguir, de determinada função:



Gráficos: Tarcisio Garbellini

Ao observar esse gráfico, sabemos que existem pontos em comum com o eixo das abscissas, assim como existem valores de x para os quais as imagens em correspondência são positivas ou negativas, isto é, os pontos estão acima ou abaixo do eixo das abscissas, respectivamente.

Vamos organizar essas ideias por meio das seguintes questões:

Para pensar e discutir

1. Para quais valores de x tem-se $y = 0$? Para $x = -2$, para $x = 1$ e para $x = 3$.
2. Para quais valores de x tem-se $y > 0$? Para $-2 < x < 1$ ou para $x > 3$.
3. Para quais valores de x tem-se $y < 0$? Para $x < -2$ ou para $1 < x < 3$.

Estudar o sinal de uma função, de modo geral, significa obter respostas para as seguintes questões:

- Para quais valores de x a função f se anula?
- Para quais valores de x a função f assume imagens positivas?
- Para quais valores de x a função f assume imagens negativas?

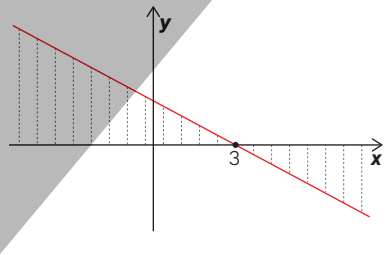
Já no caso de uma função afim, particularmente da função do 1º grau ($a \neq 0$), o estudo é simplificado pelo fato de termos apenas uma raiz, isto é, um valor de x em que o gráfico intercepta o eixo das abscissas.

Observe os dois exemplos a seguir, em que estudamos o sinal com base no gráfico.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Exemplo 1

A função f é do 1º grau e seu gráfico é representado por meio de uma reta.



- Analisando o sinal dessa função:

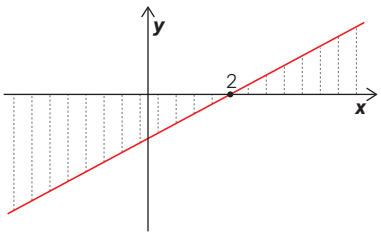
  $y = 0$ para $x = 3$

  $y > 0$ para $x < 3$

  $y < 0$ para $x > 3$

Exemplo 2

A função f é do 1º grau e seu gráfico é representado por meio de uma reta.



- Analisando o sinal dessa função:

  $y = 0$ para $x = 2$

  $y > 0$ para $x > 2$

  $y < 0$ para $x < 2$

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Utilize um ***software* de geometria dinâmica** para o estudo do sinal de uma função do 1º grau. Siga as instruções:

1. Trace os gráficos no plano cartesiano das seguintes funções:

- $f_1(x) = -2x + 3$
- $f_2(x) = 4x$
- $f_3(x) = 5x - 10$
- $f_4(x) = -3x$

2. Em cada um dos gráficos indiquem:

a) os valores de x que anulam a função;

b) os valores de x para os quais a função tem imagem positiva;

c) os valores de x para os quais a função tem imagem negativa.

Resumam, por meio de um texto, as conclusões sobre o estudo do sinal dessas funções.

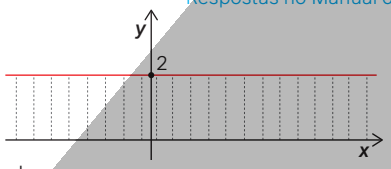
A construção de gráficos utilizando recursos de um *software* de geometria dinâmica é um facilitador para o estudo do sinal de uma função, conhecendo-se sua lei de formação. Sem utilizar esse recurso, para o caso de funções afim basta fazer um esboço gráfico, verificar em que ponto intercepta o eixo das abscissas, analisar o crescimento e observar o sinal. Numa função constante (que é um caso de função afim), essa análise de sinal também pode ser feita. Pense nisso para resolver as duas primeiras atividades a seguir.

Para saber mais informações sobre o recurso destacado, consulte o tópico **Recursos digitais** na **Caixa de ferramentas**.

Atividades

1. No plano cartesiano a seguir está representado o gráfico da função constante $f(x) = 2$.

Respostas no Manual do Professor.



Responda:

a) Para quais valores reais de x tem-se $y = 0$?

b) Para quais valores reais de x tem-se $y > 0$?

c) Para quais valores reais de x tem-se $y < 0$?

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

2. Esboce no plano cartesiano o gráfico da função real definida por $f(x) = -3$. Depois, responda:

a) Para quais valores reais de x tem-se $y = 0$? Nenhum.

b) Para quais valores reais de x tem-se $y > 0$? Nenhum.

c) Para quais valores reais de x tem-se $y < 0$? Todos.

3. Esboce no plano cartesiano o gráfico da função real definida por $f(x) = 2x - 8$. Depois, responda:

a) Para quais valores reais de x tem-se $y = 0$? $x = 4$

b) Para quais valores reais de x tem-se $y > 0$? $x > 4$

c) Para quais valores reais de x tem-se $y < 0$? $x < 4$

4. Estude o sinal de cada função real a seguir de acordo com sua lei de formação.

Respostas no Manual do Professor.

a) $f(x) = -2x - 10$

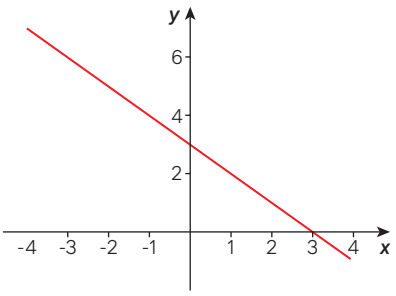
b) $f(x) = 4x$

c) $f(x) = -10$

d) $f(x) = 4x + 9$

5. Elabore a lei de formação de uma função do 1º grau, esboce o gráfico correspondente e, depois, faça o estudo do sinal dessa função. Em seguida, apresente essa lei de formação para que algum colega possa também fazer esse estudo. Ao final, confronte os resultados obtidos. Resposta pessoal.

6. Mateus utilizou um *software* de geometria dinâmica e obteve o seguinte gráfico de uma função afim. Analise o gráfico e faça o que se pede.



Gráficos: Tarcísio Garbellini

a) Escreva dois valores inteiros de x que têm imagens positivas. Resposta pessoal.

b) Escreva dois valores naturais de x que têm imagens negativas. Resposta pessoal.

c) Determine todos os valores reais de x para os quais as imagens são positivas. $x < 3$

d) Determine todos os valores reais de x para os quais as imagens são negativas. $x > 3$

e) Responda: Qual é o zero dessa função? $x = 3$

Resolução de inequações do 1º grau

Vamos retomar a situação apresentada na página 66.

Para retomar

$$L(x) = V(x) - C(x)$$
$$L(x) = 3{,}50x - (0{,}90x + 1600)$$
$$L(x) = 3{,}50x - 0{,}90x - 1600$$
$$L(x) = 2{,}60x - 1600$$

Para que tenhamos lucro, devemos ter L assumindo apenas valores positivos, isto é:

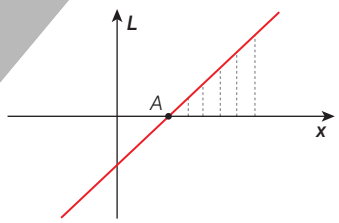
$$L(x) > 0$$
$$2{,}60x - 1600 > 0$$

Essa desigualdade é chamada de inequação do 1º grau na incógnita x.

Comente com os estudantes que, na situação envolvendo lucro, o fato de a função ser sempre crescente não implica que haverá necessariamente lucro. Podemos, por exemplo, ter uma função crescente em que não há lucro, e sim prejuízo.

Note que a função lucro $L(x)$ é do 1º grau.

Para resolver a inequação correspondente, podemos analisar graficamente o comportamento da função lucro, por meio de um esboço. Como o coeficiente de x é positivo, essa função é crescente. Um esboço possível é:



Tarcísio Garbellini

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. Qual é a abscissa do ponto A?
2. As linhas pontilhadas no gráfico são traçadas indicando valores de x positivos ou negativos? E o que se pode dizer dos valores de L associados a esses valores de x?
3. Nessa situação, o que representa a variável x?
4. Qual é o valor mínimo de x para que haja lucro?

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Há um procedimento algébrico para a resolução de uma inequação do 1º grau que consiste em isolar a incógnita x em um dos dois membros da desigualdade. Observe como poderíamos resolver a inequação proposta sem fazer a análise de sinal.

$$L(x) > 0$$
$$2{,}60x - 1600 > 0$$

Isolamos x.

$$2{,}60x > 1600$$
$$x > \frac{1600}{2{,}60}$$
$$x > 615{,}38 \text{ (valor aproximado)}$$

Assim, como x é um número natural (quantidade de trufas produzidas e vendidas), para se ter lucro é necessário produzir e vender no mínimo 616 trufas.

O que você achou do procedimento algébrico em relação ao que propõe o estudo do sinal da função correspondente? Provavelmente deve considerá-lo mais simples, pois basta isolar x em um dos dois membros da desigualdade. Esse procedimento algébrico possibilita

transformar uma inequação em outra inequação sem que o resultado seja alterado. Dizemos que tais inequações são equivalentes.

Por meio dos três exemplos a seguir, vamos ampliar essas ideias.

Exemplo 1

Vamos resolver algebricamente a inequação $5x - 7 \geqslant 2 + 2x$ no conjunto dos números reais.

- Observe passo a passo o procedimento para obter a solução dessa inequação. Analise as passagens (I), (II) e (III) na resolução abaixo.

$5x - 7 \geqslant 2 + 2x$

(I)

$5x - 7 - 2x \geqslant 2 + 2x - 2x$

$3x - 7 \geqslant 2$

(II)

$3x - 7 + 7 \geqslant 2 + 7$

$3x \geqslant 9$

(III)

$\frac{3x}{3} \geqslant \frac{9}{3} \Rightarrow x \geqslant 3$

inequações equivalentes

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. Qual operação foi realizada na passagem (I)? E na passagem (II)?
2. Qual operação foi realizada na passagem (III)?
3. As inequações $x \geqslant 3$ e $-x \geqslant -3$ são equivalentes? Justifique.
4. E as inequações $-2x < 4$ e $x > -2$ são equivalentes? Justifique.

Exemplo 2

Uma empresa [illegible] propostas de pagamentos mensais para seus clientes:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

Vamos analisar os dois planos para observar em quais condições um ou outro é mais vantajoso dentro de um mesmo período.

- Lei de formação das funções correspondentes aos planos sendo x o número de consultas e y o valor pago correspondente:

Plano A: $y = 220 + 40x$

Plano B: $y = 260 + 30x$

- Cálculo de x em que os dois planos cobram o mesmo valor:

$220 + 40x = 260 + 30x$

$40x - 30x = 260 - 220$

$10x = 40$

$x = 4$

Se o número de consultas for 4 no período, os dois planos cobram valores iguais.

Reinaldo Vignati

- Número de consultas em que o plano A é mais vantajoso (cliente paga menos) do que o plano B:

$$220 + 40x < 260 + 30x$$
$$40x - 30x < 260 - 220$$
$$10x < 40$$
$$x < 4$$

Se o número de consultas for menor que 4 no período, o plano A cobra menos que o plano B.

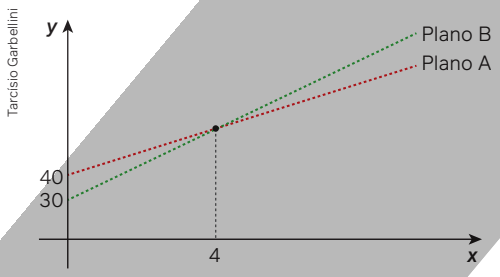
- Número de consultas em que o plano B é mais vantajoso (cliente paga menos) do que o plano A:

$$220 + 40x > 260 + 30x$$
$$40x - 30x > 260 - 220$$
$$10x > 40$$
$$x > 4$$

Se o número de consultas for maior que 4 no período, o plano B cobra menos que o plano A.

Observação

Essa situação poderia ser analisada também com base no esboço gráfico das funções correspondentes, isto é:



Tarcísio Garbellini

Embora o gráfico ao lado seja apenas esboço, é importante destacar que nessa representação devemos considerar que x é um número natural, uma vez que se refere ao número de consultas. Sendo assim, os gráficos devem ser formados por pontos alinhados e não semirretas contínuas. Apenas para exemplificar, faça no caderno o que se pede a seguir.

- Desenhe num plano cartesiano o gráfico da função definida por $f(x) = 2x$, sendo x um número real qualquer.
- Desenhe em outro plano cartesiano o gráfico da função definida por $f(x) = 2x$, sendo x um número real qualquer.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. Os dois gráficos representam crescimento linear?
2. Os dois gráficos são iguais? O que diferencia um do outro?

Existem duas transformações (por meio de operações) que podem ser feitas em uma inequação para se obter outra equivalente, isto é, outra com o mesmo conjunto solução:

1. Adicionando-se ou subtraindo-se um mesmo número ou uma mesma expressão algébrica em ambos os membros de uma inequação, obtemos outra inequação equivalente à primeira.
2. Multiplicando-se ou dividindo-se os dois membros de uma inequação por um número positivo ou por uma expressão positiva, obtemos outra inequação equivalente à primeira.

Agora vamos analisar uma situação que envolve a resolução de inequações simultâneas.

Exemplo 3

Quatro unidades do produto A, com massa total de 1 kg, custam 480 reais. Sete unidades do produto B, com massa total de 1 kg, custam 300 reais. Sabendo que 10 unidades do produto A e x unidades do produto B, juntas, têm a massa total de no mínimo 5 kg e não ultrapassam 2000 reais, determine os valores correspondentes para x.

- Cálculo da massa de cada unidade dos produtos:

Produto A: $\frac{1000\text{ g}}{4} = 250\text{ g}$

Produto B: $\frac{1000\text{ g}}{7} = \frac{1000\text{ g}}{7}$

- Cálculo do custo de cada unidade dos produtos:

Produto A: $\frac{480\text{ reais}}{4} = 120\text{ reais}$

Produto B: $\frac{300\text{ reais}}{7} = \frac{300}{7}\text{ reais}$

- De acordo com os dados do enunciado, temos que os valores de x devem verificar duas condições simultâneas:

$$\begin{cases} 10 \cdot 250 + x \cdot \frac{1000}{7} \geqslant 5000 \\ 10 \cdot 120 + x \cdot \frac{300}{7} \leqslant 2000 \end{cases}$$

passagem 1

$$\begin{cases} 17500 + 1000x \geqslant 35000 \\ 8400 + 300x \leqslant 14000 \end{cases}$$

passagem 2

$$\begin{cases} 1000x \geqslant 17500 \\ 300x \leqslant 5600 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geqslant 17{,}5 \\ x \leqslant 18{,}666\ldots \end{cases}$$

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

Analise a situação e a resolução (incompleta) apresentada no exemplo 3 para responder.

1. Foram utilizados os sinais $\leqslant$ e $\geqslant$. O que diferencia, por exemplo, $x \geqslant 20$ de $x > 20$? E $x \leqslant 20$ de $x < 20$?
2. O que foi feito na passagem 1 da resolução?
3. E na passagem 2?
4. Qual é a solução da situação apresentada? Justifique.

Atividades

1. Sendo x um número real, resolva, pelo estudo do sinal de uma função afim, as seguintes inequações:
   a) $-2x + 7 \geqslant 0$ $x \leqslant \frac{5}{2}$; $-x - 15 \geqslant 0$ $x \leqslant -15$
   b) $3x + 10 < 0$ $x < -\frac{10}{3}$; d) $6x - 18 < 0$ $x > -3$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

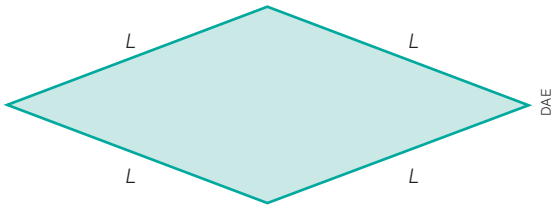
2. Observe como Juliana resolveu no caderno a inequação $1 < 2x < 7$ fazendo apenas a passagem (I) indicada: Respostas no Manual do Professor.

$$1 < 2x < 7 \quad \text{(I)} \quad \frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$$

   a) Explique o que ela fez na passagem (I) para obter a resposta.
   b) Represente na forma de intervalo as soluções dessa inequação.
   c) Essa inequação apresenta quantas soluções reais?
   d) Escreva todos os números inteiros que são soluções da inequação.

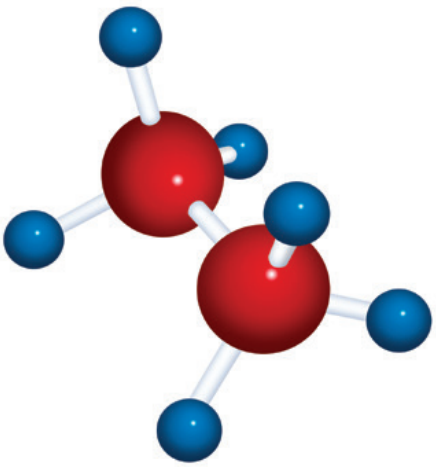
3. Considere a inequação $-3 \leqslant 4x \leqslant 8$ em que x representa um número real. Resolva essa inequação e, depois, faça o que se pede. $\left[\frac{-3}{4}; 2\right]$
   a) Represente as soluções na forma de intervalo.
   b) Responda: Essa inequação tem quantas soluções inteiras? Quais? Três soluções inteiras: 0, 1 e 2.

4. Resolva o seguinte problema.
   Uma indústria de lajotas pretende lançar no mercado uma peça em formato de losango, porém não se decidiu ainda qual será o tamanho dessa peça. Assim, representou-se por L, em centímetros, a medida do lado desse losango.



   Após alguns estudos, decidiu-se que a peça deveria ter no mínimo 20 cm de perímetro e no máximo 80 cm. Determine os valores possíveis para L.
   Os valores possíveis para L pertencem ao intervalo $[5; 20]$.

4 Sistemas lineares



Mauro Salgado

A ilustração ao lado representa um modelo correspondente à substância conhecida como etano, normalmente representada pela fórmula C_2H_6. Esse tipo de modelo é empregado para evidenciar as ligações entre os átomos em sua estrutura.

Em Química também é necessária a resolução de equações. Assim, por exemplo, ao escrever uma equação química, é importante verificar se a quantidade de átomos de cada elemento químico é a mesma nos dois lados da correspondente equação.

Para efetuar o balanceamento, procede-se escrevendo o chamado "coeficiente estequiométrico" (representado normalmente por um número inteiro) antes dos símbolos que representam cada substância.

Vamos exemplificar!

Abaixo temos uma equação química.

$$C_2H_6 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$$

Se a ideia é "balancear" essa equação, representamos quatro coeficientes estequiométricos (ou coeficientes do balanceamento) da equação. Como eles são desconhecidos, vamos representá-los pelas letras x, y, z e w, isto é:

$$xC_2H_6 + yO_2 \rightarrow zCO_2 + wH_2O$$

Sabendo que o número de átomos de cada elemento deve ser o mesmo de cada lado dessa equação química, temos:

Elemento C (carbono): $2x = z$

Elemento H (hidrogênio): $6x = 2w$

Elemento O (oxigênio): $2y = 2z + w$

Como essas equações devem ser verificadas simultaneamente, escrevemos um sistema formado por três equações com quatro incógnitas, ou seja:

$$\begin{cases} 2x = z \\ 6x = 2w \\ 2y = 2z + w \end{cases}$$

sistema de três equações e quatro incógnitas

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir Orientações no Manual do Professor.

1. O que significa resolver uma equação com uma incógnita? E um sistema de equações com mais de uma incógnita?
2. Você conhece algum procedimento para resolver um sistema formado por duas equações e duas incógnitas? Explique exemplificando.
3. Se, no sistema acima você descobrir o valor de x, poderá determinar os valores das demais incógnitas? Explique!

Retomaremos essa situação apresentando o chamado método do escalonamento para sua resolução.

Na situação apresentada os coeficientes procurados para "balancear" a equação são números inteiros. Isso possibilita que você resolva esse sistema atribuindo valores inteiros para as incógnitas e, por meio de tentativas, obtenha os valores procurados. Entretanto, precisamos de um procedimento que possa nos auxiliar a resolver um sistema de equações lineares cujas soluções possam ser números reais, não necessariamente inteiros.

Inicialmente vamos abordar algumas ideias.

Denomina-se **equação linear** toda equação que pode ser escrita na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b,$$

na qual x_1, x_2, x_3, ... e x_n são as incógnitas, a_1, a_2, a_3, ... e a_n os coeficientes reais e b um número real correspondente ao termo independente das incógnitas.

Exemplo 1

A equação $7x + 8y - 3z + 5w = 6$ é dita equação linear. Nela temos:

- incógnitas: x, y, z e 3;
- coeficientes: 7, 8, -3 e 5;
- termo independente: 6.

Exemplo 2

A equação $7{,}2x - 9{,}5y + \sqrt{10}\,z = 7{,}9$ é dita equação linear. Nela temos:

- incógnitas: x, y e z;
- coeficientes: 7,2; $-9{,}5$ e $\sqrt{10}$;
- termo independente: 7,9.

O termo "equação linear" é utilizado quando todas as incógnitas da equação têm expoente igual a 1. Além disso, numa equação linear não temos termo misto, ou seja, aquele termo que contém o produto de duas ou mais incógnitas. Assim, não são exemplos de equações lineares:

I. $2xy + w = 10$ **II.** $x^3 + 3y + 4z = 5$ **III.** $4x^{\frac{1}{2}} - 7z = 8$

Para pensar e discutir

Respostas no Manual do Professor.

1. Quais são as justificativas para que as equações I, II e III não sejam consideradas equações lineares?
2. A equação $\sqrt{2}x - 2y = 7$ é linear? E a equação $\sqrt{2x} - 2y = 7$? Justifique.

Nosso interesse agora é a resolução de sistemas formados por equações lineares decorrentes de situações matemáticas ou de outras áreas de conhecimento. São exemplos de sistemas lineares:

$$\begin{cases} 3x - y = 10 \\ x + 5y = 6 \end{cases} \rightarrow \text{sistema linear com duas equações e duas incógnitas}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 10 \\ x + 5y - 3z = 6 \end{cases} \rightarrow \text{sistema linear com duas equações e três incógnitas}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ -3x + y - 3z = 16 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \text{sistema linear com três equações e três incógnitas}$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- Um conjunto formado por ***m*** equações lineares, com ***n*** incógnitas x_1, x_2, x_3, ... e x_n, é chamado **sistema linear *m* × *n***.
- A sequência de ***n*** números reais $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \ldots; \alpha_n)$ é solução de um sistema linear de ***n*** incógnitas se é solução de cada uma das equações do sistema.

Vamos compreender o que é solução de um sistema de equações lineares.

Como exemplo, considere as situações a seguir.

Imagens: Banco Central do Brasil

Exemplo 1

Júlia foi a um caixa eletrônico fazer uma retirada de 180 reais. Considerando que só havia cédulas de 50 reais, 10 reais e 5 reais, determine a quantidade de cada uma dessas cédulas.

Para pensar e discutir

Respostas no Manual do Professor.

1. Se forem 2 cédulas de 5 reais e 1 cédula de 50 reais, quantas serão as cédulas de 10 reais?
2. Se forem 2 cédulas de 50 reais, quantas serão as cédulas de 10 reais e de 5 reais? Apresente uma solução.
3. Quantas serão as cédulas de cada tipo? Apresente uma solução.
4. Como você representaria por meio de um modelo matemático uma maneira de resolver a situação?

Agora que você discutiu a solução desse exemplo, vamos analisar outro exemplo elaborado com base no anterior com o acréscimo de uma informação:

Exemplo 2

Júlia retirou os 180 reais em cédulas de 50 reais, 10 reais e 5 reais. Ao todo ela observou que havia 14 cédulas. Vamos determinar a quantidade de cédulas de cada um desses valores.

- Sendo x, y e z as quantidades de cédulas de 50, 10 e 5 reais, respectivamente, temos, conforme dados da situação, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 14 \rightarrow \text{números de cédulas} \\ 50x + 10y + 5z = 180 \rightarrow \text{quantia retirada} \end{cases}$$

Para pensar e discutir

1. A sequência ou terna ordenada (4; 4; 6) é solução do sistema? Justifique.
   Não, pois fazendo $x = 4$, $y = 4$ e $z = 6$ a segunda equação não é verificada.
2. A terna ordenada (2; 4; 8) é solução do sistema? Justifique.
   Sim, pois fazendo $x = 2$, $y = 4$ e $z = 8$ as duas equações são verificadas.

No quadro anterior, quando escrevemos a "terna ordenada (4; 4; 6)" queremos dizer na ordem que x assume o valor 4, y assume o valor 4 e z assume o valor 6. Convencionamos isso para evitar possíveis confusões. Se o sistema apresenta apenas duas equações nas incógnitas x e y, a solução será um par ordenado $(x; y)$.

No Ensino Fundamental você se deparou com situações relacionadas à resolução de sistemas de equações lineares formados por duas equações a duas incógnitas. Normalmente é enfatizada a resolução de tais sistemas por meio de dois procedimentos: **método da adição** e **método da substituição**. Caso você não se lembre desses procedimentos, pesquise para explorar na atividade a seguir.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Sugestão de encaminhamento: em pequenos grupos.

1. Utilizando o método da adição ou o método da substituição, resolvam cada um dos seguintes sistemas formados por duas equações a duas incógnitas.

   a) $\begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 26 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 10 \\ x - y = 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 10 \\ 2x - 2y = 20 \end{cases}$

2. Como cada equação apresentada nos sistemas é formada pelas incógnitas x e y, ao isolar y em função de x vocês estarão diante de uma função afim. Dessa forma, representem num plano cartesiano cada um dos sistemas anteriores para fazer uma interpretação geométrica. **Sugestão:** utilizem um *software* de geometria dinâmica.
3. Redijam um texto que relate as observações sobre as possibilidades de soluções de um sistema linear formado por duas equações a duas incógnitas apoiando-se na representação geométrica no plano cartesiano.

Atividades

1. Resolva algebricamente cada um dos seguintes sistemas de equações lineares, formados por duas equações a duas incógnitas. Caso o sistema admita solução, represente-a na forma de par ordenado.

Orientações no Manual do Professor.

a) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$ (4; 2)

b) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ Não admite solução.

c) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$ Admite infinitas soluções.

2. Retorne aos sistemas da atividade anterior e responda utilizando como argumento os sistemas apresentados e resolvidos:

a) Todos esses sistemas admitem soluções? Não. O sistema do item **b** não tem solução.

b) Podemos ter um sistema que admite mais de uma solução? Sim. O sistema do item **c** tem infinitas soluções.

3. A seguir estão representadas graficamente no plano cartesiano duas funções do 1º grau, sendo $y = f(x)$. A ideia dessa representação era determinar o(s) valor(es) para o(s) qual(is) essas duas funções assumiam a mesma imagem. Ao fazer esse gráfico, observou-se que essas funções têm apenas um ponto em comum.

Reinaldo Vignati

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

a) Para qual valor de x essas duas funções são iguais? -1

b) Qual é o valor de y em correspondência? -3

c) Escreva um sistema de equações que represente essa situação. $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x - 2 \end{cases}$

d) Represente a solução desse sistema por meio de um par ordenado. $(-1; -3)$

4. Quando num sistema de equações lineares cada equação tem o termo independente igual a zero ele é dito **sistema homogêneo**. Resolva estes sistemas lineares homogêneos:

I) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

II) $\begin{cases} 4x - 6y = 0 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases}$

Agora, responda:

a) Qual é a solução do sistema I? $S = \{(0; 0)\}$

b) Os dois sistemas de equações lineares admitem a solução (0; 0)? Sim.

c) Quantas soluções admite o sistema II? Infinitas.

5. Abaixo temos um sistema linear homogêneo formado por três equações a três incógnitas:

Orientações no Manual do Professor.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \\ 5z = 0 \end{cases}$$

Responda:

a) Esse sistema admite a solução trivial (0; 0; 0)? Sim.

b) Quantas soluções tem esse sistema? Apenas 1 solução (a trivial).

6. Junte-se a mais um colega e façam o que se pede a seguir. Orientações no Manual do Professor.

1ª parte

a) Elaborem um sistema formado por duas equações a duas incógnitas que apresente exatamente uma solução.

b) Façam, no plano cartesiano, uma interpretação geométrica desse sistema identificando a solução.

2ª parte

a) Elaborem um sistema formado por duas equações a duas incógnitas que não apresente solução.

b) Façam, no plano cartesiano, uma interpretação geométrica desse sistema.

3ª parte

a) Elaborem um sistema formado por duas equações a duas incógnitas que apresente infinitas soluções.

b) Façam, no plano cartesiano, uma interpretação geométrica desse sistema identificando algumas soluções.

Cada dupla deverá apresentar para os colegas os resultados obtidos e, oralmente, informar as conclusões a respeito da resolução de um sistema formado por duas equações a duas incógnitas.

7. Juliana foi a um caixa eletrônico retirar R$ 100,00. Ao sair, conferiu que a quantia estava correta. Verificou ainda que tinha recebido três tipos de cédula: 50 reais, 20 reais e 10 reais. Se x, y e z representam a quantidade de cédulas de 50 reais, 20 reais e 10 reais, respectivamente, então:

Saulo Angelo/AM Press & Images/Folhapress

Respostas no Manual do Professor.

a) escreva uma equação que represente essa situação;

b) responda: De qual das cédulas sabe-se a quantidade? Escreva como você obteve essa resposta;

c) indique todas as possibilidades de cédulas que Juliana recebeu.

8. Retorne à situação anterior considerando as mesmas condições e acrescentando a seguinte informação: Ao todo Juliana recebeu 4 cédulas.

a) Escreva um sistema que represente tal situação.

b) Qual é a solução desse sistema? Respostas no Manual do Professor.

9. Elabore uma situação de retirada de dinheiro em caixa eletrônico como na atividade 7, na qual, porém, a quantia retirada deve ser de 200 reais e a resolução deve ter duas equações a três incógnitas. Apresente o sistema para que um colega o resolva.

Respostas no Manual do Professor.

10. Dois sistemas de equações são ditos **equivalentes quando têm o mesmo conjunto solução**. Verifique se estes sistemas são equivalentes escrevendo o conjunto solução de cada um deles. Respostas no Manual do Professor.

Sistema I $\rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$ Sistema II $\rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

11. Elabore dois sistemas de equações lineares formados por duas equações a duas incógnitas que sejam equivalentes. Depois, apresente o conjunto solução desses sistemas.

Resposta pessoal.

12. Em uma lanchonete, dois sucos e dois sanduíches custam R$ 16,80 e três sucos e quatro sanduíches custam R$ 30,40. Então:

Reinaldo Vignati

Respostas no Manual do Professor.

a) escreva um sistema que represente a situação;

b) determine o valor de cada suco e de cada sanduíche.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

13. Abaixo está representado um sistema formado por três equações a três incógnitas. Note que o número de incógnitas vai diminuindo da 1ª para a 3ª equação.

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 2y + z = 6 \\ 2z = 8 \end{cases}$$

O conjunto solução desse sistema é representado por $S = \{(x; y; z)\}$, sendo $(x; y; z)$ denominado de terna ordenada. Então:

a) determine o conjunto solução desse sistema; $S = \left\{\frac{17}{2}, 1, 4\right\}$

b) explique por meio de uma frase como procedeu para resolver tal sistema. Resposta pessoal.

14. Calcule o valor de k considerando que a terna ordenada $(1; 3; -2)$ represente a solução da equação linear abaixo:

$3x + ky - 2z = -14$ $\quad k = -7$

Resolução de um sistema de equações lineares

Agora que você já retomou a resolução de sistemas de equações lineares formados por duas equações a duas incógnitas, vamos ampliar esse estudo para outros sistemas com mais de duas incógnitas. Para tais sistemas o procedimento que utilizaremos é conhecido como **método do escalonamento**.

Considere, apenas para que possamos iniciar uma discussão sobre esse método, os dois sistemas de equações lineares formados por três equações a três incógnitas. Esses sistemas lineares são equivalentes, isto é, têm o mesmo conjunto solução.

Sistema I → $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$ Sistema II → $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -2z = -6 \end{cases}$

Para pensar e discutir

Respostas no Manual do Professor.

1. Nesses dois sistemas, as incógnitas de todas as equações estão escritas na mesma ordem?
2. Quantos coeficientes de incógnitas são nulos no sistema I? E no sistema II?
3. Qual dos sistemas você escolheria para encontrar o conjunto solução? Explique como faria e encontre-o.

Retomando o sistema II acima é possível perceber as seguintes características nele:

- Em cada equação existe pelo menos um coeficiente de alguma incógnita que é não nulo (diferente de zero).
- Observando a ordem em que essas equações estão escritas no sistema (de cima para baixo), a quantidade de coeficientes nulos antes do 1º coeficiente não nulo aumenta de equação para equação.

Quando um sistema de equações lineares tem essas características, ele é dito sistema escalonado. Um sistema escrito na forma escalonada possibilita a obtenção do conjunto solução ou alguma conclusão sobre ele de uma maneira mais direta.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Analise, por exemplo, os sistemas lineares a seguir formados por três equações a três incógnitas escritos na forma escalonada. Para cada um deles apresentamos o conjunto solução.

Exemplo 1

Resolva este sistema escalonado, em que o número de equações é igual ao número de incógnitas.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y - z = 5 \\ 2z = 6 \end{cases}$$

- Iniciamos pela 3ª equação determinando o valor de z:

$$2z = 6 \Rightarrow z = 3$$

- Substituímos o valor de z encontrado na 2ª equação para obtermos y:

$$y - 3 = 5 \Rightarrow y = 8$$

- Na 1ª equação substituímos os valores de y e z para determinarmos o valor de x:

$$x + 8 + 2 \cdot 3 = 0$$

$$x + 14 = 0 \Rightarrow x = -14$$

Portanto, o conjunto solução desse sistema é $S = \{(-14; 8; 3)\}$.

Exemplo 2

Resolva o sistema escalonado a seguir, em que o **número de equações é menor que o número de incógnitas**.

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ y - z = 5 \end{cases}$$

- Como temos mais incógnitas do que equações, podemos encontrar algumas soluções desse sistema por meio de tentativas. Assim, podemos atribuir valores para z e obter valores em correspondência para y e depois para x. Reescrevemos esse sistema expressando y e x em função de z:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ y = 5 + z \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3(5 + z) + z = 0 \\ y = 5 + z \end{cases} \quad \begin{cases} x = 15 + 2z \\ y = 5 + z \end{cases}$$

Assim, se, por exemplo, considerarmos $z = 1$, teremos:

$$\begin{cases} x = 15 + 2 \cdot 1 \\ y = 5 + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = 6 \end{cases}$$

Portanto (17; 6; 1) é uma solução do sistema.

Para explorar

Sugestão de encaminhamento: individual. Orientações no Manual do Professor.

Ainda utilizando o sistema do exemplo 2, você irá determinar outras soluções. Para isso, faça o que se pede:

1. Obtenha uma solução do sistema considerando $z = 2$.
2. Obtenha uma solução do sistema considerando $z = 0$.
3. Obtenha outras cinco soluções do sistema atribuindo valores para z.
4. Se você considerar $z = \alpha$, quais serão os valores de y e de x em função de α?
5. Represente, em função de α, o conjunto solução.

Escreva, ao final desta seção, um pequeno texto sobre suas conclusões a respeito do sistema apresentado. Nesse texto, fale sobre a quantidade de soluções desse sistema e sobre como obter tais soluções.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Nos dois exemplos apresentados, os sistemas estavam escritos na forma escalonada. Entretanto, nas situações que envolvem a resolução de sistemas, geralmente não temos a forma escalonada. Precisaremos saber escalonar um sistema para então resolvê-lo.

Considere novamente os dois sistemas lineares equivalentes abaixo apresentados anteriormente:

Sistema I $\rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$ Sistema II $\rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -2z = -6 \end{cases}$

obtendo a forma escalonada

O sistema II está na forma escalonada e é equivalente ao sistema I, que não está na forma escalonada. Para chegarmos à forma escalonada precisamos efetuar transformações de tal modo a obter um sistema que tenha o mesmo conjunto solução. As transformações que podem ser feitas nesse sentido são:

- Trocar a posição de duas equações no sistema;
- Multiplicar uma equação qualquer do sistema por um número real diferente de zero;
- Substituir uma equação do sistema pela soma dela, membro a membro, com alguma outra equação do próprio sistema.

Assim, vamos ao escalonamento do sistema I:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

- Em primeiro lugar, precisamos anular os coeficientes de x na 2ª e na 3ª equações:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

Substituímos a 2ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -2:

$$\begin{array}{r} -2x - 4y - 2z = -6 \\ + \\ 2x - 3y - z = 4 \\ \hline -7y - 3z = -2 \end{array}$$

Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -3:

$$\begin{array}{r} -3x - 6y - 3z = -9 \\ + \\ 3x - y - 2z = 1 \\ \hline -7y - 5z = -8 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -7y - 5z = -8 \end{cases}$$

- Fixando a 1ª equação, repetimos o processo para a 2ª e a 3ª equações, eliminando o y na 3ª equação:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -7y - 5z = -8 \end{cases}$$

Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por -1:

$$\begin{array}{r} 7y + 3z = 2 \\ + \\ -7y - 5z = -8 \\ \hline -2z = -6 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -2z = -6 \end{cases}$$

Obtemos assim a forma escalonada. Como você já observou, a solução desse sistema pode ser obtida determinando z na 3ª equação, depois y na 2ª equação (utilizando o valor de z obtido) e obtendo x na 1ª equação (utilizando os valores de y e z determinados anteriormente).

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Considere agora os três sistemas de equações lineares abaixo. Junte-se a mais um colega e, no caderno, representem esses sistemas lineares na forma escalonada e, caso existam, obtenham suas soluções.

I → $\begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ x - y + 2z = 2 \\ -x + 3y - 4z = -4 \end{cases}$

II → $\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 1 \\ 2x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$

III → $\begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 7 \end{cases}$

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. Qual sistema, que ao ser escalonado, ficou apenas com duas equações? Qual é a conclusão sobre sua solução?
2. Qual sistema, que ao ser escalonado, apresentou uma igualdade impossível? Qual é a conclusão sobre sua solução?
3. Quais são as possibilidades observadas sobre a solução de um sistema?

Existem situações com sistemas lineares que podem ser obtidas por outros procedimentos que envolvem as equações correspondentes. Considere, como exemplo, a situação a seguir.

Exemplo 3

O quadro abaixo apresenta um cartaz que estava na vitrine de uma loja de roupas.

Reinaldo Vignati

Considerando que os valores unitários de cada uma dessas peças de roupas não sejam alterados quando vendidos de dois em dois, ou em mais quantidades, quanto terá de desembolsar uma pessoa que deseja comprar uma calça, uma camisa e uma bermuda?

- Representando por x, y e z, respectivamente, o preço unitário de uma calça, de uma camisa e de uma bermuda, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 140 \\ x + z = 170 \\ y + z = 120 \end{cases}$$

- Adicionando essas três equações membro a membro, obtemos:

$$2x + 2y + 2z = 430$$

- Dividindo membro a membro por 2, temos:

$$x + y + z = 215$$

Portanto, a pessoa irá desembolsar R$ 215,00 pela compra de uma calça, uma camisa e uma bermuda.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Retome agora a situação apresentada ao iniciar sistemas lineares, isto é:

Para retomar

Elemento C (carbono): $2x = z$

Elemento H (hidrogênio): $6x = 2w$

Elemento O (oxigênio): $2y = 2z + w$

Como essas equações devem ser verificadas simultaneamente, escrevemos um sistema formado por três equações com quatro incógnitas, ou seja:

$$\begin{cases} 2x = z \\ 6x = 2w \\ 2y = 2z + w \end{cases}$$

sistema de três equações e quatro incógnitas

a) Resolva o correspondente sistema de equações.

b) Descubra como esse tipo de situação é resolvido na disciplina de Química. Exemplifique!

Respostas no Manual do Professor.

Atividades

1. Você já conhece procedimentos para a resolução de sistemas de equações lineares formados por duas equações a duas incógnitas. Entre esses procedimentos estão o método da adição e o método da substituição. Como o método do escalonamento é mais amplo, escreva cada sistema abaixo na forma escalonada e então obtenha as correspondentes soluções, caso existam. Orientações no Manual do Professor.

a) $\begin{cases} x - 2y = 10 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 25 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 10 \\ 3x - 3y = 30 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$

2. Elabore outra situação alterando os valores do quadro (utilize o exemplo já apresentado como referência), isto é, abaixo, os traços devem ser substituídos por valores diferentes aos da situação resolvida. Orientações no Manual do Professor.

Reinaldo Vignati

Calça + Camisa por R$ .....
Calça + Bermuda por R$ .....
Bermuda + Camisa por R$ .....

Depois, resolva individualmente a situação e apresente o resultado.

3. Considere o exemplo de equação química ilustrado abaixo: Respostas no Manual do Professor.

$$C_3H_8 + O_2 \rightarrow H_2O + CO_2$$

a) Escreva um sistema que representa a situação de equilíbrio.

b) Resolva esse sistema.

4. Pesquise outra situação de equação química que envolva o equilíbrio e faça o que se pede. Respostas pessoais.

a) Escreva um sistema que representa a situação de equilíbrio.

b) Resolva esse sistema.

5. (Uerj) Observe a equação química que representa a fermentação do açúcar. Orientações no Manual do Professor.

$$xC_6H_{12}O_6 \rightarrow yCO_2 + zC_2H_5OH$$

Uma das formas de equilibrar essa equação é igualar, em seus dois membros, as quantidades de átomos de cada elemento químico. Esse processo dá origem ao seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 6x = y + 2z \\ 12x = 6z \\ 6x = 2y + z \end{cases}$$

Determine o conjunto solução do sistema e calcule os menores valores inteiros positivos de x, y e z que formam uma das soluções desse sistema.

6. Ao escalonar um sistema linear homogêneo formado por três equações a três incógnitas, Pedro chegou ao seguinte sistema equivalente ao original:

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

Como esse sistema escalonado tem duas equações e três incógnitas, Pedro fez $z = 2k$ para representar as soluções do sistema em função de k.

a) Qual conjunto solução deve ter sido obtido por Pedro? S = {(-5k; k; 2k)}.

b) Fazendo $k = 2$ obtenha uma solução desse sistema. S = {(-10; 2; 4)}.

c) Esse sistema admite a solução trivial (0; 0; 0)? Sim.

7. (Cefet-MG) Uma senhora resolveu vender bombons e trufas na porta de uma escola para complementar a renda familiar. No primeiro dia, ela faturou R$ 107,50 com a venda de 25 bombons e 15 trufas. No dia seguinte, seu faturamento foi igual a R$ 185,00 e foram vendidos 20 bombons e 45 trufas. Um aluno que comprou, dessa senhora, 4 bombons e 3 trufas, pagou a quantia de: Alternativa **a**.

a) R$ 19,00.

b) R$ 19,50.

c) R$ 22,50.

d) R$ 23,00.

Atividades finais

1. Sobre os assuntos desta unidade, responda cada item a seguir.

a) Qual é a condição para que possamos ter uma progressão aritmética decrescente?
A razão deverá ser negativa.

b) Qual é o termo geral da progressão aritmética (3, 7, 11, ...)? O termo geral é: $a_n = 4n - 1$.

c) Numa progressão aritmética cujo termo geral é $a_n = -7n + 10$, qual é o significado do coeficiente de n? Representa a razão da progressão aritmética.

d) Qual relação matemática possibilita calcular a soma de todos os n termos de uma progressão aritmética? $S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \cdot n$

e) Considere a função afim definida por $f(x) = 4x - 7$. A sequência $(f(1); f(2); f(3); \ldots)$ é uma progressão aritmética? Sim, a razão é 4.

f) Se $-2x > -10$, então é correto afirmar que $x < 5$? Sim.

g) Para quais valores reais de x a função real definida por $f(x) = 2x - 6$ assume imagens negativas? $x < 3$

h) Ao resolver um sistema de equações lineares, temos as seguintes possibilidades:

- sistema possível e determinado;
- sistema impossível;
- sistema possível e indeterminado.

Qual é o número de soluções em cada uma dessas possibilidades? Uma solução, nenhuma solução e infinitas soluções, respectivamente.

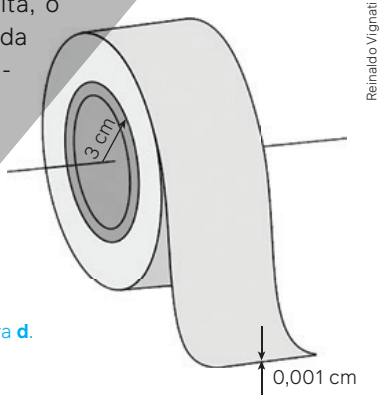
i) Considere o sistema escalonado abaixo:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$$

Quantas soluções ele admite? Infinitas.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

2. (Fuvest-SP) O cilindro de papelão central de uma fita-crepe tem raio externo de 3 cm. A fita tem espessura de 0,01 cm e dá 100 voltas completas.
Considerando que, a cada volta, o raio externo do rolo é aumentado no valor da espessura da fita, o comprimento total da fita é de, aproximadamente:
Note e adote:
$\pi \cong 3{,}14$.



Reinaldo Vignati

a) 9,4 m.
b) 11,0 m.
c) 18,8 m.
d) 22,0 m. Alternativa **d**.
e) 25,1 m.

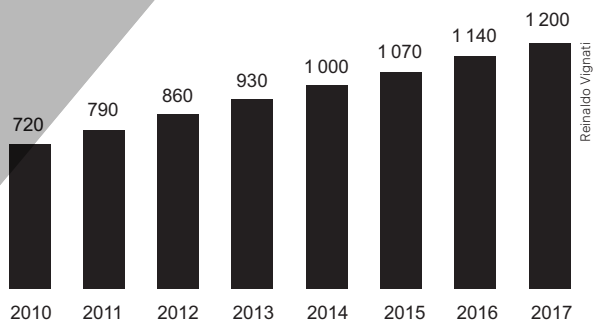
3. (UFRGS-RS) Desde a Grécia Antiga, sabe-se que a soma dos números ímpares consecutivos, a partir do 1, é sempre um quadrado perfeito. Como exemplo, tem-se
$1 = 1^2$
$1 + 3 = 2^2$
$1 + 3 + 5 = 3^2$
$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$
Então, a soma de todos os números ímpares menores do que 100 é: Alternativa **c**.

a) 42^2.
b) 49^2.
c) 50^2.
d) 99^2.
e) 100^2.

4. (EsPCEx-SP) Uma fábrica de tratores agrícolas, que começou a produzir em 2010, estabeleceu como meta produzir 20 000 tratores até o final do ano de 2025. O gráfico abaixo mostra as quantidades de tratores produzidos no período 2010-2017.

Fábrica Boa Safra

Quantidade anual de tratores fabricados



Reinaldo Vignati

Admitindo que a quantidade de tratores produzidos evolua nos anos seguintes segundo a mesma razão de crescimento do período de 2010-2017, é possível concluir que a meta prevista: Alternativa **e**.

a) deverá ser atingida, sendo superada em 80 tratores.
b) deverá ser atingida, sendo superada em 150 tratores.
c) não deverá ser atingida, pois serão produzidos 1850 tratores a menos.
d) não deverá ser atingida, pois serão produzidos 150 tratores a menos.
e) não deverá ser atingida, pois serão produzidos 80 tratores a menos.

5. (Uego) Uma concessionária vende um carro financiado em dois anos, e as parcelas mensais serão da seguinte maneira: a primeira parcela será de

R$ 1.000,00, e as demais decrescerão R$ 20,00 ao mês. Ao final do financiamento esse carro terá custado ao comprador: Alternativa **a**.

a) R$ 18.480,00.
b) R$ 18.240,00.
c) R$ 18.000,00.
d) R$ 17.760,00.
e) R$ 17.520,00.

6. (IFPE) Clara está pensando em criar um lindo pomar. A ideia de Clara consiste em dispor suas árvores plantadas em forma de triângulo, havendo uma árvore na primeira fila, três árvores na segunda fila, cinco árvores na terceira fila, e, assim, sucessivamente. Imaginando que o projeto do pomar de Clara tem quarenta filas, quantas árvores haverá no pomar?

a) 1 200 Alternativa **b**.
b) 1 600
c) 3 200
d) 800
e) 2 600

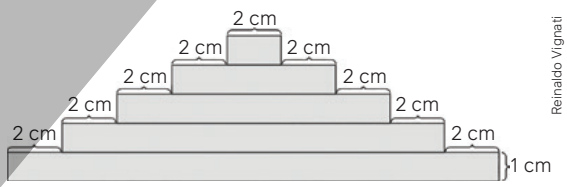
7. (Uece) Considere a soma dos números inteiros ímpares positivos agrupados do seguinte modo:
$1 + (3 + 5) + (7 + 9 + 11) + (13 + 15 + 17 + 19) + + (21 + 23 + 25 + 27 + 29) + ...$
O grupo de ordem n é formado pela soma de n inteiros positivos ímpares e consecutivos. Assim, pode-se afirmar corretamente que a soma dos números que compõem o décimo primeiro grupo é igual a:

a) 1223. Alternativa **b**.
b) 1331.
c) 1113.
d) 1431.

8. (Enem) A prefeitura de um pequeno município do interior decide colocar postes para iluminação ao longo de uma estrada retilínea, que inicia em uma praça central e termina numa fazenda na zona rural. Como a praça já possui iluminação, o primeiro poste será colocado a 80 metros [illegible] etros, o terceiro, a 120 metros, e assim sucessivamente, mantendo-se sempre uma distância de vinte metros entre os postes, até que o último poste seja colocado a uma distância de 1380 metros da praça.
Se a prefeitura pode pagar, no máximo, R$ 8.000,00 por poste colocado, o maior valor que poderá gastar com a colocação desses postes é: Alternativa **c**.

a) R$ 512.000,00.
b) R$ 520.000,00.
c) R$ 528.000,00.
d) R$ 552.000,00.
e) R$ 584.000,00.

9. (Unesp) A figura mostra cinco retângulos justapostos de uma sequência. Todos os retângulos possuem mesma altura, igual a 1 cm.



Reinaldo Vignati

Sabendo que 1 m² equivale a 10 000 cm² e que a sequência é constituída por 100 retângulos, a figura formada tem área igual a: Alternativa **d**.

a) 2,5 m².
b) 4 m².
c) 5 m².
d) 2 m².
e) 4,5 m².

10. (Fatec-SP) Considere que:

- A frequência cardíaca máxima de uma pessoa, em batimentos por minuto (bpm), é a diferença entre uma constante K e a idade da pessoa. O valor de K para um homem é 220 e, para uma mulher, K é 226.
- A frequência cardíaca ideal para queimar gordura e emagrecer durante um treino é de 60% a 75% da frequência cardíaca máxima.

Dessa forma, a frequência cardíaca ideal para queimar gordura e emagrecer durante um treino para um homem de 40 anos, em bpm, varia de: Alternativa **c**.

a) 114 a 143.
b) 111 a 139.
c) 108 a 135.
d) 105 a 132.
e) 102 a 128.

11. (FGV-SP) Quantos são os valores inteiros de x que satisfazem $-2 \leqslant 2x + 5 \leqslant 10$? Alternativa **b**.

a) Infinitos.
b) 6
c) 4
d) 7
e) 5

12. (Enem) O pacote de salgadinho preferido de uma menina é vendido em embalagens com diferentes quantidades. A cada embalagem é atribuído um número de pontos na promoção:
"Ao totalizar exatamente 12 pontos em embalagens e acrescentar mais R$ 10,00 ao valor da compra, você ganhará um bichinho de pelúcia".
Esse salgadinho é vendido em três embalagens com as seguintes massas, pontos e preços:

Massa da embalagem (g)	Pontos da embalagem	Preço (R$)
50	2	2,00
100	4	3,60
200	6	6,40

A menor quantia a ser gasta por essa menina que a possibilite levar o bichinho de pelúcia nessa promoção é: Alternativa **c**.

a) R$ 10,80.
b) R$ 12,80.
c) R$ 20,80.
d) R$ 22,00.
e) R$ 22,80.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

UNIDADE 3

Tom Vieira Freitas/Fotoarena

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

RACIOCÍNIO LÓGICO E TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Próximos, porém distantes: em meio às grandes metrópoles brasileiras, a diferença entre moradias próximas revela a verdadeira desigualdade social do país. Brasil, 2018.

Nesta unidade, você vai:

- desenvolver noções básicas referentes à linguagem computacional;
- utilizar algoritmos e fluxogramas a fim de descrever procedimentos para a execução de uma atividade;
- localizar e analisar informações em textos, tabelas e gráficos estatísticos;
- detectar erros ou inadequações em informações presentes em gráficos estatísticos;
- interpretar taxas e índices socioeconômicos de forma crítica;
- construir e interpretar gráficos estatísticos.

Medindo a desigualdade

O Índice de Desenvolvimento Humano (**IDH**) foi criado pela Organização das Nações Unidas (ONU) na década de 1990. Sua criação teve como objetivo a obtenção de dados que iam além das chamadas informações econômicas. Ele também levava em conta a qualidade de vida da população como um todo.

A forma pela qual interpretamos a realidade tem um alto grau de subjetividade. Entretanto, quando utilizamos índices como o IDH, essa subjetividade diminui.

O Brasil é um país com um povo criativo, alegre por essência, e repleto de oportunidades.

Também é conhecido por ter um abismo entre o pobre e o rico.

A desigualdade social é imensa. Nosso IDH está próximo daquele dos países mais pobres e distante dos mais desenvolvidos.

Respostas pessoais.

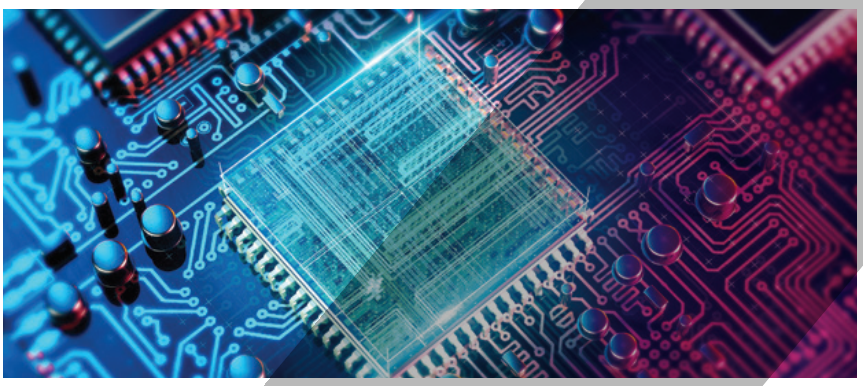
A ideia dessas perguntas é chamar a atenção dos alunos para a desigualdade social do país. Ao longo desta unidade, teremos a oportunidade de aprofundar o conhecimento a respeito dos índices brasileiros em comparação com o de outras nações. Gráficos estatísticos serão analisados. Ampliaremos o conhecimento cotidiano dos alunos sobre o pensamento computacional.

1. Quantas cestas básicas você consegue comprar com um salário mínimo no Brasil?
2. Como você diferencia população pobre de população rica?
3. Quais medidas você espera que o governo tome para diminuir a desigualdade social?

1 Pensamento computacional

Na BNCC

Nesta unidade você vai trabalhar as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias 1, 3 e 4 e as habilidades EM13MAT102, EM13MAT104, EM13MAT315, EM13MAT405.



Shutterstock_archy13

Em Computação se constrói modelos de processos.

Vivemos uma verdadeira revolução digital. Aspectos diversos de nossa sociedade são influenciados por essa revolução. Estudantes e profissionais precisam cada vez mais utilizar todo o potencial que a tecnologia tem a lhes oferecer. Ao ensinar e aprender programação, estamos exercitando o pensamento computacional.

No artigo "Entendendo o pensamento computacional" há uma irrefutável defesa do ensino sobre o pensamento computacional nas chamadas escolas básicas. Veja a seguir.

Entendendo o pensamento computacional

Para entender o que é o *pensamento computacional*, precisamos entender o que é computação. E para entender o que é *computação*, a melhor maneira é um olhar histórico, pois entendendo a origem dos conceitos podemos compreendê-los em maior plenitude. O grande objetivo da Computação é "raciocinar sobre o raciocínio". Porém, diferente da Filosofia, aqui não estamos pensando de forma mais ampla sobre o raciocínio, mas sim interessados no processo de racionalização do raciocínio, ou seja, formalização do mesmo, o que permite a sua automação e análise (matemática).

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

A questão de formalização do raciocínio está intimamente relacionada à resolução [illegible] a entender isto, tomemos como exemplo o raciocínio lógico. O objetivo do raciocínio lógico é basicamente encontrarmos (ou deduzirmos) verdades. O processo utilizado é, partindo-se de premissas, que são fatos aceitos como verdades, utiliza-se regras bem definidas (do sistema lógico que se está usando) para encontrar novas verdades (conclusões). A dedução em si, que é a sequência de regras utilizadas é comumente chamada de *prova* (de que a conclusão é verdadeira). O problema que está sendo resolvido é se uma sentença é ou não verdadeira: se encontrarmos uma prova a partir de sentenças que já sabemos que são verdadeiras confirmando a veracidade de uma nova sentença, ela será aceita como verdadeira. Podemos enxergar o raciocínio ou pensamento computacional como uma generalização do raciocínio lógico: um processo de transformação de entradas em saída, onde as entradas e a saída não são necessariamente sentenças verdadeiras, mas qualquer coisa (elementos de um conjunto qualquer), sendo que as entradas e a saída nem precisam ser do mesmo tipo, e as regras que podemos utilizar não são necessariamente as regras da lógica, mas um conjunto qualquer de regras ou instruções bem definidas. Da mesma forma que o produto do raciocínio lógico é a prova, o produto do raciocínio computacional é a sequência de regras que define a transformação, que comumente chamamos de *algoritmo*. O problema que está sendo resolvido aqui é como transformar a entrada na saída. Exemplos concretos seriam: Dado um número, como encontrar seus fatores primos? Dada uma

pilha de provas de alunos, como ordenar essas provas? Dado um mapa rodoviário, como encontrar uma rota? Dados os ingredientes, como fazer um bolo?

Como o resultado do processo de raciocínio computacional deve ser uma descrição clara e não ambígua de um processo, a Computação está fortemente baseada na Matemática, que provê uma linguagem precisa para descrição de modelos. Mas, diferente da Matemática, o objeto da Computação são os processos, ou seja, em Computação se constrói modelos de processos. Esses modelos, comumente chamados de *algoritmos*, podem ser bastante abstratos, descritos em linguagem natural ou linguagens de especificação, ou programas em uma linguagem de programação.

Pode-se argumentar que na Matemática também usam-se diversas abstrações para nos ajudar a resolver problemas. Então por que precisamos de Computação? Somente para automatizar a solução do problema? Não, muito mais que isso. Vamos discutir este ponto em um exemplo.

Um professor quer ensinar os alunos a fatorar um número em seus fatores primos. Ele tipicamente explica os passos que os alunos devem seguir e demonstra em alguns exemplos, ou seja, o professor apresenta um algoritmo para os alunos. Por vezes, este algoritmo é, além de apresentado de forma oral, descrito em português em um livro. Os alunos, então, seguem o processo várias vezes para aprender este procedimento. Mas e se o problema fosse, ao invés da fatoração, ordenar uma pilha de provas de alunos? Como o professor explicaria aos alunos como a tarefa deve ser realizada? E se quiséssemos que, ao invés de ordenar uma pilha dada, os alunos mesmos descrevessem como fariam a ordenação? Quais técnicas o professor utilizaria para ajudar os alunos a solucionar este problema? Note que o problema é "descreva o processo de ordenação de uma pilha de provas". Não é uma tarefa trivial. A Matemática não nos ajuda a resolver este tipo de problema, pois não provê as abstrações necessárias para descrever a solução. Além disso, não é objeto da Matemática investigar *Como construímos uma prova?*, ou mais genericamente, *Como construímos um algoritmo?* A ênfase do *raciocínio ou pensamento computacional* não são apenas os produtos em si (provas ou algoritmos), e sim o processo de construção desses produtos, ou seja, além das abstrações necessárias para descrever algoritmos, o pensamento computacional engloba também técnicas para a construção de algoritmos que podem ser vistas como técnicas de solução de problemas.

RIBEIRO, Leila; FOSS, Luciana; CAVALHEIRO, Simone. Entendendo o pensamento computacional. *In*: CORNELL UNIVERSITY. Ithaca: Cornell University, 2017. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1707.00338.pdf. Acesso em: 22 maio 2020.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Com base no texto responda às questões a seguir.

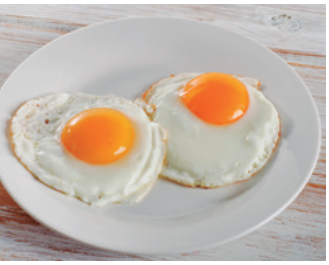
Para pensar e discutir Orientações no Manual do Professor.

1. O que você interpreta como pensamento computacional?
2. Em quais tarefas do nosso dia a dia podemos aplicar o pensamento computacional?

Abordaremos, neste capítulo, além das ideias referentes ao pensamento computacional, o chamado tratamento da informação.

Algoritmos e fluxogramas

Jorge é um estudante de Engenharia. Ele estuda numa universidade que fica distante da casa de seus pais. Por isso, ele mora sozinho num apartamento. Teve de aprender a se virar: lava suas roupas e frequentemente limpa os cômodos. Teve de aprender a cozinhar utilizando receitas de *sites* de busca. Um dia desses resolveu fazer ovo frito. Não teve dúvidas: foi ao computador e digitou "Ovo frito no micro-ondas passo a passo". Imediatamente apareceram diversas receitas, entre as quais ele escolheu a que descrevemos a seguir.



bitt24/Shutterstock.com

Existe algoritmo para fritar um simples ovo?

Com quantos passos se faz um ovo?

1. Separe os seguintes ingredientes e utensílios:
   - 1 ovo;
   - sal;
   - pimenta do reino;
   - 2 pires do mesmo tamanho.
2. Pegue o ovo e quebre depositando-o, sem estourar, num dos pires.
3. Coloque no ovo sal a gosto.
4. Coloque no ovo pimenta a gosto.
5. Cubra o ovo com o outro pires.
6. Coloque esses dois pires com o ovo dentro do micro-ondas.
7. Programe o micro-ondas por 1 minuto e 30 segundos.
8. Está pronto para comer.

Você reparou que esse procedimento para fritar o ovo no micro-ondas poderia ser simplificado em 4 passos?

1. Quebre um ovo em um pires; adicione sal e pimenta a gosto.
2. Coloque outro pires para cobrir o ovo.
3. Leve ao micro-ondas durante 1 minuto e meio.
4. Pronto, é só provar!

Esses dois exemplos de procedimentos para fritar um ovo poderíamos chamar de algoritmo para fritar um ovo em um micro-ondas. Mas o que é um algoritmo?

Podemos interpretar um algoritmo como uma forma pela qual descrevemos soluções para resolver um problema. O algoritmo pode também ser interpretado como uma sequência simples e objetiva (como fritar o ovo no micro-ondas) de instruções para solucionar determinado problema.

Diariamente utilizamos algoritmos na realização das mais variadas tarefas: preparar uma receita de um bolo, instalar um aparelho de TV novo, tomar um banho etc.

Um **algoritmo** é uma sequência finita, ordenada e não ambígua de passos para solucionar determinado problema ou realizar uma tarefa.

Vozes

Quem foi Ada Lovelace?

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Embora hoje a área de tecnologia da informação seja predominantemente masculina, as primeiras linhas de código processadas por uma máquina foram escritas por uma mulher. [...] Ada Lovelace é considerada a primeira programadora da história. [...] Ainda jovem, Lovelace iniciou sua relação profissional com Charles Babbage, o ajudando na concepção da máquina analítica.

[...] Além de criar o primeiro algoritmo de que se tem registro, Ada também concebeu a ideia de que os computadores poderiam realizar muito mais tarefas do que apenas calcular [...]. Hoje, obviamente, todos sabem que um computador faz muito mais do que meros cálculos, mas Lady Lovelace teve esse pensamento em meados de 1842.

MARTINS, Elaine. Quem foi Ada Lovelace? *In*: PARANÁ. Secretaria da Educação. SEED-PR, 17 jan. 2019. Disponível em: http://www.filosofia.seed.pr.gov.br/modules/noticias/article.php?storyid=703&tit=Quem-foi-Ada-Lovelace. Acesso em: 26 jun. 2020.

Hulton Archive/Getty Images

Ada Lovelace (1815-1852).

Não pretendemos nesse momento desenvolver toda uma teoria de linguagem de computação. Entretanto, podemos nos apropriar de suas ideias básicas, que nos possibilitarão desenvolver boas noções dessa poderosa ferramenta na organização e na resolução de problemas diversos. O britânico Alan Mathison Turing (1912-1954) é tido como o "pai da computação", pois ofereceu importante contribuição na criação do computador moderno.

Deve-se a ele a elaboração de um modelo teórico que seria responsável pela criação de conceitos como o de **algoritmo**.

Para que você possa conhecer um pouco mais esse personagem e compreender melhor sua grande façanha, vamos propor uma seção um pouco diferente a seguir.

#Ficaadica

Atividade em grupo. Orientações no Manual do Professor.

1. Assistam ao filme *O jogo da imitação*.
2. Elaborem um texto que, entre outros tópicos, apresente:
   - as dificuldades de Turing;
   - o feito de Turing;
   - o contexto histórico do filme.
3. Elaborem duas questões a serem feitas às demais equipes para promover uma discussão com a turma.

Black Bear Pictures/FilmNation Entertainment

Os algoritmos podem também ser expressos em forma de **fluxogramas**. Entenda o fluxograma como um conjunto de ícones que representa o fluxo de atividades de determinado processo. Representa, em outras palavras, uma notação especial feita de símbolos e abreviações que visam representar um processo composto de etapas.

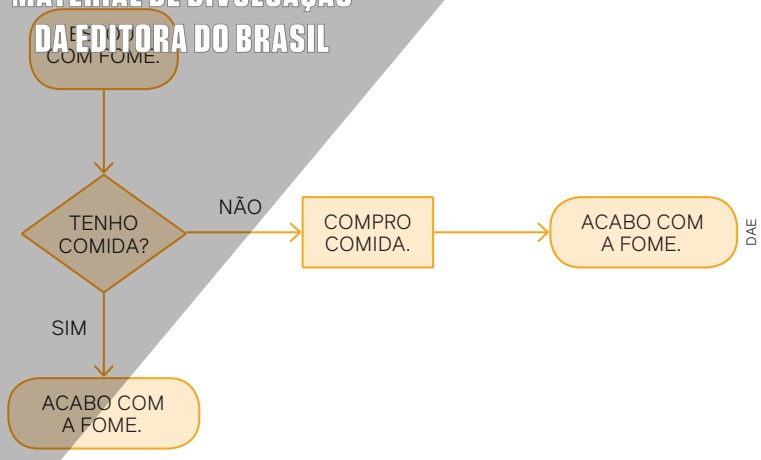
Para entender melhor os conceitos destacados, consulte o tópico **Algoritmos e fluxogramas** na **Caixa de ferramentas**.

A seguir vamos dar alguns exemplos de fluxogramas. Observe-os e discuta-os com os colegas.

Bateu aquela fome!

Estou com fome e preciso comer. O que fazer?

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL



DAE

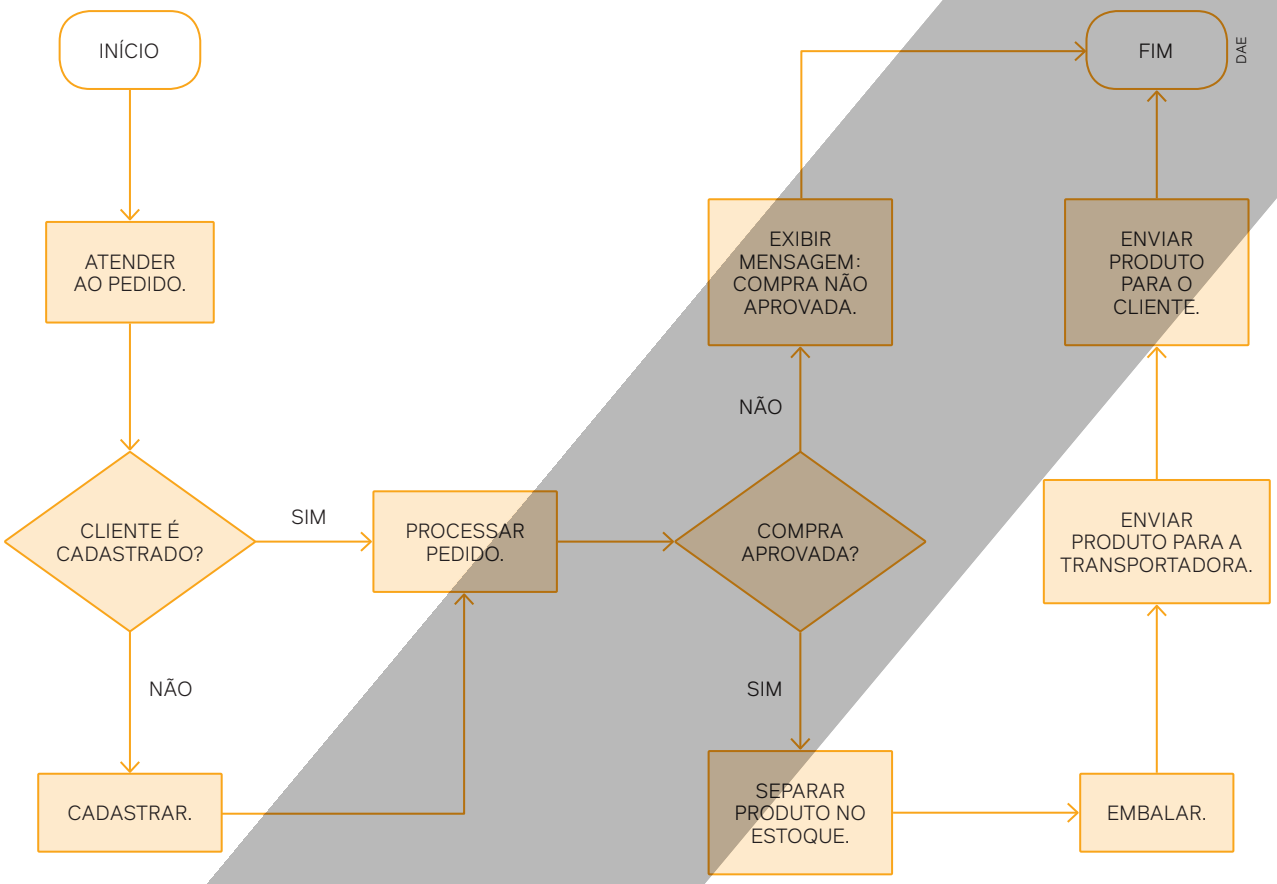
Para pensar e discutir

Respostas no Manual do Professor.

1. Como seria o algoritmo correspondente a esse fluxograma? Descreva o algoritmo em palavras.
2. Esse fluxograma apresenta uma tomada de decisão. Qual figura geométrica indica essa tomada de decisão?

Devo comprar?

Observe atentamente um fluxograma que aborda as etapas na compra *on-line* de determinado produto.



Para pensar e discutir – Respostas no Manual do Professor.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

1. Qual é a primeira decisão após atender ao pedido de um cliente?
2. O que é feito quando a compra do cliente não é aprovada?
3. Que outro item você considera importante também aparecer nesse fluxograma?

A utilização de um fluxograma para representar um algoritmo, por ser uma descrição por meio de figuras, facilita a comunicação do que se deseja com o algoritmo em si ou com o programa (linguagem de computador) que se deseja obter.

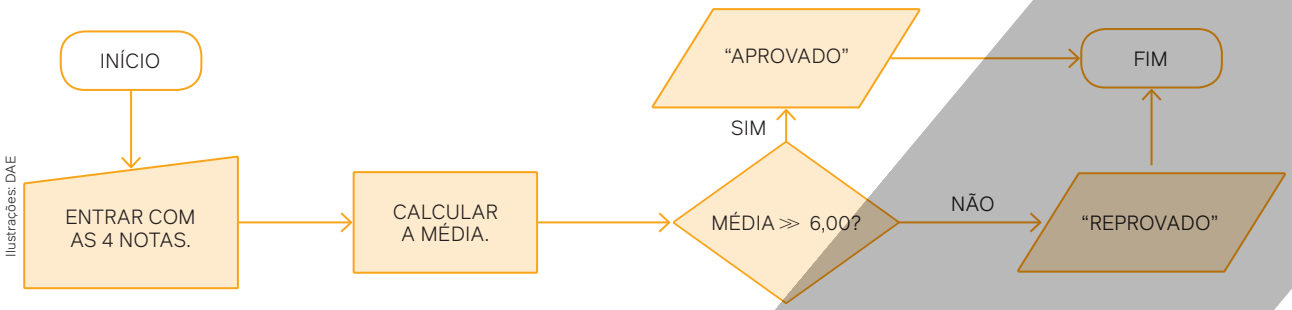
Minhas notas!

Algoritmo e fluxograma para calcular a média de quatro notas de um aluno e verificar se ele foi aprovado (média maior ou igual a 6,00) ou reprovado (se a média for menor que 6,00).

- Escrevendo um **algoritmo**

1. Entrar com as quatro notas do aluno.
2. Calcular a média aritmética dessas quatro notas.
3. Verificar se a média é maior ou igual a 6,00.
4. Se sim, indicar no vídeo "Aprovado".
5. Se não, indicar no vídeo "Reprovado".

- Obtendo o **fluxograma**



Ilustrações: DAE

Observação

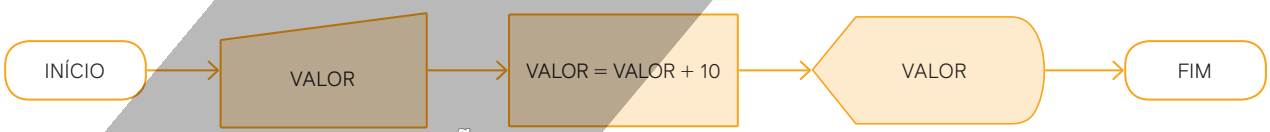
Nesse fluxograma poderíamos utilizar mais símbolos no lugar das palavras. Por exemplo, ao entrar com as quatro notas e calcular a média, poderíamos ter feito:

DAE

À medida que vamos utilizando cada vez mais fluxogramas, essas notações acabam sendo mais detalhadas e objetivas. Na computação, o algoritmo (representado por meio de um fluxograma) diz ao computador o que ele deverá fazer. Só que, assim como existem diferentes idiomas utilizados para as pessoas se comunicarem, também existem diferentes linguagens na computação, ou seja, um mesmo algoritmo pode ser escrito em linguagens diferentes.

Atividades

1. Analise o fluxograma a seguir.
Orientações no Manual do Professor.



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

a) Explique o que indica o fluxograma.

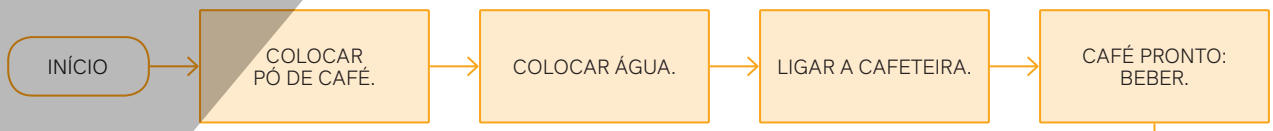
b) Escreva uma situação que possa ser representada por meio desse fluxograma.

2. Pense em sua rotina quando você tem aulas, desde o momento em que acorda, vindo para a escola, até a volta para casa. O início seria acordar e o fim seria chegar em casa. Com base nisso, faça o que se pede: Respostas no Manual do Professor.

a) Escreva um algoritmo que descreva (com palavras) essa sua rotina.

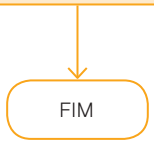
b) Elabore um fluxograma correspondente a esse algoritmo.

3. Márcia elaborou um fluxograma para fazer café em sua casa após colocar o filtro na cafeteira.

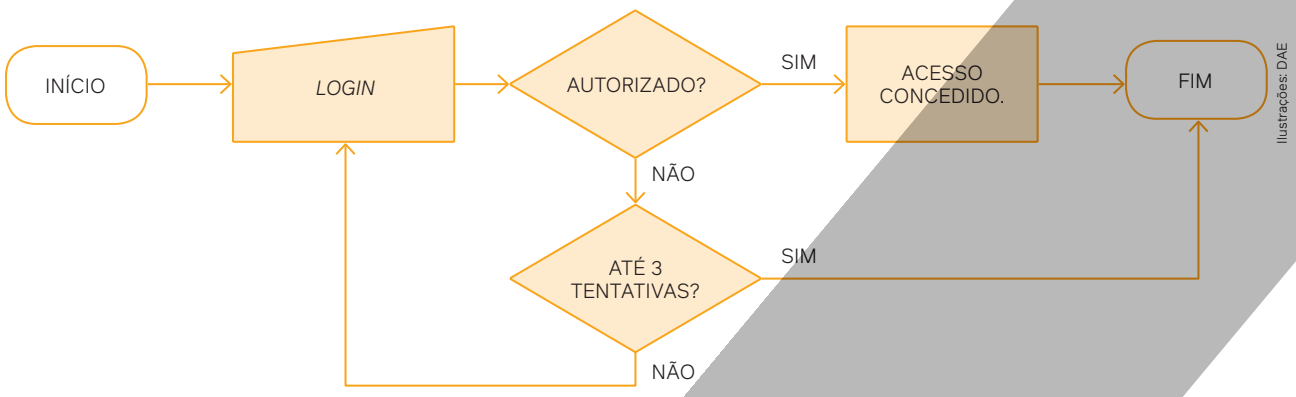


Refaça o fluxograma da Márcia inserindo as seguintes etapas após ligar a cafeteira:
Orientações no Manual do Professor.

- Aguardar.
- O café está pronto?
- Se sim, beber; se não, aguardar.



4. Observe atentamente as informações do fluxograma a seguir.



Ilustrações: DAE

Escreva uma frase que interprete esse fluxograma e sua finalidade. Resposta no Manual do Professor.

5. Elabore um fluxograma conforme o algoritmo a seguir.

- Entre com dois números *A* e *B*.
- Efetue a adição desses dois valores.
- Apresente o resultado da adição desses dois valores.

6. Faça um fluxograma para calcular o resultado da avaliação de um aluno após duas etapas, sendo que a nota da 1ª etapa representa 40% do resultado, e a nota da 2ª etapa, 60% do resultado. Esse aluno será considerado aprovado se o resultado for maior ou igual a 6 e reprovado se o resultado for menor que 6. É importante, no final, exibir "aprovado" ou "reprovado". Resposta no Manual do Professor.

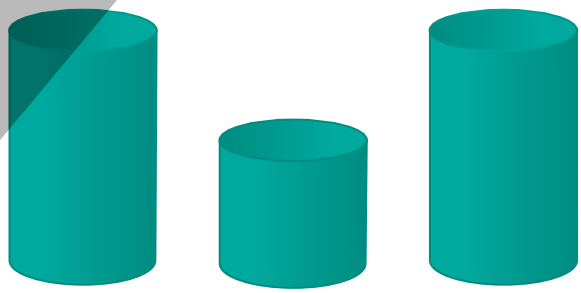
7. Analise o fluxograma abaixo.

Explique o que indica esse fluxograma. Esse fluxograma indica os passos para que uma pessoa faça um percurso com a forma de um hexágono.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

8. Utilizando o fluxograma anterior, elabore um fluxograma de tal maneira que a pessoa faça um percurso correspondente ao de um hexágono de lado 10 m. Resposta no Manual do Professor.

9. Propomos aqui um desafio muito curioso para você resolver por meio de algoritmo.
Você dispõe de três recipientes em forma de cilindro. Eles estão vazios e a capacidades deles, quando totalmente cheios, está indicada em litros nas figuras a seguir.



9 litros
Recipiente A.

4 litros
Recipiente B.

9 litros
Recipiente C.

No momento, os recipientes estão vazios, e não há outras marcações além da indicação da capacidade máxima. Elabore uma sequência de passos (algoritmo) para que em uma das vasilhas você consiga colocar exatamente 6 litros de água. Resposta pessoal.

Aproveitando a oportunidade

Introdução à programação

Até aqui você trabalhou com algoritmos e fluxogramas. Esses modelos representam não apenas a forma como dados são processados mas a linguagem que os computadores entendem.

A linguagem algorítmica recebe também a denominação de pseudocódigo ou pseudolinguagem. Ela representa uma linguagem intermediária entre a linguagem natural e a linguagem de programação. Ao utilizarmos um pseudocódigo, nos aproximamos das construções de uma linguagem de programação, mas sem a exigência de rigidez na definição das regras para suas instruções.

E o que é linguagem de programação?

Com o objetivo de tornar mais simples, mais eficiente e menos sujeito a erros o trabalho dos programadores de computador, foram criadas diversas linguagens de programação próximas à linguagem natural. Podemos dizer que linguagem de programação é um conjunto de palavras-chave, geralmente na língua inglesa, e um conjunto de símbolos que estabelecem os comandos e as instruções necessárias para a elaboração de um programa.

As linguagens que têm essas características – ou seja, são mais próximas da linguagem natural – são chamadas de linguagens de alto nível; algumas delas: Pascal, C, Java, C++ e Python. Já as linguagens denominadas de baixo nível são as que estão mais próximas da linguagem de máquina (representação binária), como Assembly.

Veja a seguir o exemplo de um programa que calcula a média entre duas notas, considera aprovada a nota maior ou igual a sete e todas as menores de sete são reprovadas.

```
1  INÍCIO_ALGORITMO
2  DECLARE nota1, nota2, M: NUMÉRICO
3  LEIA nota 1
4  LEIA nota 2
5  M ← (nota1 + nota2)/2
6  SE M >= 7.0 ENTÃO
7  ESCREVA “Aprovado”
8  SENÃO
9  ESCREVA “Reprovado”
10 FIM-SE
11 FIM_ALGORITMO
```

Em linguagem de programação, o símbolo >= é chamado de operador e equivale ao símbolo ≥ usado na Matemática.

As palavras escritas com letras maiúsculas são parte do conjunto de regras que a linguagem algorítmica deve seguir. Há certa flexibilidade quanto ao uso dessas palavras, por exemplo: a instrução ESCREVA pode ser substituída por ESCREVER. Note que as instruções LEIA e ESCREVA referem-se a operações de entrada e saída de dados.

O símbolo / na linha 5 indica a operação de divisão, e o símbolo ← expressa uma operação de atribuição. Esse segundo símbolo pode ser interpretado: a posição de memória, representada por M, recebe o valor correspondente à soma da nota 1 com a nota 2 e o resultado é dividido por 2.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Há uma grande vantagem no uso de linguagem algorítmica: a facilidade com que um pseudocódigo é transcrito em linguagem de programação. Entretanto, há a desvantagem de limitar a capacidade de expressão por causa das regras impostas para a elaboração de instruções.

É claro que você pode pesquisar muito mais informações sobre as linguagens que existem. Que tal fazer cursos para ser um programador de computador?

1. Junte-se a outro colega que queira conhecer melhor a linguagem de programação e façam o que se pede a seguir. Orientações no Manual do Professor.

a) Pesquisem, entre as linguagens de programação, quais são as mais utilizadas.

b) Elaborem um quadro comparativo com as vantagens e desvantagens de cada uma.

2. Ainda com o colega, entrevistem alguém de sua comunidade que compreenda linguagens de programação. Orientações no Manual do Professor.

a) Elaborem um questionário para a entrevista com o objetivo de obter informações sobre a formação desse profissional; por exemplo, quando iniciou o trabalho com programação, as dificuldades que enfrentou, a remuneração (para verificar se a atividade é valorizada ou não), os erros que já cometeu em uma programação, suas motivações, exemplos de problemas que um programa de computador resolve etc.

b) Com os dados obtidos na entrevista, elaborem um texto para apresentar aos colegas na sala de aula.

2 Tabelas e gráficos estatísticos

As imagens a seguir são de dois locais bem conhecidos no Brasil: Avenida Paulista, na cidade de São Paulo, e Praia de Copacabana, na cidade do Rio de Janeiro. Elas foram registradas em abril e maio de 2020 e têm em comum o fato de que em ambas o dia está ensolarado e não há praticamente ninguém nas ruas.

Eram os primeiros dias da pandemia da covid-19, que causou muitas mortes no Brasil e no mundo inteiro.

Bruno Fernandes/Fotoarena

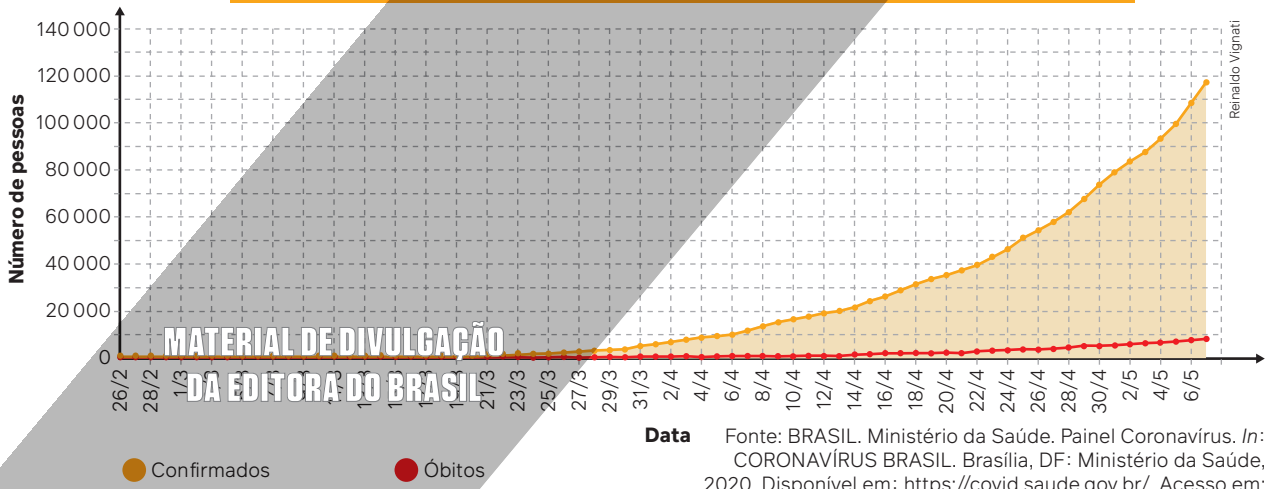
Avenida Paulista, São Paulo (SP), 17 maio 2020.

Jose Lucena/Futura Press

Praia de Copacabana, Rio de Janeiro (RJ), 4 abr. 2020.

O Ministério da Saúde determinou que as pessoas não saíssem de casa para que fosse possível controlar o aumento da pandemia. O gráfico a seguir foi produzido com o número de pessoas infectadas e o número de mortes no país até 6 de maio de 2020.

Acumulado de casos e óbitos de covid-19 por data de confirmação



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Fonte: BRASIL. Ministério da Saúde. Painel Coronavírus. *In*: CORONAVÍRUS BRASIL. Brasília, DF: Ministério da Saúde, 2020. Disponível em: https://covid.saude.gov.br/. Acesso em: 11 maio 2020.

Para pensar e discutir

Respostas no Manual do Professor.

1. Compare a taxa de mortes em diferentes fases da pandemia analisando sua evolução por semanas e responda: Em quais semanas a taxa foi mais acentuada?
2. Em que dia iniciou o decrescimento do número de mortes no Brasil em 2020? Pesquise!
3. Observando o gráfico anterior, é correto afirmar que o número de casos mais que duplicou de 16/4 a 26/4?
4. E o que ocorreu com o número de mortes nesse mesmo intervalo de tempo?

Para obter as respostas das duas primeiras questões você teve de fazer uma pequena pesquisa, provavelmente utilizando alguma ferramenta de busca. Já para as duas últimas, houve a necessidade de observar as informações do gráfico. Pesquisa e análise de informações fazem parte do estudo da **Estatística**. É o que faremos neste tópico.

Retomaremos alguns gráficos estudados ao longo do Ensino Fundamental e também analisaremos informações da atualidade.

Análise e construção de tabelas e gráficos

Quando falamos em tabelas e gráficos estatísticos adentramos no tema "Tratamento da informação". Em qualquer área de atuação profissional é necessário utilizar diferentes linguagens para produzir e comunicar ideias. Além disso, é fundamental que qualquer profissional adquira habilidades para analisar criticamente informações socioeconômicas, questionar a realidade de sua vida e das pessoas ao redor.

Os gráficos estatísticos que você certamente já conhece desde o Ensino Fundamental são: gráfico de colunas, gráfico de barras, gráfico de segmentos e gráfico de setores. Vamos retomá-los observando seu uso em publicações da mídia ao longo de 2019. Além de observar os tipos de gráfico, é importante que você interprete e analise as informações com os colegas.

Gráfico de colunas

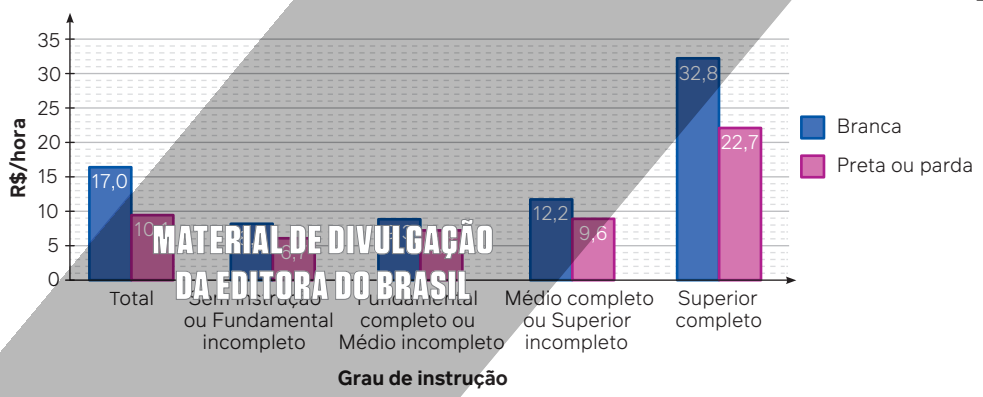
Os gráficos de colunas são utilizados, geralmente, para mostrar alterações de dados em um período de tempo com comparação entre os itens. Nesse tipo de gráfico, as categorias são normalmente organizadas ao longo de um eixo horizontal e os valores correspondentes, no eixo vertical.

Análise de um gráfico de colunas

Este gráfico mostra dados de 2019 publicados no *site* do IBGE.

Rendimento-hora médio real do trabalho principal das pessoas ocupadas, por cor ou raça, segundo o nível de instrução – Brasil – 2018

Reinaldo Vignati



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

Fonte: ÀS VÉSPERAS do Censo 2020, conheça as notícias que marcaram o ano do IBGE. *Agência IBGE de Notícias*, Rio de Janeiro, 30 dez. 2019. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/26468-as-vesperas-do-censo-2020-conheca-as-noticias-que-marcaram-o-ano-do-ibge. Acesso em: 11 maio 2020.

Note que cada categoria é composta de duas colunas lado a lado. É o resultado de uma pesquisa sobre o "rendimento-hora médio real" do trabalho. Analise as informações.

Para pensar e discutir

Orientações no Manual do Professor.

1. Quanto maior o grau de instrução, menores as diferenças no valor recebido por hora. Essa afirmativa é verdadeira? Justifique.
2. O valor/hora do trabalho no Brasil aumenta à medida que aumenta o nível de escolarização. Essa afirmativa é verdadeira? Justifique.
3. Após a análise das questões anteriores, elabore um pequeno texto tendo como referência os dados das informações do gráfico. Imagine que você é um repórter escrevendo esse texto para um jornal; na publicação, após o texto será colocado o gráfico. Crie um título para sua "reportagem".

Gráfico de barras

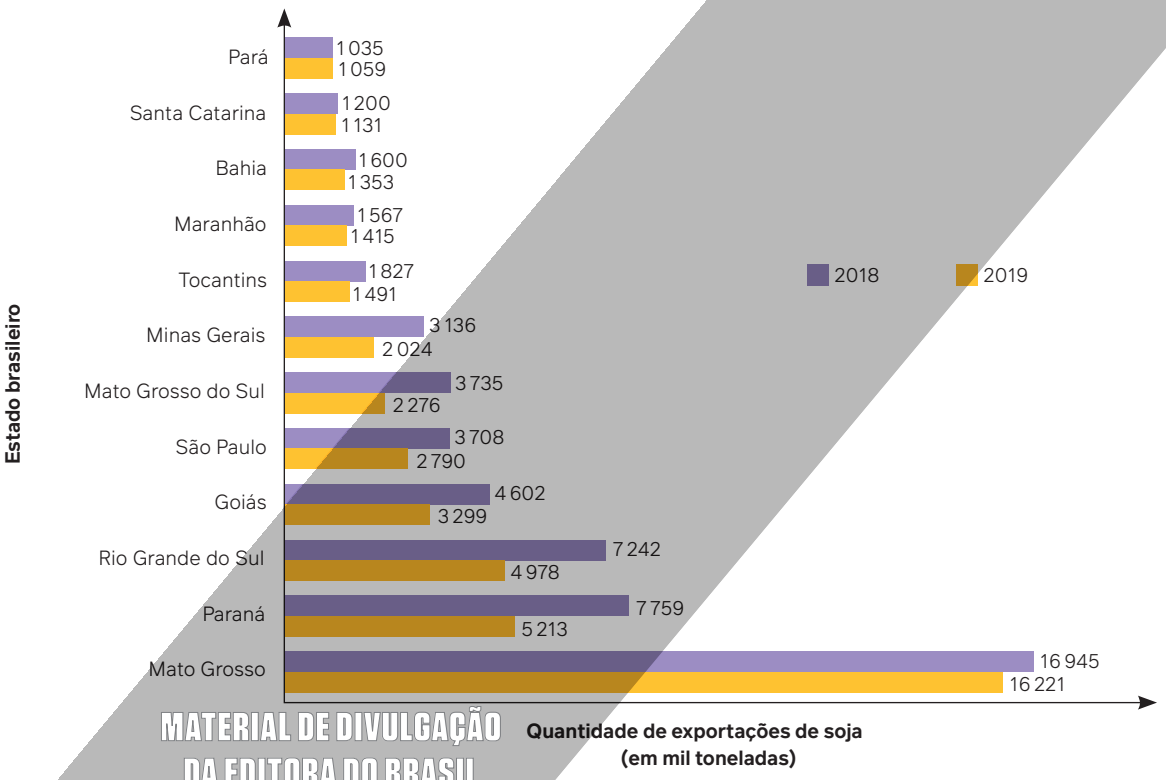
Nesse tipo de gráfico, as categorias normalmente são organizadas ao longo de um eixo vertical e os valores correspondentes, no eixo horizontal.

Quando as barras são verticais, é também chamado gráfico de colunas, visto anteriormente.

Análise de um gráfico de barras

O gráfico de barras é muito utilizado para comparar quantidades e acompanhar sua evolução ao longo de um período. Veja a seguir como facilita a visualização dos dados – neste caso, dos estados que exportaram maior quantidade de soja no primeiro semestre de 2018 e no de 2019.

Comparativo das exportações brasileiras de soja em grão de janeiro a julho



Reinaldo Vignati

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

POPOV, Daniel. Mato Grosso é o estado que mais exportou soja este ano. *Canal Rural*, São Paulo, 8 ago. 2019. Disponível em: https://www.canalrural.com.br/agronegocio/mato-grosso-e-o-estado-que-mais-exportou-soja-neste-ano/. Acesso em: 19 maio 2020.

Safra de grãos fecha 2019 com recorde de 241,5 milhões de toneladas

A previsão para este ano é de uma safra de 243,2 milhões de toneladas

A safra de cereais, leguminosas e oleaginosas fechou 2019 com uma produção recorde de 241,5 milhões de toneladas, segundo a última estimativa divulgada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). De acordo com dados divulgados hoje (8), a estimativa é 6,6% superior à safra de 2018, de 226,5 milhões de toneladas, e 1,3% maior que o recorde anterior, de 2017, de 238,4 milhões de toneladas.

De acordo com o IBGE, a soja, que é o principal grão, no entanto, fechou com 113,5 milhões de toneladas, uma queda de 3,7% em relação a 2018. O arroz também teve redução de 12,6%.

As quedas foram compensadas, principalmente, pelas produções recordes de 100,6 milhões de toneladas de milho, com 23,6% a mais que em 2018, e de 6,9 milhões de toneladas de algodão, uma alta de 39,8%.

Prognóstico para 2020

O IBGE também divulgou seu terceiro prognóstico para a safra de 2020, que deverá ser ainda maior do que a estimada para 2019, de 243,2 milhões de toneladas, ou seja, 0,7% acima da safra do ano passado.

Entre as seis principais safras de grãos, apenas a segunda safra do milho deverá apresentar queda em relação em 2019, de 10,4%. As demais deverão apresentar alta: soja (7,8%), arroz (0,9%), primeira safra do milho (1,8%), algodão (2,7%) e primeira safra de feijão (3,3%).

ABDALA, Vitor. Safra de grãos fecha 2019 com recorde de 241,5 milhões de toneladas. *Agência Brasil*, Brasília, DF, 8 jan. 2020. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2020-01/safra-de-graos-fecha-2019-com-recorde-de-2415-milhoes-de-toneladas. Acesso em: 11 maio 2020.

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Junte-se a dois colegas para a atividade. Utilizem planilha eletrônica.

1. Leiam as informações da reportagem.
2. Elaborem uma tabela com a quantidade de toneladas das safras de 2018 e 2019 de soja, milho e algodão. As quantidades de 2019 são citadas diretamente no texto, mas as que se referem a 2018 vocês devem calcular seguindo as informações dadas.
3. Elaborem um gráfico de barras contendo os dados do item 2.
4. Escrevam um pequeno texto comentando as informações do gráfico e façam comparações entre os produtos.

Gráfico de setores

Os gráficos de setores também são conhecidos como gráficos de *pizza*. Seu uso é indicado para expressar uma relação de proporcionalidade entre um dado e o todo, já que os dados somados compõem o todo.

Análise de um gráfico de setores

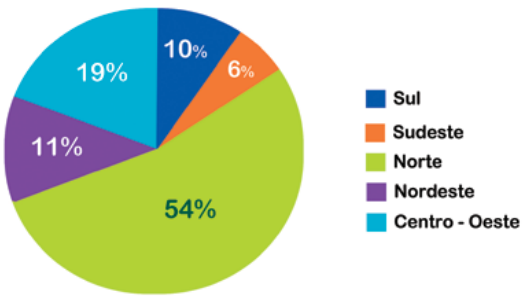
Este gráfico de setor foi extraído do *site* da Fundação Nacional do Índio (Funai). Orientações no Manual do Professor.

Segundo a Funai, há 462 Terras Indígenas regularizadas que representam, ao todo, aproximadamente 12,2% [illegible]

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Observe no gráfico que o círculo completo (o todo) representa o total de Terras Indígenas regularizadas. Assim, a comparação entre os setores é visual. Ao compará-los, fica evidente que a Região Norte concentra a maior quantidade de Terras Indígenas regularizadas, enquanto na Região Sudeste há a menor quantidade. O texto a seguir explica como são classificadas as Terras Indígenas.

Distribuição das Terras Indígenas regularizadas por região administrativa



Mauro Salgado

Fonte: BRASIL. Ministério da Justiça e Segurança Pública. Fundação Nacional do Índio. *Terras Indígenas: O que é?* Brasília, DF: Funai, [20--]. Disponível em: http://www.funai.gov.br/index.php/nossas-acoes/demarcacao-de-terras-indigenas. Acesso em: 16 jun. 2020.

Modalidades de Terras Indígenas

Nos termos da legislação vigente (CF/88, Lei nº 6001/73 – Estatuto do Índio, Decreto nº 1775/96), as Terras Indígenas podem ser classificadas nas seguintes modalidades:

- **Terras Indígenas Tradicionalmente Ocupadas:** São as Terras Indígenas de que trata o art. 231 da Constituição Federal de 1988, direito originário dos povos indígenas, cujo processo de demarcação é disciplinado pelo Decreto nº 1775/96.

- **Reservas Indígenas:** São terras doadas por terceiros, adquiridas ou desapropriadas pela União, que se destinam à posse permanente dos povos indígenas. São terras que também pertencem ao patrimônio da União, mas não se confundem com as terras de ocupação tradicional. Existem Terras Indígenas, no entanto, que foram reservadas pelos estados-membros, principalmente durante a primeira metade do século XX, que são reconhecidas como de ocupação tradicional.
- **Terras Dominiais:** São as terras de propriedade das comunidades indígenas, havidas, por qualquer das formas de aquisição do domínio, nos termos da legislação civil.
- **Interditadas:** São áreas interditadas pela Funai para proteção dos povos e grupos indígenas isolados, com o estabelecimento de restrição de ingresso e trânsito de terceiros na área. A interdição da área pode ser realizada concomitantemente ou não com o processo de demarcação, disciplinado pelo Decreto nº 1775/96.

Renato Soares/Pulsar Imagens

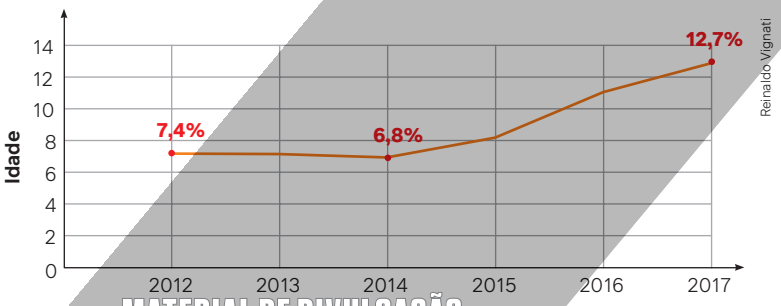
Oca da etnia aparai-wayana na Aldeia Itapequi, refletida no Rio Paru d'Este. Laranjal do Jari (AP), 2015.

BRASIL. Ministério da Justiça e Segurança Pública. Fundação Nacional do Índio. *Modalidades de Terras Indígenas*. Brasília, DF: Funai, [20--]. Disponível em: http://www.funai.gov.br/index.php/indios-no-brasil/terras-indigenas. Acesso em: 11 maio 2020.

Análise de um gráfico de linhas

O gráfico a seguir apresenta a taxa de desocupação no Brasil de 2012 a 2017.

Média anual da taxa de desocupação das pessoas de 14 anos ou mais de idade – Brasil



Reinaldo Vignati

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Fonte: DONGETTI, Marcos. IBGE: o Brasil tem 18 milhões de desempregados! *In*: TEMPOS FRATURADOS. [S. l.], 29 mar. 2019. Disponível em: https://temposfraturadosememoria.blogspot.com/2019/03/ibge-o-brasil-tem-18-milhoes-de.html. Acesso em: 11 maio 2020.

Gráfico de linhas

Os gráficos de linhas são utilizados geralmente quando o objetivo é observar o comportamento de certo dado ao longo do tempo. Os dados das categorias são distribuídos uniformemente ao longo do eixo horizontal, enquanto os valores aparecem no eixo vertical.

Para pensar e discutir

Orientações no Manual do Professor.

1. Houve aumento na taxa de desocupação, segundo o gráfico, durante qual período?
2. O que mais chama a atenção nesse gráfico? Elabore uma frase para explicar.

Histograma

Quando uma variável tem valores indicados por classes, isto é, por intervalos, é comum o uso de um tipo de gráfico denominado histograma.

Análise de um histograma

Em uma escola, os 80 alunos do Ensino Médio têm alturas assim distribuídas:

Altura (em cm)	135 ⟼ 145	145 ⟼ 155	155 ⟼ 165	165 ⟼ 175	175 ⟼ 185
Quantidade de alunos	12	20	24	16	8

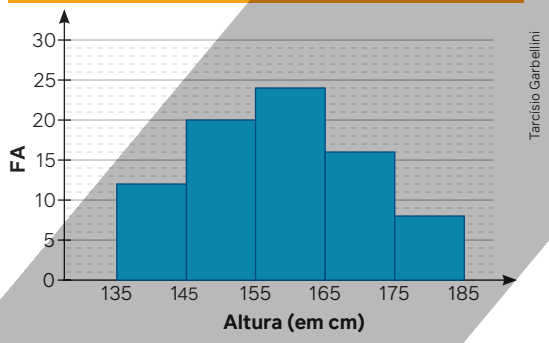
Utilizamos a notação $135 \mapsto 145$, por exemplo, para representar alturas que vão de 135 cm até 145 cm, mas excluindo o valor 145 cm. Se considerássemos a altura de uma pessoa como um número real, poderíamos também indicar que pertencem ao intervalo $[135; 145[$, isto é, fechado em 135 e aberto em 145.

O histograma ao lado representa a situação; FA indica a Frequência Absoluta, isto é, o número de pessoas do exemplo.

Ao analisar esse histograma podemos interpretar que há maior concentração de pessoas com altura entre 145 cm e 175 cm. De forma análoga, podemos afirmar que há poucos alunos com altura maior de 175 cm e também há poucos alunos com altura menor que 145 cm. Você concorda com essa análise?

Vamos agora fazer um estudo da altura dos alunos de sua turma!

Distribuição da frequência da altura dos alunos do Ensino Médio



Fonte: Dados fornecidos pela escola (dados fictícios).

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Esta atividade deve ser feita coletivamente utilizando planilha eletrônica.

1. Obtenham a medida da altura de todos os alunos da turma.
2. Organizem as medidas em classes.
3. Elaborem uma tabela contendo essas classes e a quantidade de alunos correspondente.
4. Elaborem um histograma com as informações.

Gráfico pictórico

O gráfico pictórico utiliza figuras ou conjunto de figuras para representar os dados correspondentes. As figuras podem ser dispostas em colunas ou linhas para enfatizar os dados ou as categorias.

Análise de um gráfico pictórico

Observe as informações do gráfico "Artilheiros da Copa do Mundo". Há dados até a Copa do Mundo de 2014.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Artilheiros da Copa do Mundo

Gols marcados em jogos de Copa do Mundo

Bola usada em cada um dos Mundiais

1954	1958	1962	1966
1970	1974	1978-94	1998
2002	2006	2010	2014

Fonte: DUNFORD, Daniel; STYLIANOU, Nassos. Copa do Mundo 2018: tudo o que você precisa saber em 5 gráficos. *BBC News Brasil*, São Paulo, 12 jun. 2018. Disponível em: https://www.terra.com.br/esportes/futebol/copa-do-mundo/copa-do-mundo-2018-tudo-o-que-voce-precisa-saber-em-5-graficos,26591c90ec14c21d8253b7ef3037065b9l9gsv19.html. Acesso em: 21 maio 2020.

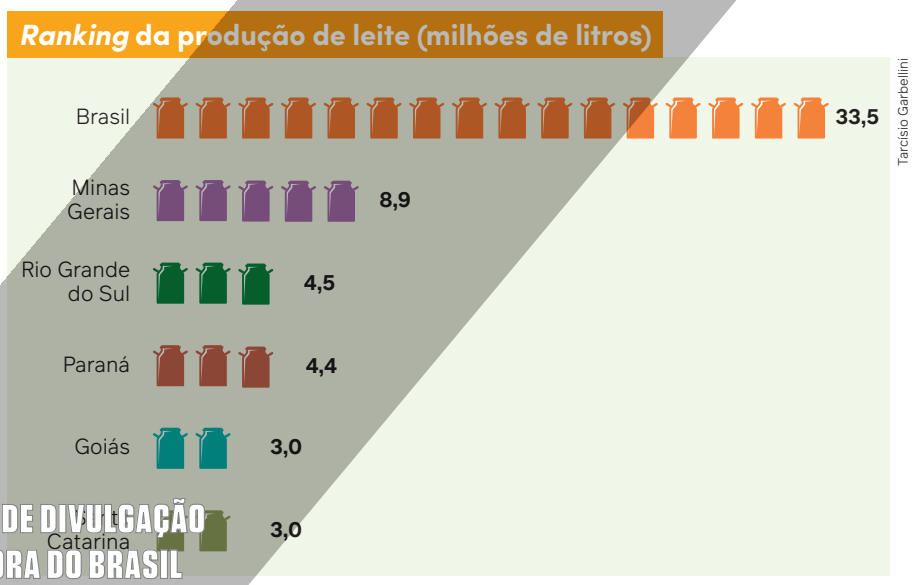
Para pensar e discutir Orientações no Manual do Professor.

1. Na categoria "Jogadores" do gráfico há um elemento ao lado do nome. O que ele indica?
2. Os valores numéricos estão organizados como no gráfico de barras. Como eles estão representados?
3. Como você faria um gráfico pictórico sobre os países e o número de copas que cada um ganhou? Que tal pesquisar e fazer esse gráfico?

Atividades

1. Observe o gráfico a seguir que apresenta o *ranking* da produção de leite no Brasil e em alguns estados brasileiros, em 2017. É um exemplo de gráfico pictórico que utiliza a imagem de um balde como elemento para associar à ideia de leite. Podemos determinar o valor que cada balde representa? Justifique.

   Refaça o gráfico pictórico com estes dados numéricos e elabore uma legenda, indicando o valor que cada balde representa. Orientações no Manual do Professor.



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Fonte: TIPOS de gráficos no ensino. *In*: IBGE EDUCA. Rio de Janeiro, c2020. Disponível em: https://educa.ibge.gov.br/professores/educa-recursos/20773-tipos-de-graficos-no-ensino.html. Acesso em: 26 jun. 2020.

2. O gráfico e o texto a seguir foram publicados no *site* do IBGE. Leia o texto, analise as informações do gráfico e faça o que se pede. Orientações no Manual do Professor.

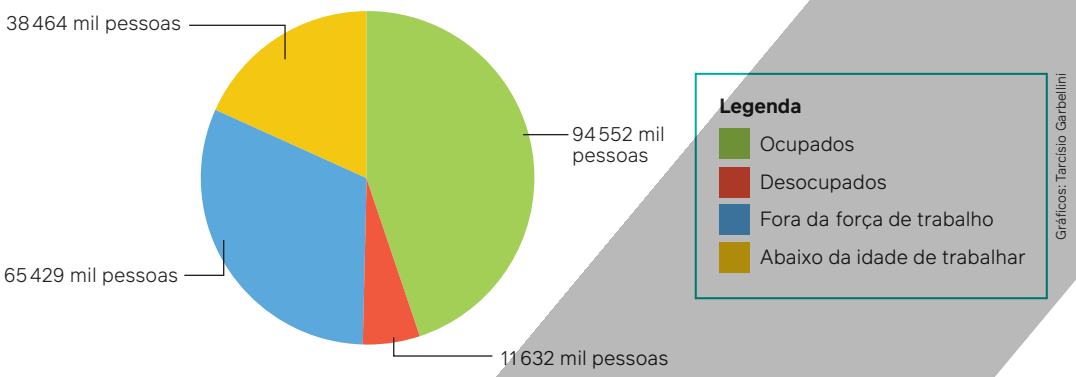
   O desemprego, de forma simplificada, se refere às pessoas com idade para trabalhar (acima de 14 anos) que não estão trabalhando, mas estão disponíveis e tentam encontrar trabalho. Assim, para alguém ser considerado desempregado, não basta não possuir um emprego. Veja alguns exemplos de pessoas que, embora não possuam um emprego, não podem ser consideradas desempregadas:

   - um universitário que dedica seu tempo somente aos estudos;
   - uma dona de casa que não trabalha fora;
   - uma empreendedora que possui seu próprio negócio.

   De acordo com a metodologia usada pelo IBGE na Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua – PNAD Contínua, o estudante e a dona de casa são pessoas que estão fora da força de trabalho; já a empreendedora é considerada ocupada.

A PNAD Contínua é a nossa pesquisa que mostra quantos desempregados há no Brasil. Nela, o que é conhecido popularmente como "desempregado" aparece no conceito de "desocupação". Confira no gráfico a seguir os dados de ocupação, desocupação e outras divisões do mercado de trabalho no Brasil, de acordo com os últimos resultados da PNAD Contínua.

População brasileira, de acordo com as divisões do mercado de trabalho, 4º bimestre 2019



DESEMPREGO. *In*: IBGE. Rio de Janeiro, 8 abr. 2020. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/explica/desemprego.php. Acesso em: 11 maio 2020.

a) Observando que as populações indicadas estão em milhares de pessoas, elabore uma tabela com as informações do gráfico.

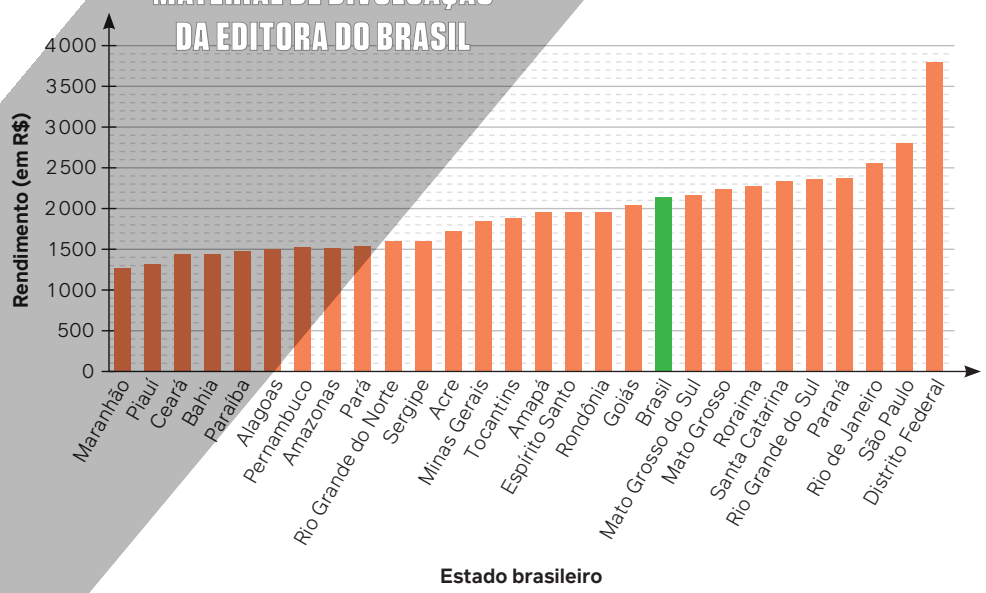
b) De acordo com as informações desse gráfico, qual era a população brasileira em 2019?

c) Elabore um gráfico de setores com base no gráfico apresentado, mas com dados percentuais. Utilize planilha eletrônica.

3. Os dados a seguir servem para você comparar o rendimento médio do trabalho, em reais, entre as unidades da Federação e também a média brasileira. Orientações no Manual do Professor.

Rendimento médio do trabalho principal das pessoas de 14 anos ou mais de idade ocupadas na semana de referência, segundo as Unidades da Federação – 2018

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL



Fonte: IBGE. *Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua 2018*. Rio de Janeiro: IBGE, [2019?]. Nota: Dados consolidados de primeiras entrevistas.

Refaça o gráfico acima agrupando as unidades da federação por região brasileira.

4. ANA é a sigla da Agência Nacional de Águas. Leia atentamente este pequeno texto sobre a água, extraído do *site* desse órgão público. Orientações no Manual do Professor.

> Estima-se que 97,5% da água existente no mundo é salgada e não é adequada ao nosso consumo direto nem à irrigação da plantação. Dos 2,5% de água doce, a maior parte (69%) é de difícil acesso, pois está concentrada nas geleiras, 30% são águas subterrâneas (armazenadas em aquíferos) e 1% encontra-se nos rios. Logo, o uso desse bem precisa ser pensado para que não prejudique nenhum dos diferentes usos que ela tem para a vida humana.
>
> BRASIL. Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico. *Água no mundo*. Brasília, DF: ANA, [200-]. Disponível em: https://www.ana.gov.br/panorama-das-aguas/agua-no-mundo. Acesso em: 29 abr. 2020.

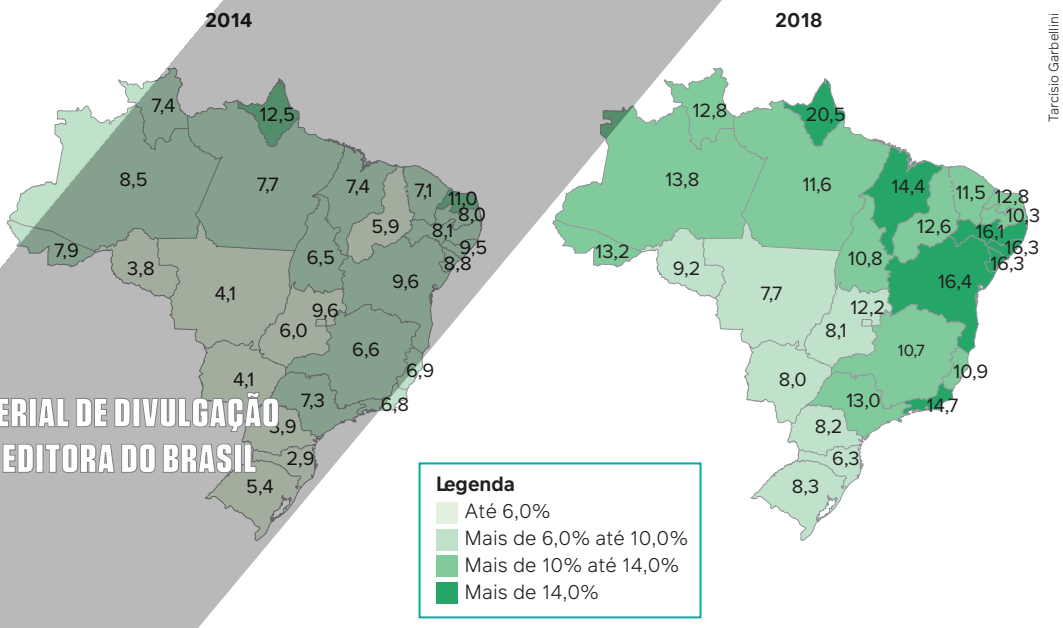
a) Que gráfico estatístico você usaria para ilustrar a primeira frase do texto? Justifique.

b) Faça o gráfico que você pensou para o item anterior usando recursos digitais.

c) Faça um gráfico de setores em 3D para representar as informações da segunda frase. Considere que os 2,5% de água doce representem o todo.

5. Veja no "cartograma" a seguir a taxa de desocupação dos brasileiros em cada Unidade da Federação em 2014 e em 2018.

Taxa de desocupação, segundo as Unidades da Federação – 2014/2018



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Tarcísio Garbellini

Fonte: IBGE. *Síntese de indicadores sociais*: uma análise das condições de vida da população brasileira 2019. Rio de Janeiro: IBGE, 2019. p. 32. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101678.pdf. Acesso em: 11 maio 2020.

Responda:

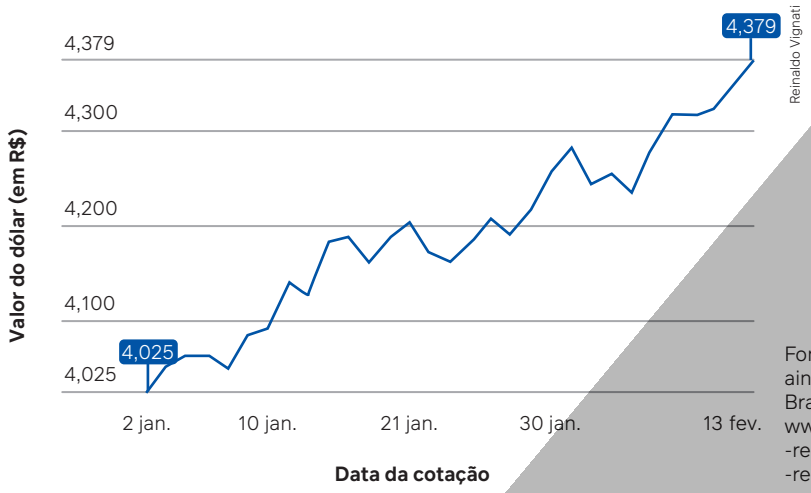
a) Quanto maior a taxa de desocupação, maior o desemprego? Sim.

b) Em qual Unidade da Federação observa-se a maior taxa de desocupação tanto em 2014 quanto em 2018? No Amapá.

c) Redija um texto comparando as taxas de desocupação por estado nos anos de 2014 e 2018. Aborde as seguintes questões: estados em que a taxa de desocupação aumentou e estados em que a taxa de desocupação diminuiu. De modo geral, como evoluiu a taxa de desemprego no Brasil de 2014 para 2018? A situação do desemprego, nesse período, melhorou ou se agravou? Em que estados a situação foi mais crítica? Use dados numéricos para apresentar seus argumentos. Resposta pessoal.

6. Com base exclusivamente nos dados do gráfico a seguir, sobre a cotação do dólar, avalie se as afirmações são verdadeiras ou falsas.

Evolução do dólar no início de 2020



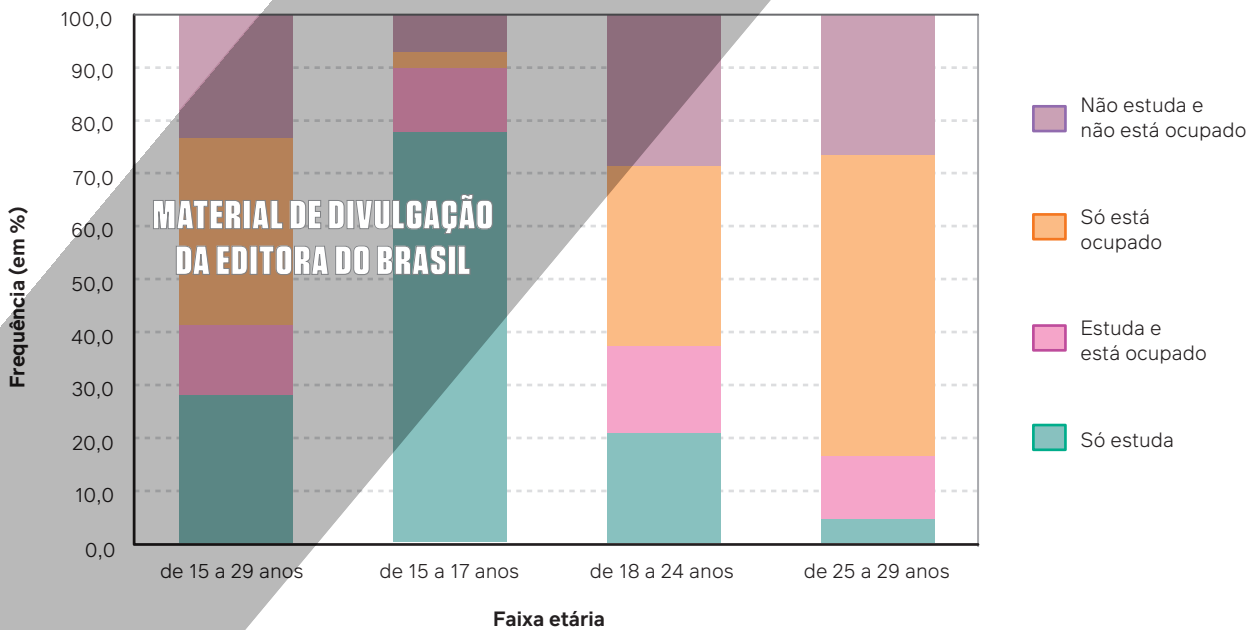
Fonte: NOBREGA, Ighor. Apesar de recorde, dólar ainda está longe do maior valor real. *Poder 360*, Brasília, DF, 15 fev. 2020. Disponível em: https://www.poder360.com.br/economia/apesar-de-recorde-dolar-ainda-esta-longe-do-maior-valor-real/. Acesso em: 11 maio 2020.

(V) Em 10 de janeiro de 2020 o dólar estava abaixo de R$ 4,200.

(F) De 2 de janeiro a 13 de fevereiro houve um aumento de mais de 10% na cotação do dólar.

7. Junte-se a um colega para esta atividade. Inicialmente, analisem as informações do gráfico publicado pelo IBGE.

Distribuição percentual dos jovens de 15 a 29 anos, por situação na atividade, segundo os grupos de idade – Brasil – 2018



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Fonte: IBGE. *Síntese de indicadores sociais*: uma análise das condições de vida da população brasileira 2019. Rio de Janeiro: IBGE, 2019. p. 43. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101678.pdf. Acesso em: 11 maio 2020.

Analise as informações e elabore um texto comentando como era a ocupação dos jovens brasileiros de 15 a 29 anos em 2018 em relação ao estudo. Estabeleça uma comparação entre os níveis de ocupação dos jovens de cada faixa etária apresentada no gráfico. Como a primeira coluna se relaciona com as demais colunas? Lembre-se de que "estar ocupado" significa ter um trabalho. Orientações no Manual do Professor.

Cuidados com as informações nos gráficos

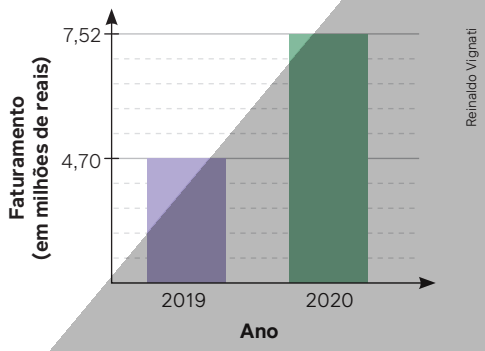
Vimos que os gráficos estatísticos são uma forma de apresentar dados de um fato, uma pesquisa, um desempenho etc. O gráfico é, sem dúvida, um recurso utilizado pela mídia para tornar a leitura e a interpretação das informações direta e, por que não, bem mais atraente. A análise crítica de informações apresentadas em tabelas ou gráficos deve considerar diversos aspectos, destacamos a seguir alguns deles.

- Verificação da fonte dos dados.
- Observação do título para conferir se o conteúdo faz sentido.
- Identificação das variáveis apresentadas nos eixos do gráfico.
- Verificação dos eixos (se, quando indicam valores, iniciam em zero).

A leitura cuidadosa e crítica possibilita melhor compreensão do contexto das informações do gráfico. O leitor pode fazer reflexões e até estabelecer conclusões e conjecturas. Entretanto, podemos nos deparar com gráficos elaborados deliberadamente para esconder informações ou direcionar o leitor a conclusões que nem sempre são as corretas.

Exemplificaremos a seguir algumas dessas situações. Utilizaremos gráficos fictícios nesses exemplos. A ideia é alertá-lo e incentivá-lo a analisar gráficos de modo mais criterioso e cuidadoso. Os exemplos a seguir foram elaborados com base na leitura do livro *Como mentir com Estatística,* do autor norte-americano Darrel Huff.

Resultado do biênio



Fonte: Dados fornecidos pela empresa (dados fictícios).

Exemplo 1

Este gráfico ao lado contém o faturamento de uma mesma empresa em dois anos consecutivos: 2019 e 2020. O presidente que estava na empresa saiu em 2019 e em 2020 um novo presidente assumiu. O gráfico foi apresentado pelo presidente da empresa em 2020.

Para pensar e discutir Orientações no Manual do Professor.

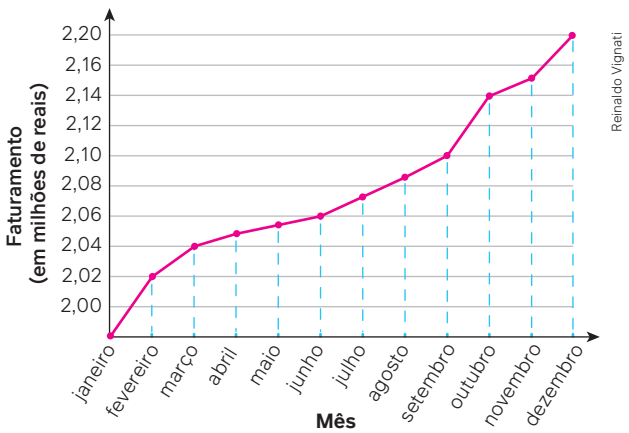
1. Em sua opinião, o aumento no faturamento de 2019 para 2020 se deve a que fator?
2. Observando os faturamentos em milhões de reais, qual foi o aumento percentual de 2019 para 2020?
3. O que há de errado no gráfico? Escreva uma frase explicativa e, se for o caso, refaça o gráfico com as informações dadas.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Exemplo 2

O gráfico ao lado apresenta informações sobre o faturamento de uma indústria ao longo de um ano. A situação também é fictícia.

Faturamento anual da indústria



Fonte: Dados fornecidos pela indústria (dados fictícios).

Observe que ao longo dos meses do ano o faturamento aumentou. Até aí, nada errado na interpretação. Só que:

- de janeiro a dezembro houve um crescimento de 10%;

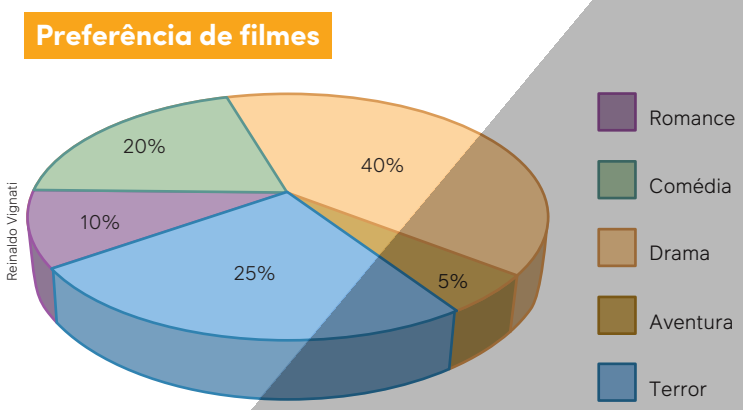
$$\frac{2{,}20 - 2{,}00}{2{,}00} = \frac{0{,}20}{2{,}00} = \frac{2}{20} = 0{,}10 = 10\%$$

- o gráfico de linha construído no quadriculado dá a ilusão de um crescimento multiplicado por 10 devido ao fato de a divisão do intervalo ser de 2,00 até 2,20 milhões em 10 quadradinhos no eixo vertical.

Esse gráfico não contém erro, porém induz à percepção de um crescimento muito mais acentuado do que de fato ocorreu.

Exemplo 3

Observe o gráfico de setores 3D com o resultado, em porcentagem, de uma pesquisa sobre a preferência de tipos de filme de um grupo de pessoas.



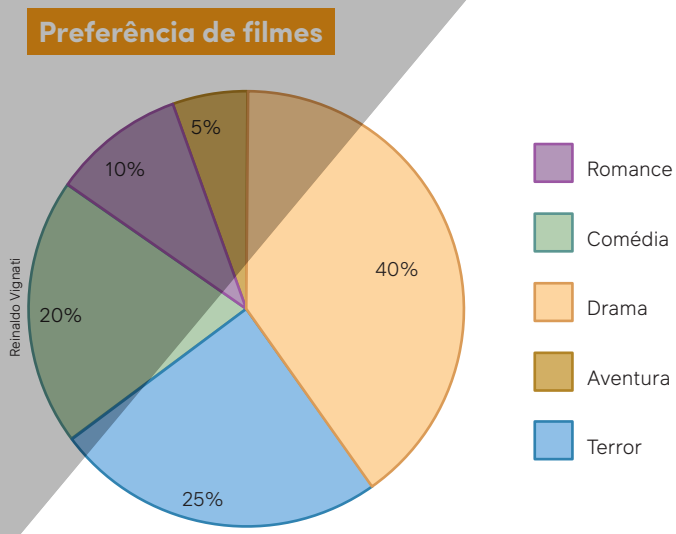
Fonte: Dados fornecidos pelo grupo (dados fictícios).

Não há dados errados no gráfico. Observe que a soma dos percentuais resulta 100%. Entretanto, a perspectiva utilizada pode causar uma percepção equivocada da proporção indicada pelos percentuais. Veja:

- o setor que indica 25% está mais à frente e dá a ideia de que é praticamente do mesmo tamanho do setor que indica 40%;
- o setor que indica 5%, nessa perspectiva, transmite a ideia de que é muito próximo do tamanho do setor que indica 10%.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Agora observe o mesmo gráfico em 2D.

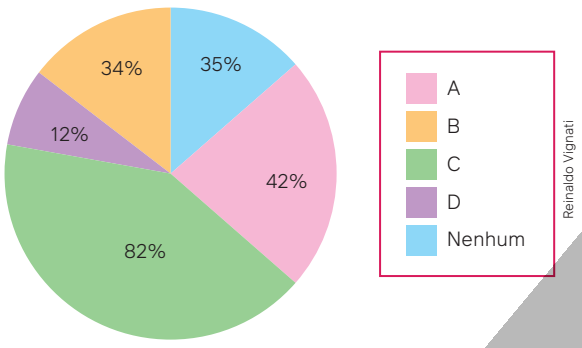


Fonte: Dados fornecidos pelo grupo (dados fictícios).

Atividades

1. Uma pesquisa entre os alunos do Ensino Médio sobre os canais A, B, C e D de TV que habitualmente assistem teve como resultado o gráfico de setores a seguir. Resposta no Manual do Professor.

Canais de TV

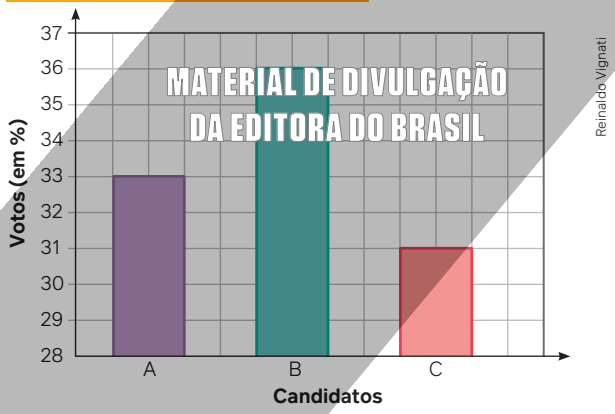


Fonte: Alunos do Ensino Médio (dados fictícios).

Analise atentamente o gráfico, verifique se está correto ou não e justifique sua resposta.

2. Três candidatos participaram de uma campanha para a eleição do representante da Comunidade Vila Vida. Em plena campanha, um dos candidatos divulgou o resultado de uma pesquisa de intenção dos votos válidos usando o gráfico a seguir.
Respostas no Manual do Professor.

Intenção de votos válidos



Fonte: Dados fornecidos pela comunidade Vila Vida (dados fictícios).

Analise as informações e responda às perguntas.

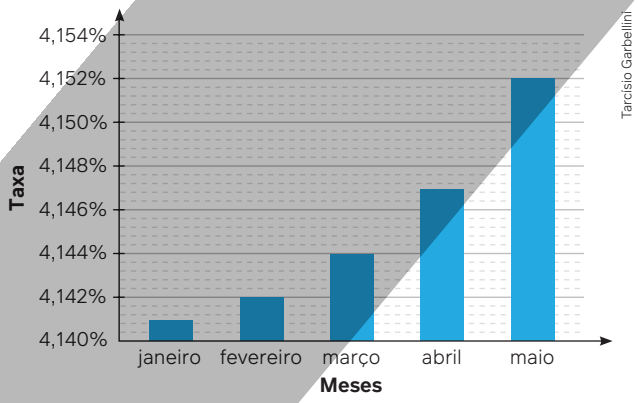
a) Considerando os votos válidos, a distribuição dos percentuais é coerente? Justifique.

b) Esse tipo de gráfico apresenta visualmente uma tendência muito acentuada da preferência do candidato B. Qual é o motivo para isso?

c) Como você corrigiria a "distorção" indicada no item **b**?

3. Lúcia fez um levantamento da taxa mensal de juros que um banco cobrava dos clientes ao adquirir um empréstimo. O levantamento foi feito ao longo de cinco meses, e o resultado foi o seguinte:

Juros para empréstimo



Fonte: Dados do levantamento de Lúcia (dados fictícios).

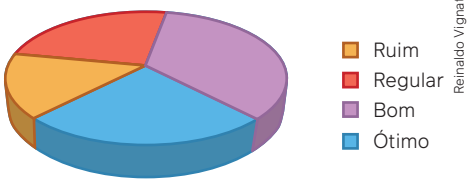
Note que Lúcia iniciou o eixo vertical não no zero, mas em 4,140%. Ao usar essa forma, o que é acentuado no gráfico? Resposta no Manual do Professor.

4. Marcos representou, por meio de um gráfico de setores, o desempenho da turma em relação à disciplina de Matemática a partir das seguintes informações:

15%: rendimento ruim; 35%: rendimento bom;
25%: rendimento regular; 25%: rendimento ótimo.

Utilizando o recurso da planilha eletrônica de rotacionar e tirando os percentuais do gráfico, obteve o seguinte:

Desempenho em Matemática



Fonte: Dados fornecidos pela escola de Marcos (dados fictícios)

Observando este gráfico, sem analisar os percentuais correspondentes, compare os setores correspondentes ao desempenho "Regular" e "Ótimo" e emita uma opinião sobre uma possível distorção.
Orientações no Manual do Professor.

5. Junte-se a um colega e pesquisem, em *sites* de busca, gráficos estatísticos que tenham "erros" ou induzam a erros, encontrados na mídia. Depois, apresentem os gráficos selecionados aos colegas e comentem oralmente onde, no gráfico, percebe-se algo que pode levar o leitor a fazer interpretações equivocadas ou ter falsa percepção das informações.
Resposta no Manual do Professor.

Os índices socioeconômicos

Você já deve ter escutado ou lido em algum lugar que:

Uma imagem fala mais que mil palavras.

O problema é saber quais são essas palavras e o contexto em que são ditas ou escritas. São apenas opiniões ou revelam fatos? Experimente fazer um exercício de análise de uma imagem. Observe atentamente a imagem a seguir.

Tales Azzi/Pulsar Imagens

Vista da favela de Paraisópolis e edifícios de luxo na Avenida Giovanni Gronchi, São Paulo (SP), 2019.

Para pensar e discutir Orientações no Manual do Professor.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1. Que palavras você emitiria sobre a ilustração?
2. Suas palavras são iguais às dos colegas? Discuta!

Há vários índices socioeconômicos que fornecem dados diversos de como as pessoas vivem, suas moradias e fontes de renda. Esses índices avaliam como é a educação de um estado em relação ao país e do país em relação a outros países.

Há índices específicos que se referem ao poder aquisitivo de uma pessoa. Outros índices divulgados pela mídia avaliam como está a construção civil: em expansão ou retraída. Especificamente nesse caso, há medidores do valor de construção por 1 metro quadrado em determinada região. Esses valores impulsionam ou não o mercado imobiliário e incentivam ou desestimulam a oferta de empregos.

Os índices fundamentais para um país são os que medem o desenvolvimento, regem o preço dos produtos básicos usados na alimentação das pessoas, determinam o reajuste do salário de profissionais nas diversas categorias, indicam desigualdade social, entre outros.

Vamos abordar aqui alguns desses índices.

Bannafarsai_Stock/Shutterstock.com

Trabalhadores em canteiro de obra.

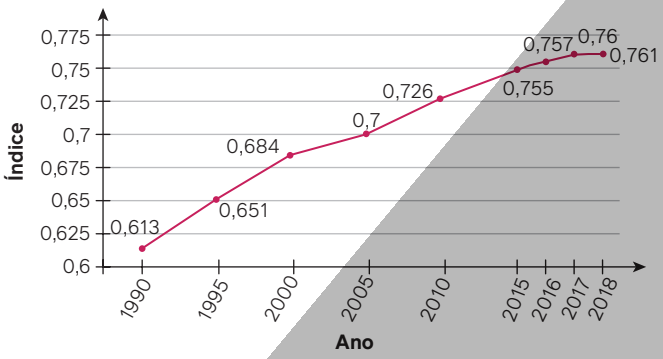
Índice de Desenvolvimento Humano (IDH)

Veja no gráfico a seguir a evolução do IDH no Brasil de 1990 a 2018.

Dando uma rápida olhada, mesmo que não se saiba exatamente o que representa o IDH, constatamos que houve crescimento acentuado de 1990 até 2015 e, a partir daí, praticamente estagnou até 2018. O que isso significa? Precisamos compará-lo com outras nações. Vamos lá!

Gráficos: Tarcísio Garbellini

IDH do Brasil estaciona



Fonte: PNUD - Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento. *Relatório do Desenvolvimento Humano 2019*. Nova York: Pnud, 2019. p. 298. Disponível em: http://hdr.undp.org/sites/default/files/hdr_2019_pt.pdf. Acesso em: 16 jun. 2020.

Países com desenvolvimento humano mais alto

1	Noruega	0,954
2	Suíça	0,946
3	Irlanda	0,942
4	Alemanha	0,939
5	Hong Kong	0,939

Países com desenvolvimento humano próximo ao do Brasil

74	Antígua e Barbuda	0,776
75	Bósnia e Herzegovina	0,769
76	México	0,767
77	Tailândia	0,765
78	Granada	0,763
79	**Brasil**	**0,761**
79	Colômbia	0,761
81	Armênia	0,760
82	Argélia	0,759
82	Macedônia (ARJM)	0,759
82	Peru	0,759
84	China	0,758

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Países com desenvolvimento humano mais baixo

185	Burundi	0,423
186	Sudão do Sul	0,413
187	Chade	0,401
188	República Centro-Africana	0,381
189	República do Níger	0,377

Fonte: UNDP - United Nations Development Programme. *2019 Human Development Index Ranking*. Nova York: Pnud, 2019. Disponível em: http://hdr.undp.org/en/content/2019-human-development-index-ranking. Acesso em: 16 jun. 2020.

Agora podemos dizer que, apesar de ter aumentado no período analisado, o IDH brasileiro não está numa posição confortável quando comparado ao IDH de outros países. Mesmo assim, essa análise é apenas comparativa e não explica seu significado. Precisamos saber mais!

O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) foi criado pela Organização das Nações Unidas (ONU) na década de 1990 com o objetivo de obter dados que vão além das informações econômicas. O IDH também considera a qualidade de vida total da população.

O **IDH** avalia os países em uma escala de 0 a 1. O índice 1 não foi alcançado por nenhum país do mundo, pois significaria que o país teria uma realidade quase perfeita, com elevada renda *per capita* e expectativa de vida de 90 anos, por exemplo. Da mesma forma, não existe país com índice 0, pois seria o mesmo que dizer que a taxa de analfabetismo desse país seria 100%, além de outros indicadores extremamente desastrosos.

Resumidamente, podemos dizer que quanto maior o IDH, maior será o desenvolvimento humano constatado (medido) em determinado local. Assim, os países podem ter IDH muito elevado, elevado, médio e baixo. É importante saber que os dados referentes ao IDH são disponibilizados pelo Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (Pnud).

Três importantes critérios apontados pelo IDH que indicam o grau de desenvolvimento de um país estão relacionados à qualidade de vida das pessoas. São eles:

wavebreakmedia/Shutterstock.com

Exercícios físicos são essenciais para a saúde dos idosos.

Saúde (expectativa de vida)

Nesse critério leva-se em consideração a qualidade de vida, particularmente a "esperança de vida" de uma criança ao nascer. Assim, é fundamental avaliar a porcentagem da população que tem acesso a medicamentos, vacinas, tratamentos de saúde etc. São avaliadas também a taxa de natalidade, o índice de violência e a taxa de mortalidade.

Educação

Avalia-se o acesso à educação. É considerado o grau de instrução da população e são analisadas, nesse critério, a taxa de alfabetização e a escolarização das pessoas (Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Ensino Superior). Observa-se, por exemplo, a relação entre os anos escolares de um adulto, as taxas de evasão escolar, de repetência, o número de vagas para crianças consideradas aptas para serem matriculadas etc.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Sharad Raval/Shutterstock.com

Estudantes indianas, 2017.

Mintr/Shutterstock.com

Renda

A renda é um critério que reflete o padrão de vida de cada habitante de um país ou outro local. A qualidade de vida é avaliada segundo o Produto Interno Bruto *per capita* ou PIB *per capita*, calculado obtendo-se o total de bens e serviços produzidos durante um ano no país ou local e dividindo-o pelo número de habitantes. O resultado é o que cada pessoa produziu no período.

Planejar o orçamento para poupar.

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Junte-se a três colegas para a atividade de pesquisa.

1. Pesquisem como o IDH de um país é calculado e detalhem quais índices são utilizados.
2. Pesquisem o IDH dos estados brasileiros. Utilizem os dados mais recentes. Apresentem as informações em uma tabela ou um gráfico. Incluam também o IDH do Brasil.
3. Elaborem um texto comparando o IDH do Brasil com o IDH dos estados.

No livro *Estatística aplicada às Ciências Sociais* o autor Paulo Afonso Bracarense aponta que as duas principais limitações sociais do IDH são:

- (1ª) o PIB *per capita* não consegue dar conta da má distribuição de renda;
- (2ª) o índice de escolaridade não leva em conta a qualidade do ensino dado.

Para justificar essas limitações, apresentamos a seguir o trecho do livro desse autor/pesquisador para que você conheça os argumentos dele.

> [...]
>
> A riqueza das nações é medida por meio do cálculo de seu Produto Interno Bruto (PIB), que representa a soma (em valores monetários) de todos os bens e serviços finais produzidos em uma determinada região durante um período. O seu cálculo não é simples, como será visto mais à frente. No Brasil, ele é feito pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), órgão vinculado ao Ministério do Planejamento.
>
> Verifica-se, no entanto, que países ricos (de PIB elevado) possuem, em seu território nacional, situações de altos níveis de pobreza e com acentuadas desigualdades sociais. Constata-se, então, que riqueza e crescimento econômico não implicam diretamente em desenvolvimento social. Dessa forma, o indicador PIB *per capita*, resultado da divisão de riqueza total do país pelo número de habitantes, é insuficiente para medir a condição de qualidade de vida de uma população.
>
> Como foi apontado, mais recentemente, sob orientação de organismos internacionais – como a Organização das Nações Unidas (ONU), a Organização para a Cooperação do Desenvolvimento Econômico (OCDE), a Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco), a Organização das Nações Unidas para a Agricultura e Alimentação (FAO), a Organização Internacional do Trabalho (OIT), a Organização Mundial da Saúde (OMS) e o Fundo das Nações Unidas para as Crianças (Unicef), entre outros –, tem sido realizado um grande esforço conceitual e metodológico para o desenvolvimento de instrumentos de mensuração de bem-estar e de mudança social. Esses são marcos importantes de produção e disseminação de estatísticas públicas que passaram a incorporar novas dimensões investigativas e de produção de relatórios sociais de maneira mais organizada e sistemática.
>
> Uma série de novos indicadores tem sido proposta por estudiosos e órgãos dedicados à análise das condições de vida das populações. No entanto, existem alguns que têm sido usados universalmente, e que por isso são importantes para estudos comparativos, como o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) e o índice de Gini, que serão objeto de seções posteriores deste capítulo.
>
> A construção de indicadores alternativos aos estritamente econômicos, e mesmo ao IDH, tem alcançado propostas metodológicas bastante inovadoras, mas que, no entanto, ainda não tem sua difusão irradiada globalmente.

BRACARENSE, Paulo Afonso. *Estatística aplicada às Ciências Sociais*. Curitiba: IESDE Brasil, 2018. p. 142.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Outros índices importantes

Apesar de não abordarmos aqui todos os índices socioeconômicos que frequentemente aparecem na mídia, é bom que você conheça alguns deles porque interferem diretamente em sua vida, sua futura profissão e em tantos outros itens que você possa planejar.

- **Inflação**

Índices de inflação

Inflação é a denominação dada ao aumento dos preços de produtos e serviços.

O cálculo da inflação é feito com base no índice dos preços. O IBGE produz dois índices: o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (**IPCA**) e o Índice Nacional de Preços ao Consumidor (**INPC**).

Enquanto o IPCA engloba uma parcela maior da população e aponta a variação do custo de vida médio de famílias com renda mensal de 1 a 40 salários mínimos, o INPC avalia o custo de vida médio apenas das famílias com renda de 1 a 5 salários mínimos.

O IPCA é utilizado pelo governo federal como índice oficial da inflação no Brasil. Por isso, esse índice é referência para o estabelecimento de metas de inflação e alterações na taxa de juros cobrada por instituições financeiras.

Tanto o IPCA quanto o INPC medem a variação de preços de uma cesta de produtos e serviços consumida pela população e analisam se os preços aumentaram ou diminuíram de um mês para o outro. Entre os produtos e serviços estão incluídos: arroz, feijão, passagem de ônibus, material escolar, assistência médica, cinema etc. Esses índices consideram não apenas a variação de preço desses produtos ou serviços mas o "peso" deles no orçamento das famílias.

IPCA/IBGE – 2020

Mês	Índice		
	Do mês	Acumulado	
		No ano	Nos últimos 12 meses
mar. 2020	0,07	0,95	3,67
fev. 2020	0,22	0,93	4,21
jan. 2020	0,71	0,71	4,34

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Fonte: IBGE. *Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo 15.* Tabela 3065 - IPCA15 - Série histórica [...]. Rio de Janeiro: IBGE, 2020. Disponível em: https://sidra.ibge.gov.br/tabela/3065#resultado. Acesso em: 2 jul. 2020.

A tabela acima contém o IPCA dos meses de janeiro, fevereiro e março de 2020, os acumulados no ano e nos últimos meses. Agora, interprete adequadamente esses dados.

Para pensar e discutir Orientações no Manual do Professor.

1. Com os dados do IPCA de janeiro, fevereiro e março, como foi obtido o índice 0,95 correspondente ao acumulado em 2020 nesses três meses?
2. Se em março de 2020 um trabalhador recebeu um aumento de 2,90% correspondente ao reajuste dos últimos 12 meses, seu poder de compra aumentou ou diminuiu? Justifique.

• **PIB**

O Produto Interno Bruto (PIB), é um indicador econômico que representa a soma de todos os bens e serviços produzidos em uma área geográfica (em um país, por exemplo) durante determinado período. Em linhas gerais, o PIB representa a dinâmica do lugar e é utilizado para analisar o desenvolvimento da economia.

Quando você escutar um analista econômico falando a respeito do crescimento econômico brasileiro em determinado período de tempo, saiba que ele se apoia na variação percentual do PIB nesse período e faz comparações com outros países. A preocupação com o crescimento da economia traz outras questões. Via de regra, quanto maior a renda, melhor a qualidade de vida. Quando há aumento na renda de um país, a tendência é que mais pessoas melhorem de condição de vida. É claro que a renda não é o único fator importante para a qualidade de vida e há críticas ao uso do PIB como indicador de bem-estar, porque ele não traz indicações sobre a distribuição de renda ou a preservação das florestas, por exemplo.

Leia um pouco mais a respeito do PIB.

PIB: entenda o que é e como é calculado

O PIB (Produto Interno Bruto) é o conjunto de riquezas gerado em um país. Trata-se de um índice econômico que engloba praticamente toda a cadeia produtiva brasileira. O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) calcula trimestralmente o que o país produz num período, na agropecuária, indústria e serviços.

Comparando o PIB atual com o dos anos anteriores, podemos saber se a atividade econômica está crescendo ou diminuindo. O índice também permite comparar o desempenho da nossa economia em relação ao desempenho da economia de outros países. O Banco Central e o governo federal utilizam o PIB para tomar diversas decisões que influenciam diretamente a sua vida. As empresas e os investidores estudam o PIB antes de tomar decisões de investimento, antes de contratar ou demitir, antes de ampliar ou retrair suas atividades.

O primeiro cálculo de produção nacional foi publicado em 1953 nas Nações Unidas. Ele foi baseado em um documento do economista Richard Stone, que recebeu o Prêmio Nobel de Economia em 1984.

Existem duas formas mais usadas para calcular o PIB e ambas chegam ao mesmo resultado. A primeira é contar tudo que se produz, na chamada "ótica da oferta". Nessa conta, entram os resultados da agropecuária, da indústria e dos serviços. Aqui estão produtos finais, que é tudo aquilo que é vendido ao consumidor, como pães, carros e brinquedos. Também estão [illegible] serviços, como o salão de beleza e os gastos com empregados domésticos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

A segunda forma de calcular é somando o que se gastou no país. Esse método considera a visão da demanda. Entram nessa conta o consumo das famílias, os gastos do governo e os investimentos das empresas e do governo. De maneira simplificada o PIB é calculado através da fórmula:

$$PIB = C + I + G + (X - M)$$

Onde:

C – gastos das empresas no setor privado

I – investimentos

G – gastos dos governos e empresas públicas

X – exportações

M – importações

[...]

Um dos fatores que mais influencia o crescimento do PIB é o consumo das famílias. Ou seja, quanto mais as pessoas compram, mais as empresas precisam produzir e investir para produzir mais.

PIB: entenda o que é e como é calculado. *In*: FINANCE ONE. [S. *l.*], 11 mar. 2020. Disponível em: https://financeone.com.br/pib-o-que-e-e-como-e-calculado/. Acesso em: 22 maio 2020.

É claro que você não precisa calcular o PIB, mas é importante conhecer um pouco melhor esse indicador do bem-estar de um país.

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Junte-se a três colegas para esta pesquisa.

1. Pesquisem e registrem o PIB brasileiro nos últimos 10 anos.
2. Pesquisem e registrem o PIB de outros quatro países nos últimos 10 anos.
3. Com os dados acima, elaborem um gráfico comparativo entre o PIB brasileiro e o PIB dos outros países no período solicitado.
4. Elaborem um texto com base no gráfico comparativo analisando o PIB brasileiro em relação ao PIB das outras nações que escolheram.
   Observação: É necessário procurar o PIB em dólar de todos esses países.

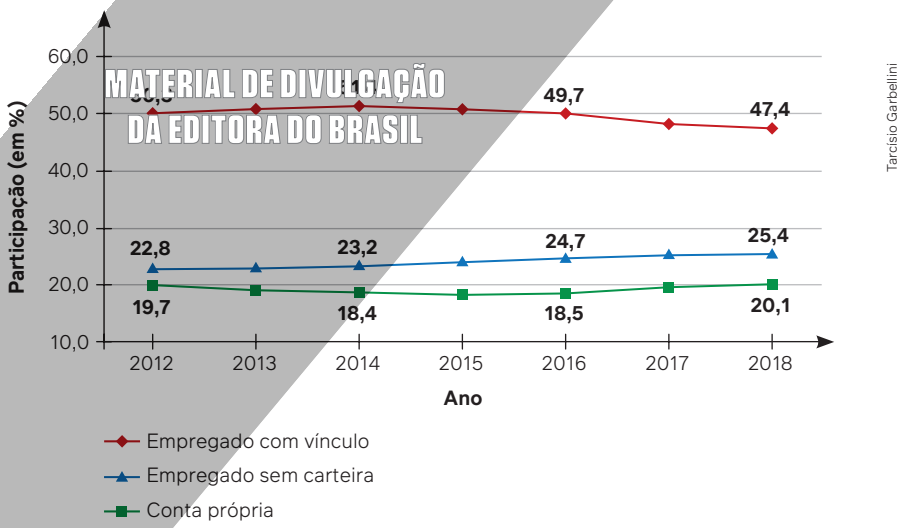
Observação

Esses e outros índices que regem, de certa maneira, a vida das pessoas e a saúde social e econômica de um país são amplamente discutidos por especialistas e leigos. Talvez você, que cursa o Ensino Médio, não precise dominar a técnica de cálculo desses índices nem compreender todos os detalhes da interpretação de suas funções. Entretanto, o conhecimento do que eles indicam amplia sua visão socioeconômica.

Atividades

1. Leia as informações do gráfico a seguir, divulgado pelo IBGE.

Participação dos trabalhadores com 14 anos ou mais de idade, por categorias selecionadas de posição na ocupação - Brasil - 2012-2018



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

Tarcísio Garbellini

Fonte: IBGE. *Síntese de indicadores sociais*. Rio de Janeiro: IBGE, 2019. p. 16. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101678.pdf. Acesso em: 11 maio 2020.

O IBGE considera que empregados com vínculo formal de trabalho são a população ocupada com Carteira de Trabalho assinada, somada aos funcionários públicos e militares. Responda: O que aconteceu com a informalidade de 2015 a 2018? Utilize as informações do gráfico para responder. Orientações no Manual do Professor.

Atividades finais

1. Responda às questões a seguir sobre os assuntos abordados nesta unidade. Respostas no Manual do Professor.

a) O que é PIB e o que indica sobre um país?

b) O que é renda *per capita*? Qual é sua finalidade?

c) Quando usar um gráfico de setores?

d) Quando usar um gráfico de linhas?

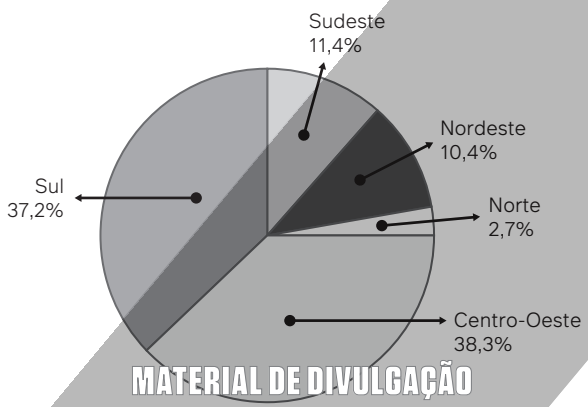
e) O que é um fluxograma?

f) O que faz um algoritmo?

g) Cite um índice usado para medir a inflação.

h) O que o IDH indica?

2. (Enem) Considere que a safra nacional de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, aponte uma participação por região conforme indicado no gráfico. Em valores absolutos, essas estimativas indicam que as duas regiões maiores produtoras deveriam produzir juntas um total de 119,8 milhões de toneladas em 2012.



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

De acordo com esses dados, a produção estimada, em milhão de tonelada, de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, na Região Sudeste do país, foi um valor mais aproximado de: Alternativa **d**.

a) 11,4.

b) 13,6.

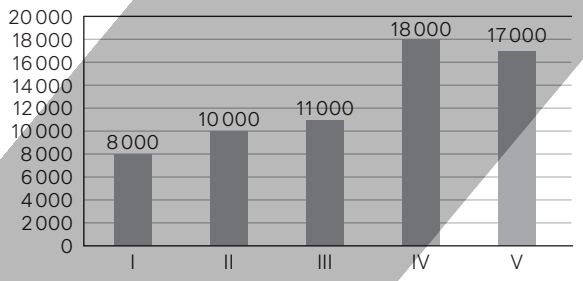
c) 15,7.

d) 18,1.

e) 35,6.

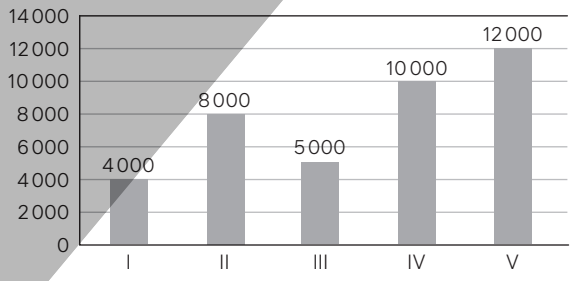
3. (Enem) A taxa de urbanização de um município é dada pela razão entre a população urbana e a população total do município (isto é, a soma das populações rural e urbana). Os gráficos apresentam, respectivamente, a população urbana e a população rural de cinco municípios (I, II, III, IV, V) de uma mesma região estadual. Em reunião entre o governo do estado e os prefeitos desses municípios, ficou acordado que o município com maior taxa de urbanização receberá um investimento extra em infraestrutura.

População urbana



Gráficos: Tarcisio Garbellini

População rural



Segundo o acordo, qual município receberá o investimento extra? Alternativa **c**.

a) I

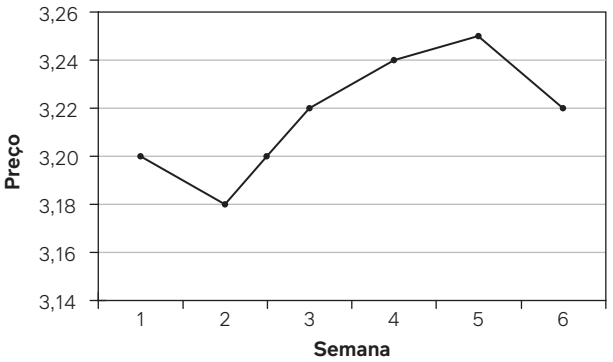
b) II

c) III

d) IV

e) V

4. (UEG) As ações de uma empresa variaram semanalmente conforme os dados da figura a seguir.



De acordo com os dados apresentados, o período de maior variação ocorreu entre as semanas:

Alternativa **a**.

a) 2 e 3.

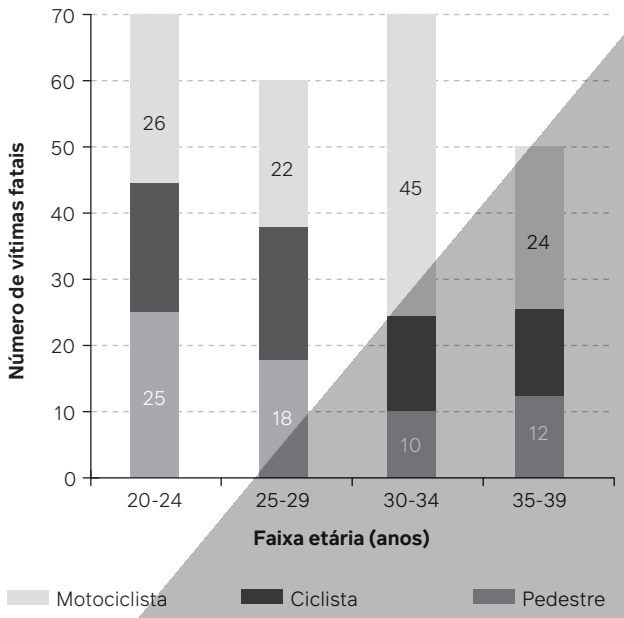
b) 1 e 2.

c) 4 e 5.

d) 3 e 4.

e) 5 e 6.

5. (Unesp) O gráfico indica o número de vítimas fatais no trânsito de uma grande cidade em 2017. Os dados estão distribuídos por quatro faixas etárias e por três categorias de locomoção dessas vítimas: pedestres, ciclistas e motociclistas.



Nesse ano, o percentual de vítimas fatais que se deslocavam de bicicleta e tinham menos de 30 anos, em relação ao total de vítimas das quatro faixas etárias e das três categorias de locomoção, foi de:

Alternativa **a**.

a) 15,6%

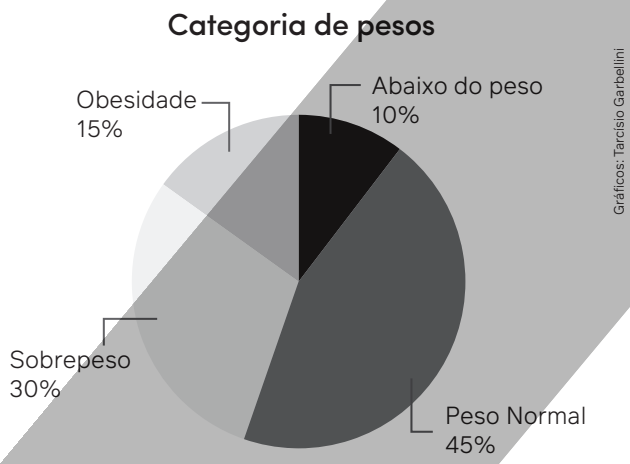
b) 21,6%

c) 30%

d) 12,5%

e) 27,2%

6. (CP2-RJ) Uma das medidas ainda muito utilizadas para avaliar o peso de uma pessoa IMC (Índice de Massa Corporal), obtido dividindo-se seu peso (em quilogramas) pelo quadrado da sua altura (em metros). Essa medida é usada, por exemplo, para determinar em que categoria de peso a pessoa avaliada se encontra: abaixo do peso, peso normal, sobrepeso ou obesidade. Foi feita uma pesquisa sobre IMC em um grupo de 240 pessoas e os resultados obtidos são apresentados no gráfico a seguir.



Gráficos: Tarcisio Garbellini

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 3 jul. 2012.

Podemos afirmar que, nesse grupo estudado, há:

Alternativa **d**.

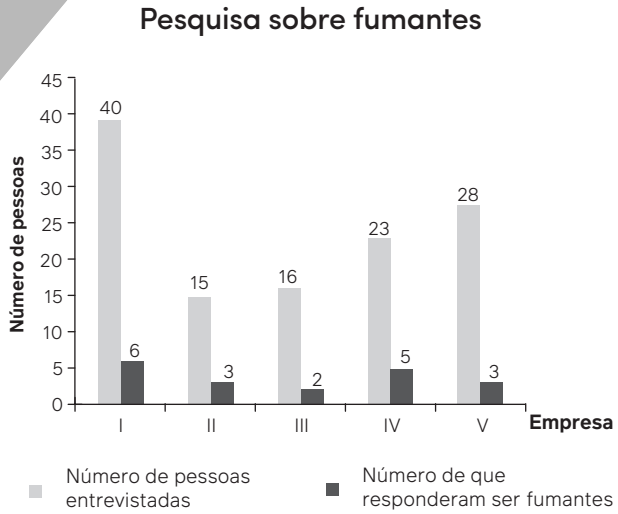
a) mais de 30 pessoas abaixo do peso.

b) menos de 72 pessoas com sobrepeso.

c) exatamente 35 pessoas com obesidade.

d) exatamente 108 pessoas com peso normal.

7. (Enem) Para fazer uma campanha contra o tabagismo, um empresário encomendou uma pesquisa com pessoas que trabalham em suas cinco empresas para saber quantas fumam. O gráfico mostra o número de pessoas entrevistadas e quantas responderam ser fumantes em cada uma das empresas.



A empresa que possui o menor percentual de pessoas fumantes é:

Alternativa **e**.

a) I.

b) II.

c) III.

d) IV.

e) V.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

kan_chana/Shutterstock.com

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Existem várias formas de apresentar informações e dados. A forma visual de apresentação auxilia o leitor a compreender melhor informações mais complexas.

ORGANIZAR E TRANSMITIR INFORMAÇÕES

Projeto 1

Uma maneira inteligente de informar

Para que serve esse projeto?

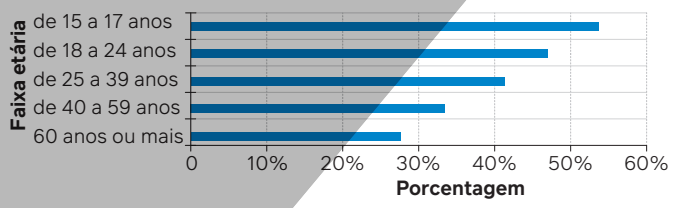
Os infográficos estão presentes em diversos meios de comunicação e representam a principal escolha feita por veículos de mídia para transmitir dados. Ao produzir um infográfico, você será levado não só ao exercício de tratamento da informação como também à reflexão sobre diversas formas de apresentar os resultados desse tratamento. Além disso, estará em contato com reflexões importantes acerca dos fatores que contribuem para uma melhora do Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) do Brasil.

Neste projeto, você irá estudar diferentes formas de leitura e representação de informações, ampliando seu repertório e desenvolvendo sua habilidade de interpretar e elaborar tabelas e gráficos com dados estatísticos, como o do exemplo ao lado.

Na BNCC

Neste projeto você vai trabalhar as competências gerais 1, 4, 5, 6, 8, 9 e 10, as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias 1, 3, 4 e 5 e as habilidades EM13MAT101, EM13MAT102, EM13MAT104, EM13MAT302, EM13MAT401, EM13MAT501, EM13MAT510.

Percentual de pessoas de 15 anos ou mais que praticam algum esporte ou atividade física: Brasil – 2015



Tarcísio Garbellini

Fonte: PRÁTICA de esportes e atividades físicas. *In*: IBGE EDUCA. Rio de Janeiro: IBGE, c2020. Disponível em: https://educa.ibge.gov.br/criancas/brasil/2697-ie-ibge-educa/jovens/materias-especiais/19051-pnad-esportes-2015-pratica-de-esportes-e-atividades-fisicas.html. Acesso em: 14 jul. 2020.

Questão disparadora

Para que serve e como deve ser feito um infográfico?

Contexto

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) é o órgão responsável pelo levantamento e análise de aspectos diversos a respeito dos dados socioeconômicos. Conforme o próprio instituto de pesquisa, seu grande objetivo é "retratar o Brasil com informações necessárias ao conhecimento de sua realidade e ao exercício da cidadania".

Observe que o gráfico do alto da página foi feito pelo IBGE com base em informações obtidas em 2015 na Pesquisa Nacional por Amostras de Domicílios (Pnad), feita anualmente de 1971 até 2016.

- Como são feitas as pesquisas pelo IBGE? Essas informações são protegidas? De que maneira?
- Por meio do **infográfico** ao lado, produzido pelo próprio instituto, podemos compreender algumas etapas desse processo e também os cuidados tomados com as informações levantadas.

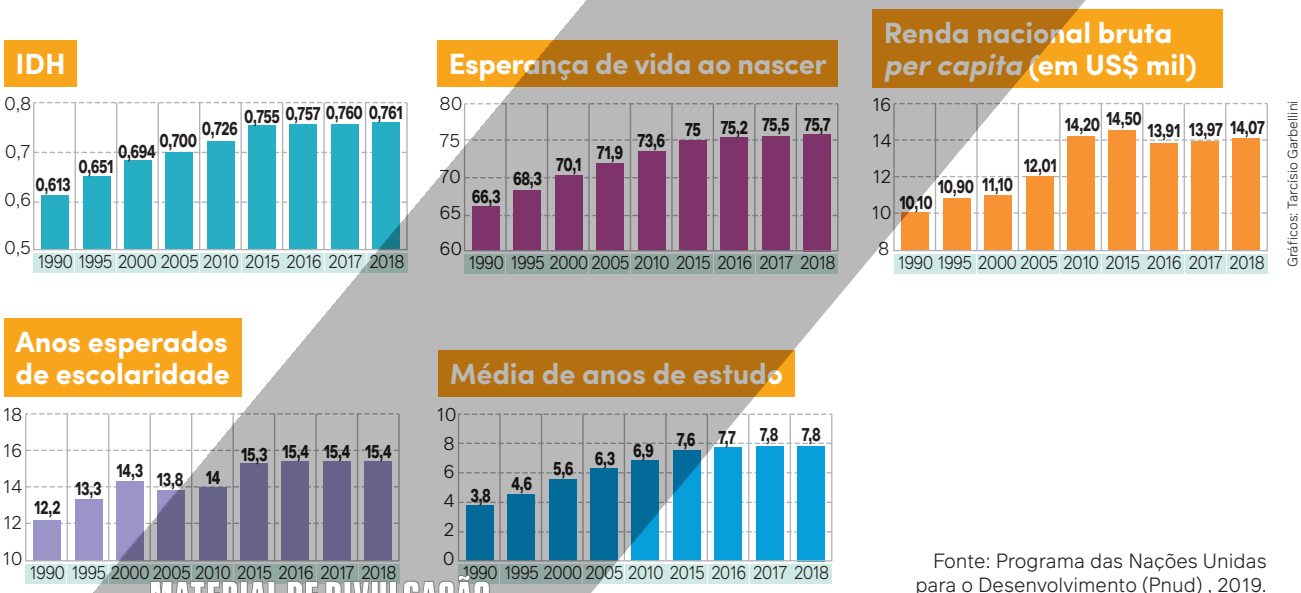
IBGE

Fonte: PERISSÉ, Camille. Entenda como informações individuais se tornam estatísticas públicas no IBGE. *Agência IBGE Notícias*, Rio de Janeiro, 28 jan. 2019. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/23630-entenda-como-informacoes-individuais-se-tornam-estatisticas-publicas-no-ibge. Acesso em: 14 jul. 2020.

Desenvolvimento

Você irá utilizar dados oficiais para produzir um infográfico sobre o IDH mais recente do Brasil. Para isso, siga os passos propostos:

1. Busque a maior quantidade que você encontrar de infográficos para analisar. Faça uma leitura das informações e selecione até quatro infográficos respeitando as seguintes condições:
   - Considera ser visualmente atraentes;
   - Considera não ser visualmente atraentes;
   - Possibilita uma boa compreensão das informações;
   - Não auxilia na compreensão das informações, mesmo que visualmente atraente.
2. Com base em sua pesquisa, elabore uma lista de itens e características que um infográfico deve ter para ser informativo de maneira clara e atraente.
3. Observe os gráficos a seguir sobre o IDH brasileiro, lembrando que o IDH representa o Índice de Desenvolvimento Humano de um país e que, para determinar esse índice, são levados três aspectos em consideração:
   - esperança (expectativa) de vida ao nascer;
   - renda *per capita*;
   - escolaridade.



Gráficos: Tarcísio Garbellini

Fonte: Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (Pnud) , 2019.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Vocês devem produzir um infográfico em que estejam contemplados todos os itens que listaram como sendo características necessárias para torná-lo claro e atraente.

O conteúdo do infográfico deve informar:

- a evolução do IDH brasileiro a cada 5 anos entre 1990 e 2020;
- a taxa de variação média anual do IDH entre 1990 e 1995;
- a previsão do IDH para os anos seguintes a 1995 (até 2020), caso tivesse sido mantida essa taxa de variação;
- uma comparação entre essa previsão e o valor real do IDH brasileiro nos anos 2000, 2005, 2010, 2015 e 2020, indicando se há discrepâncias e explicando-as, caso existam.

Caso seu infográfico informe a evolução dos outros índices (expectativa de vida, escolaridade e renda *per capita*), repita o procedimento indicando a taxa de variação em algum intervalo e reproduzindo-a para os intervalos seguintes.

#Ficaadica

Para determinar a taxa de variação, vocês podem executar o seguinte procedimento:

Considerando o ano de 1990 como marco zero, marquem em um plano cartesiano os pontos $(x; y)$ sendo x a quantidade de anos passados a partir de 1990 e y o valor do IDH. Em seguida, tracem uma reta unindo os pontos que representam os anos 1990 e 1995. Por fim, determinem a função afim que tem essa reta como representação gráfica. O coeficiente que multiplica o x na função afim é a taxa de variação.

Produto

O seu produto deverá ser um infográfico que relacione de forma clara e atrativa as informações mais atuais sobre o IDH brasileiro, incluindo uma análise sobre a taxa de variação desse índice.

Apresentação

É importante que você identifique o infográfico como o **produto final** do projeto. O infográfico elaborado deve situar o leitor sobre o IDH brasileiro no cenário mundial, além de destacar pontos fundamentais que contribuem para o seu cálculo: expectativa de vida, renda *per capita* e escolaridade. Você pode apresentar seu infográfico na forma de cartaz ou em formato digital, acompanhado de um parágrafo comentando a taxa de variação desse índice ao longo dos anos.

Quando todos os infográficos estiverem prontos, seguindo orientação do professor, você e seus colegas podem compará-los e discutir acerca da coerência das informações e da forma como estão apresentadas, interpretando os gráficos uns dos outros.

Relatório conclusivo

O relatório de conclusão do projeto deve conter:

- a lista de elementos que um infográfico deve ter para ser eficiente e atrativo, indicando onde eles aparecem no infográfico elaborado pelo grupo;
- uma reflexão sobre como a elaboração do infográfico promoveu aprendizagens acerca do IDH e da aplicabilidade do conceito de taxa de variação;
- uma resposta para a questão disparadora: Para que serve e como deve ser feito um infográfico?

Sugestões de fontes

Sites

- **IBGE: Brasil – Panorama.** Disponível em: https://cidades.ibge.gov.br/brasil/panorama. Acesso em: 12 maio 2020.
- **PNUD Brasil: Desenvolvimento e IDH.** Disponível em: https://www.br.undp.org/content/brazil/pt/home/idh0.html. Acesso em: 12 maio 2020.
- **Canva.** Disponível em: https://www.canva.com/. Acesso em: 12 maio 2020.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Vídeos

- **Como fazer um infográfico: passo a passo** (11 min). Disponível em: https://www.assessordeimprensa.com.br/como-fazer-um-infografico-5-ferramentas/. Acesso em: 12 maio 2020.

Apps

- **Editor gráfico Canva.** Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.canva.editor. Acesso em: 12 maio 2020.
- **Posters.** Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.kvadgroup.posters. Acesso em: 12 maio 2020.

E-books

- **Infografia: história e projeto**, de Ary Moraes, Carlos Zibel Costa, Marcos Braga e Priscila L. Farias (Blucher). Disponível em: https://play.google.com/store/books/details/Ary_Moraes_Infografia?id=qQK5DwAAQBAJ. Acesso em: 12 maio 2020.

Artigos em PDF

- **Reflexões sobre a infografia no jornalismo *on-line***, de Ruana Maciel, Tanisse Bóvio e Fernanda Manhães. Disponível em: http://www.interscienceplace.org/isp/index.php/isp/article/view/183/181. Acesso em: 12 maio 2020.

Projeto 2

O indígena e o censo demográfico brasileiro

Na BNCC

Neste projeto você vai trabalhar as competências gerais 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, as competências específicas 1, 2, 3, 4, 5 e as habilidades EM13MAT101, EM13MAT102, EM13MAT104, EM13MAT202, EM13MAT302, EM13MAT401, EM13MAT501, EM13MAT507, EM13MAT510.

Para que serve esse projeto?

A questão de levantamento dos dados a respeito da situação atual dos indígenas brasileiros, comparando-os com diversos momentos do Brasil, pesquisados em fontes oficiais, permite uma reflexão profunda do cuidado que precisamos ter – como sociedade – com grupos que fazem parte da formação histórica de nossa identidade.

Nesse projeto você fará uma pesquisa envolvendo a realidade do indígena brasileiro, comparando sua população e a ocupação de territórios. Desse modo, vai desenvolver a habilidade de inferir e tirar conclusões acerca de nossa sociedade com base em dados confiáveis, o que auxilia na compreensão de realidades complexas.

Delfim Martins/Pulsar Imagens

Indígenas da etnia tapirapé em protesto contra municipalização da saúde indígena e mudança da Funai para o Ministério da Agricultura. Brasília (DF), 2019.

Questão disparadora

Será que teremos populações indígenas vivendo no Brasil daqui a 20 anos?

Contexto

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

Leia o texto a seguir.

População indígena no Brasil

A população indígena no Brasil representa um grande contingente de povos indígenas que, ao longo dos anos, sofreu um considerável decréscimo, seja por extermínio, seja por doenças trazidas pelos colonizadores. Esses povos já habitavam o território brasileiro muito antes da chegada dos portugueses e estão distribuídos nas cinco regiões do país. Muitos povos já entraram em contato com os costumes não indígenas, contudo, alguns grupos ainda vivem isolados.

[...]

Marcos Amend/Pulsar Imagens

Terra Indígena Enawenê-Nawê. Juína (MT), 2020.

O censo demográfico de 2010 realizado pelo IBGE constatou que atualmente há no Brasil cerca de 817 963 indígenas. Desse total, 502 783 encontram-se na zona rural e 315 180 habitam os centros urbanos. O censo também identificou, em parceria com a Funai, 505 Terras Indígenas, representando 12,5% do território brasileiro. Desse total de terras, apenas dez apresentam uma população indígena maior que 10 000 habitantes.

[...]

POPULAÇÃO indígena no Brasil. *In*: MUNDO EDUCAÇÃO. São Paulo, c2020. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/geografia/a-populacao-indigena-no-brasil.htm. Acesso em: 11 maio 2020.

Desenvolvimento

Você irá elaborar uma análise crítica da situação do indígena brasileiro com base nos dados dos censos demográficos de 2000 e 2010. Para isso, você deve seguir o passo a passo abaixo.

1. Busque dados de quantos indígenas existiam no Brasil à época da chegada dos portugueses e como eram suas organizações sociais.
2. Compare esses dados com os dos censos demográficos de 2000 e 2010.
3. Levante hipóteses sobre como ocorreu a transformação desses dados entre 1500 e 2000.
4. Represente graficamente a progressão desses dados de 2000 a 2010.
5. Analisando o valor absoluto da população indígena em 2000 e em 2010, você irá:
   - considerar o valor de 2000 como o primeiro termo de uma progressão aritmética (PA);
   - considerar o valor de 2010 como o segundo termo da PA;
   - determinar a razão e os 4 termos seguintes da PA;
   - inferir, com base nessa PA, o tamanho da população indígena brasileira em 2020, 2030, 2040 e 2050.

Produto

Você deve apresentar, na forma de gráficos, uma análise comparativa do desenvolvimento da população indígena do Brasil usando os dados dos censos demográficos de 2000 e 2010. Os gráficos devem indicar também os locais de concentração dessas populações (os estados da Federação).

Com base nesses gráficos, faça uma projeção da população indígena (geral ou por estado) nas próximas décadas considerando uma possível progressão aritmética da situação.

Observação sobre o produto

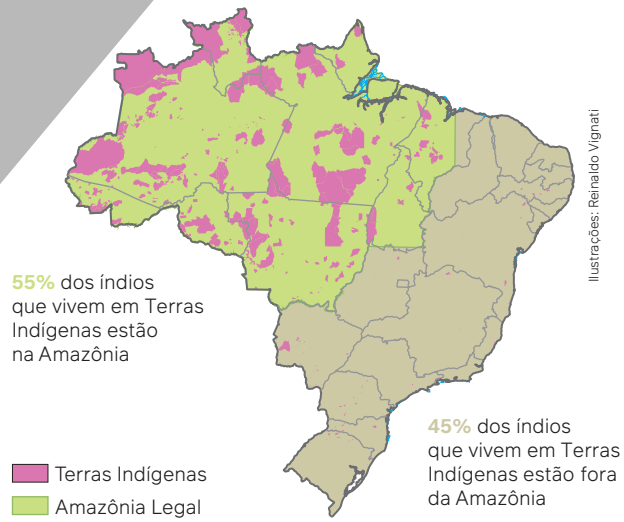
O gráfico a seguir e o mapa ao lado contêm exemplos de representação da distribuição da população indígena nas regiões do território brasileiro conforme dados do censo de 2010.

Distribuição da população indígena

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Fonte: IBGE. *Os indígenas no Censo demográfico 2010*. Rio de Janeiro, 2012. p. 11. Disponível em: https://indigenas.ibge.gov.br/images/indigenas/estudos/indigena_censo2010.pdf. Acesso em: 13 jul. 2020.

Terras Indígenas no Brasil



Ilustrações: Reinaldo Vignati

Fonte: ISA. Terras Indígenas. *In*: ISA. *Mirim*: povos indígenas do Brasil. São Paulo, [20--?]. Disponível em: https://mirim.org/terras-indigenas. Acesso em: 13 jul. 2020.

Apresentação

O seu produto final deve conter gráficos de dados estatísticos que permitam observar e comparar a evolução da população indígena com base em dados oficiais. Você pode apresentá-los em um cartaz ou por meio digital.

Sua apresentação deve conter:

- ao menos um gráfico indicando a progressão da população indígena ao longo das últimas décadas;
- ao menos dois gráficos (um para cada década) indicando os locais de concentração dessas populações;
- ao menos uma progressão aritmética inferindo o tamanho dessa população nas próximas décadas.

Relatório conclusivo

O relatório deve conter uma análise crítica da situação do povo indígena tendo como base dados oficiais. Cuide para que ele seja embasado nos dados, e não em interpretações pessoais. Por meio do relatório, deve ser possível compreender os gráficos apresentados, a relação desses dados com as informações obtidas acerca da população indígena brasileira em 1500 e a justificativa da projeção feita para essa população para as próximas décadas.

Além de explicar os gráficos, seu relatório deve conter:

- uma resposta para a questão disparadora – Será que teremos populações indígenas vivendo no Brasil daqui a 20 anos?
- uma reflexão sobre como esse projeto contribuiu para sua compreensão da identidade brasileira e do tratamento dado aos povos indígenas;
- uma reflexão sobre como esse projeto contribuiu para sua compreensão da utilidade dos gráficos e dos dados estatísticos para embasar análises e opiniões.

Sugestões de fontes

Artigos e textos na internet

- **Funai: Entre 1991 e 2010, população indígena se expandiu de 34,5% para 80,5% dos municípios [...]**. Disponível em: http://www.funai.gov.br/index.php/comunicacao/noticias/1069-entre-1991-e-2010-populacao-indigena-se-expandiu-de-34-5-para-80-5-dos-municipios-do-pais. Acesso em: 12 maio 2020.
- **Superinteressante: Quantos habitantes havia no Brasil na época do Descobrimento?**, de Guilherme Athaide. Disponível em: https://super.abril.com.br/mundo-estranho/quantos-habitantes-havia-no-brasil-na-epoca-do-descobrimento/. Acesso em: 12 maio 2020.
- **Jornalistas livres: A resistência indígena contra os novos bandeirantes**, de Matheus Macedo. Disponível em: https://jornalistaslivres.org/resistencia-indigena-contra-os-novos-bandeirantes/. Acesso em: 12 maio 2020.

Sites

- **Povos indígenas no Brasil**. Disponível em: https://pib.socioambiental.org/pt/P%C3%A1gina_principal. Acesso em: 12 maio 2020.
- **IBGE: Censo 2010**. Disponível em: https://censo2010.ibge.gov.br/. Acesso em: 12 maio 2020.
- **IBGE: Indígenas**. Disponível em: https://indigenas.ibge.gov.br/graficos-e-tabelas-2.html. Acesso em: 12 maio 2020.
- **IBGE – Brasil 500 anos: Os números da população indígena**. Disponível em: https://brasil500anos.ibge.gov.br/territorio-brasileiro-e-povoamento/historia-indigena/os-numeros-da-populacao-indigena.html. Acesso em: 12 maio 2020.
- **Funai – Fundação Nacional dos Povos Indígenas: Quem são**. Disponível em: http://www.funai.gov.br/index.php/indios-no-brasil/quem-sao. Acesso em: 12 maio 2020.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Vídeos

- **Intelectuais indígenas combatem falta de conhecimento sobre seus povos** (9 min). Disponível em: https://nacoesunidas.org/indio-nome-dado-pelos-europeus-nao-representa-nossa-diversidade-historiador-edson-kayapo/. Acesso em: 12 maio 2020.
- **Preservar línguas ancestrais é essencial para a sobrevivência de povos indígenas** (2 min). Disponível em: https://nacoesunidas.org/preservar-linguas-ancestrais-e-essencial-para-sobrevivencia-de-povos-indigenas/. Acesso em: 12 maio 2020.
- **Indígenas estão sendo assassinados em nome do 'desenvolvimento', alerta relatora da ONU** (2 min). Disponível em: https://nacoesunidas.org/indigenas-estao-sendo-assassinados-em-nome-do-desenvolvimento-alerta-relatora-onu/. Acesso em: 12 maio 2020.

Artigos em PDF

- **Os indígenas no Censo Demográfico 2010**, de IBGE. Disponível em: https://indigenas.ibge.gov.br/images/indigenas/estudos/indigena_censo2010.pdf. Acesso em: 12 maio 2020.
- **Avanços na captação de dados sobre a população indígena no Censo Demográfico 2010**, de Nilza de Oliveira Martins Pereira. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/rbepop/2016nahead/0102-3098-rbepop-2016a0040.pdf. Acesso em: 12 maio 2020.

Estes textos estão relacionados a alguns conhecimentos desenvolvidos nos anos finais do Ensino Fundamental, servindo como fonte de consulta e retomadas que se façam necessárias. São acompanhados de exemplos que auxiliarão os alunos na sua compreensão. Leia mais detalhes no Manual do Professor.

Algoritmos e fluxogramas

Algoritmo

Algoritmo é a descrição de uma sequência de passos necessários para a realização de uma tarefa. Um dos exemplos mais simples de um algoritmo é a descrição feita para elaborar determinado prato. A receita representa uma forma de algoritmo. Embora os algoritmos estejam intimamente relacionados com a linguagem de programação, não precisam ser executados por um computador. Qualquer aparato mecânico ou tecnológico que leia e siga os passos de um algoritmo pode executá-lo. Isso inclui os seres humanos.

Assim, quando armamos e resolvemos uma operação matemática executamos um algoritmo.

Exemplo

Algoritmo para adição de dois números naturais com dois algarismos cada

1. Chamaremos os dois números que serão adicionados de *a* e *b*.
2. Escreva *a* sobre *b*, de modo que os algarismos das unidades fiquem alinhados. Veja o exemplo a seguir.

$$\begin{array}{r} 95 \\ +\ 29 \\ \hline \end{array}$$

3. Adicione o algarismo das unidades de *a* com o algarismo das unidades de *b*.
   - **a)** Se a adição resultar em um número de um algarismo, escreva-o abaixo do algarismo das unidades de *b* (posição 1).
   - **b)** Se a adição resultar em um número de dois algarismos, escreva o algarismo da unidade desse número abaixo do algarismo da unidade de *b* (posição 1) e posicione uma unidade acima do algarismo das dezenas de *a*, como a seguir.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 95 \\ +\ 29 \\ \hline 4 \end{array} \quad \rightarrow \textbf{posição 1}$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

4. Adicione os algarismos das dezenas de *a* e *b* e também a unidade acima de *a*, se houver.
   - **a)** Se a adição resultar em um número de um algarismo, escreva-o abaixo do algarismo das dezenas de *b* (posição 2).
   - **b)** Se a adição resultar em um número de dois algarismos, escreva o algarismo das unidades desse número abaixo do algarismo das dezenas de *b* (posição 2); e escreva o algarismo das dezenas desse número à esquerda daquele das unidades (posição 3).

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 95 \\ +\ 29 \\ \hline 124 \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \textbf{posição 1} \\ \rightarrow \textbf{posição 2} \\ \rightarrow \textbf{posição 3} \end{array}$$

5. Escreva o resultado da adição de *a* e *b* como o número formado pelos algarismos das posições 3, 2 e 1 (note que a posição 3 pode ser vazia).

Como podemos observar pelo exemplo, um algoritmo deve ser um procedimento preciso, não ambíguo, mecânico, eficiente e correto. Em outras palavras, deve determinar uma sequência de ações que não permitem múltiplas interpretações e dão conta de executar, todas as vezes, a tarefa a que se propõem.

Veja outras características importantes dos algoritmos que são essenciais para compreendê-los.

- Um algoritmo não responde à pergunta “O que fazer?”, e sim “Como fazer?”.
- Os algoritmos são construídos com base em regras anteriores. Note que, para adicionar dois números seguindo o procedimento da página anterior, o computador ou a pessoa que irá executá-lo deve conhecer o sistema de numeração decimal e saber adicionar números naturais de um algarismo.
- Para executar um algoritmo é preciso primeiro declarar quais são as variáveis que irão alimentar os passos, garantindo que o mesmo algoritmo possa ser usado para realizar a mesma tarefa diversas vezes. No exemplo dado, declaramos que *a* e *b* são as variáveis que representam os dois números naturais que serão adicionados.
- Existem vários algoritmos para solucionar o mesmo problema, mas a construção de todos eles normalmente segue alguns passos principais.

    1. Compreender o problema e identificar todos os dados apresentados.
    2. Definir os dados de entrada.
    3. Escolher quais passos/cálculos devem ser executados para alcançar o objetivo.
    4. Definir os dados de saída/resultado.
    5. Testar o algoritmo com uma simulação, ou seja, utilizando os valores dados no problema inicial.

Conhecer essas características é importante para entender como os algoritmos funcionam. Por exemplo, se não declarássemos as variáveis *a* e *b* teríamos de escrever um algoritmo para adicionar 10 + 12 e outro para adicionar 22 + 54. Além disso, é preciso notar que, nesse caso, não foi preciso determinar qual número seria *a* e qual seria *b*. Se fosse necessário, incluiríamos no algoritmo a definição de chamar de *a* o maior dos dois números e de *b* o menor deles – nesse caso, teríamos de considerar que quem for executar o algoritmo deve saber ordenar números naturais de dois algarismos.

Esse exemplo mostra também que um sistema de algoritmos pode ser ampliado gradativamente: conhecendo o sistema de numeração decimal, adicionamos números naturais de um algarismo. Esse conhecimento pode ser utilizado para adicionar números de dois, três ou mais algarismos. Ampliando um pouco o conceito, usamos os mesmos passos para adicionar números racionais escritos na forma decimal.

Tipos de algoritmos

Há diversas formas de classificar os algoritmos, por exemplo: de acordo com sua construção; pela forma de aplicação; pelo tipo de problema que ele visa resolver etc. Destacamos aqui apenas três tipos de acordo com sua construção.

- **Algoritmos com iteração**

São aqueles em que o executor precisa repetir uma ou mais ações determinado número de vezes.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- **Algoritmos com tomada de decisão**

São aqueles em que o executor precisa analisar uma determinada resposta para determinar o caminho.

- **Algoritmos simples**

São seguidos do início ao fim, sem que o executor precise analisar as respostas para tomar decisões ou repetir algum comando.

Alguns algoritmos podem conter as características “tomada de decisão” e “iteração”.

Formas de apresentação de algoritmos

Todos esses tipos podem ser apresentados de diversas maneiras, veja a seguir as três formas mais utilizadas.

- **Descrição narrativa**

Consiste em escrever os passos a serem seguidos para a resolução do problema em linguagem natural. Um exemplo é o próprio idioma. Esse tipo de algoritmo é vantajoso por não exigir novos conhecimentos, mas pode gerar dupla interpretação dependendo das expressões utilizadas.

- **Pseudocódigo ou Portugol**

É uma forma genérica de escrever um algoritmo utilizando uma linguagem lógica simples, com regras predefinidas. A vantagem desse tipo de algoritmo é sua facilidade na conversão para alguma linguagem de programação, mas é necessário aprender as regras.

Fluxograma

É a representação visual ou gráfica do passo a passo para resolução de um problema. Esse tipo de representação é útil porque costuma ser mais fácil entender elementos gráficos do que interpretar um texto. Porém, é necessário que se aprenda a simbologia.

No exemplo da adição de dois números naturais, foi usada a **descrição narrativa**, e ele contém duas **tomadas de decisão**. Veremos a seguir alguns exemplos de todos esses tipos.

Exemplo 1: **algoritmo simples apresentado em descrição narrativa**

Algoritmo para cálculo da hipotenusa de um triângulo retângulo, dados os catetos

1. chame o primeiro cateto de *C1*;
2. chame o segundo cateto de *C2*;
3. chame a hipotenusa de *H*;
4. eleve o valor de *C1* ao quadrado;
5. eleve o valor de *C2* ao quadrado;
6. adicione os valores encontrados nos passos 4 e 5;
7. calcule a raiz quadrada do resultado obtido no passo 6;
8. iguale o resultado obtido no passo 7 a *H*;
9. escreva "O valor da hipotenusa é *H*".

Exemplo 2: **algoritmo simples apresentado em pseudocódigo**

Algoritmo para cálculo da média aritmética de dois números

- INÍCIO
- DECLARE (*C1*, *C2*, *S*, *M*)
- ESCREVA "Digite dois números"
- LEIA (*C1*, *C2*)
- *S* ← *C1* + *C2*
- *M* ← *S*/2
- ESCREVA "Média =", *M*
- FIM

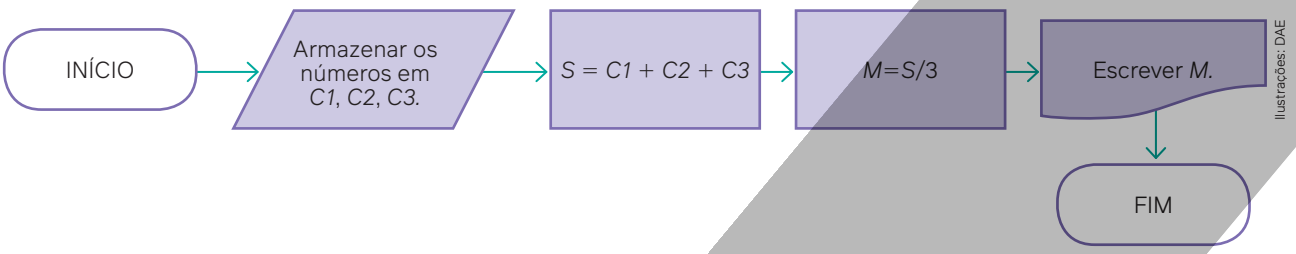
Como dissemos anteriormente, esse tipo de linguagem demanda que algumas regras sejam conhecidas. No caso do código acima, as regras utilizadas estão explicadas na tabela.

Código	Descrição da função
INÍCIO / FIM	Função utilizada para limitar o algoritmo. Tudo que está entre esses dois códigos faz parte da linguagem do pseudocódigo.
DECLARE ( )	Função utilizada para nomear as variáveis que serão utilizadas no algoritmo. No exemplo, as variáveis são *C1*, *C2*, *S* e *M*.
ESCREVA "texto"	Função utilizada para indicar o que deve aparecer na tela, ou seja, o que o algoritmo precisa dizer a quem o está utilizando. No exemplo, a função pede ao leitor que digite dois números. Ao final, mostra a média aritmética dos valores digitados.
LEIA ( )	Função utilizada para ler e armazenar nas variáveis os valores oferecidos por quem está usando o algoritmo. No exemplo dado, a função lê os dois números digitados e os armazena em *C1* e *C2*.
←	A seta leva para alguma variável o resultado de uma operação. No exemplo, leva para *S* o valor da soma dos números digitados e, em seguida, leva para *M* o valor da divisão de *S* por 2.
"="	O sinal de = é usado entre aspas na função ESCREVA. Quando aparece, demanda que seja escrito ao seu lado o valor da variável declarada após a vírgula. No exemplo, temos "**Média =**", ***M***, o que significa que o algoritmo vai escrever na tela, ao lado do sinal de =, o valor que está armazenado na variável *M*.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Exemplo 3: **algoritmo simples apresentado em fluxograma**
Algoritmo para cálculo da média aritmética de três números

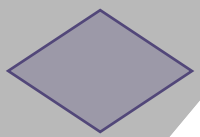
São dados três números e o algoritmo calcula a média aritmética entre eles.



Ilustrações: DAE

Esse tipo de linguagem requer o conhecimento de alguns símbolos. Os símbolos mais comuns usados em fluxogramas estão explicados a seguir, podendo essas formas variar um pouco de usuário para usuário.

Alguns símbolos utilizados em fluxogramas

Símbolo	Função
	Indica o início e o fim do processo.
	Utilizada para conectar os símbolos, indica o sentido do fluxo.
	Indica cada atividade que precisa ser executada.
	Indica a entrada/saída de dados genéricos.
	Indica documento gerado ou inserido.
	Indica a necessidade de tomada de decisão.
	Conector, indica que o fluxograma continua.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

No exemplo acima, utilizamos o símbolo ovalado para INÍCIO e FIM, o paralelogramo para declarar as variáveis *C1*, *C2*, *C3* que serão oferecidas pelo executor do algoritmo, o retângulo para carregar as variáveis *S* e *M* que serão calculadas e o retângulo com base ondulada para declarar o resultado de *M*. Não utilizamos o losango e o círculo porque não há tomadas de decisão nem pausas nesse fluxograma.

Exemplo 4: **algoritmo com iteração e tomada de decisão apresentado em fluxograma**

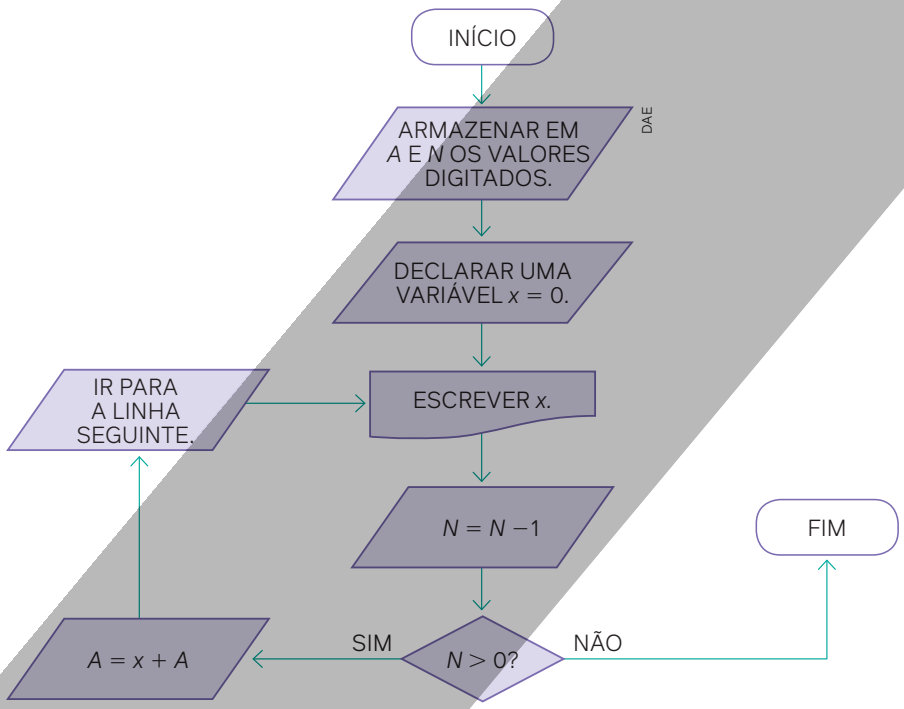
Algoritmo para escrever uma sequência de múltiplos de um número

Assim, as expressões $n = n - 1$ (que não tem sentido em matemática) ou $x = x + a$ (que em matemática significa $a = 0$), no fluxograma representam que a variável n redefine seu valor para $n - 1$ (ou seja, é reduzida em uma unidade) e a variável x recebe o valor de $x + a$ (ou seja, é acrescida de a unidades).

Atenção!

Uma observação importante sobre o fluxograma a seguir, que ilustra esse exemplo: como vimos, em linguagem de programação, o sinal de igualdade não indica a escrita de uma equação.

Vamos agora ao algoritmo. Para executá-lo, determina-se nessa ordem qual número será a base das multiplicações e quantos termos deve ter a sequência de múltiplos desse número. O algoritmo apresenta a sequência com determinada quantidade de múltiplos positivos do número dado.



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Você já sabe que o último passo para verificar se um algoritmo foi bem construído é testá-lo. É interessante escolher alguns valores para testar os algoritmos dos exemplos 3 e 4.

Vamos testar o fluxograma desse exemplo para construir a sequência dos 5 primeiros múltiplos de 3.

INÍCIO
$a = 3, n = 5, x = 0$
0
$n = 5 - 1 = 4; n > 0; x = 0 + 3 = 3$
3
$n = 4 - 1 = 3; n > 0; x = 3 + 3 = 6$
6
$n = 3 - 1 = 2; n > 0; x = 6 + 3 = 9$
9
$n = 2 - 1 = 1; n > 0; x = 9 + 3 = 12$
12
$n = 1 - 1 = 0; n \not> 0;$
FIM

Os fluxogramas representam uma forma visual de compreender os algoritmos, sejam simples ou dotados de iterações e pontos de tomada de decisão.

Recursos digitais

São muitos os recursos digitais que podem auxiliar o estudo da Matemática. Aqui mencionaremos algumas ideias que podem auxiliar na utilização de três deles: planilhas eletrônicas, *software* de geometria dinâmica e calculadoras. Quanto mais se explora de forma autônoma esses recursos mais funções e utilidades se descobre.

Planilhas eletrônicas

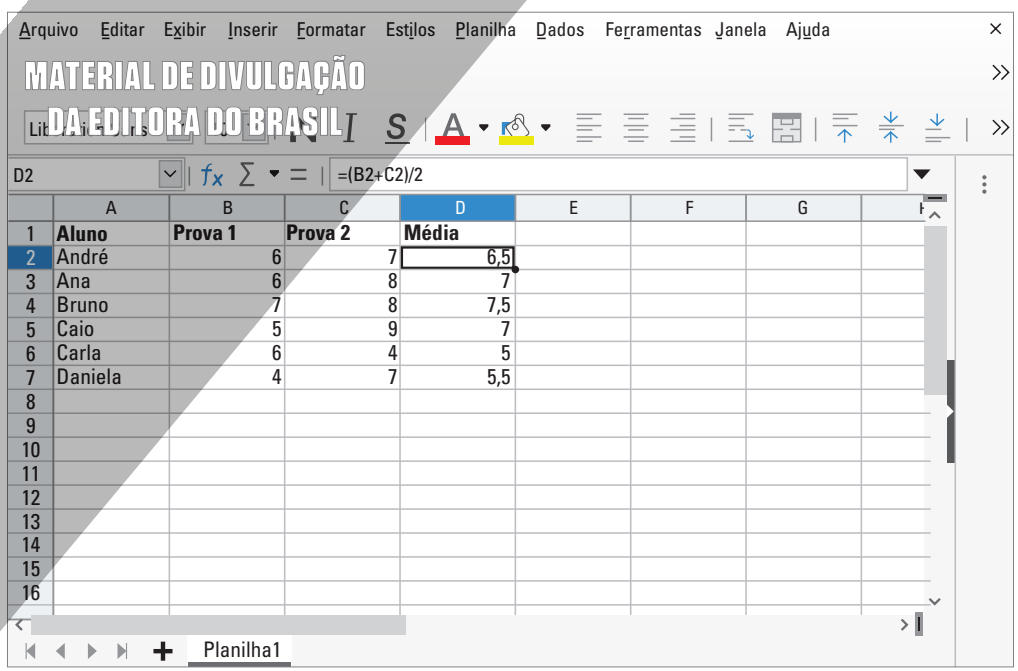
Chamamos de planilhas eletrônicas ou planilhas de cálculo os programas de computador utilizados para organizar e realizar cálculos com dados de tabelas. Sua utilidade, apenas como exemplo, está no cálculo automático de somas e de médias, entre outros.

Para acessar uma planilha eletrônica é preciso ter o *software* instalado no computador e encontrá-lo no menu principal, geralmente chamado menu **Iniciar**. Há versões dessas planilhas que podem ser usadas diretamente na internet, sem necessidade de instalar o programa. Você pode encontrá-las usando um mecanismo de busca e digitar "planilhas eletrônicas *on-line*", por exemplo.

Para preencher uma planilha eletrônica é necessário digitar as informações nas células que a compõem. As listas de valores podem ser digitadas em linhas e/ou em colunas e os dados ficam organizados em tabelas.

Na planilha eletrônica cada célula representa um dado e é indicada por uma letra e um número relacionados, respectivamente, à coluna e à linha em que a informação se encontra. Assim, por exemplo, a célula *D*4 indica o conteúdo que está na coluna *D* e na linha 4 da planilha.

Um exemplo é listar o nome dos alunos na coluna *A*, as notas obtidas por eles em duas provas nas colunas *B* e *C* e, na coluna *D*, determinar a média aritmética entre as notas de cada aluno. Após digitar na célula *D*2 a expressão para determinar a média entre as duas provas digitadas nas células *B*2 e *C*2, ao clicar na célula *D*2 e, em seguida, em cima do quadrado que aparece no canto inferior à direita dessa célula e arrastá-lo até a última linha da tabela, a expressão que determina a média dos valores de cada linha é copiada para as outras células; esse recurso é usado para copiar informações de uma célula para outra.



	A	B	C	D
1	**Aluno**	**Prova 1**	**Prova 2**	**Média**
2	André	6	7	6,5
3	Ana	6	8	7
4	Bruno	7	8	7,5
5	Caio	5	9	7
6	Carla	6	4	5
7	Daniela	4	7	5,5

Tarcísio Garbellini

Figura 1.

Operações e funções

Para que o programa determine uma medida ou resultado automaticamente, é necessário digitar o sinal de igual (=) e, em seguida, a expressão que relaciona o conjunto de dados à medida desejada.

Na planilha eletrônica, os sinais de operações matemáticas são usados para obtermos o valor numérico de expressões numéricas ao digitarmos, em determinada célula, o equivalente a dada expressão numérica. Por exemplo, para calcular o valor de $\frac{2a - (3 + b^2)}{c}$, em que *a*, *b* e *c* são números reais, pode-se organizar os dados, de modo que o valor de *a* seja inserido na célula *F1*, o de *b* na célula *G1* e o de *c* na célula *H1*.

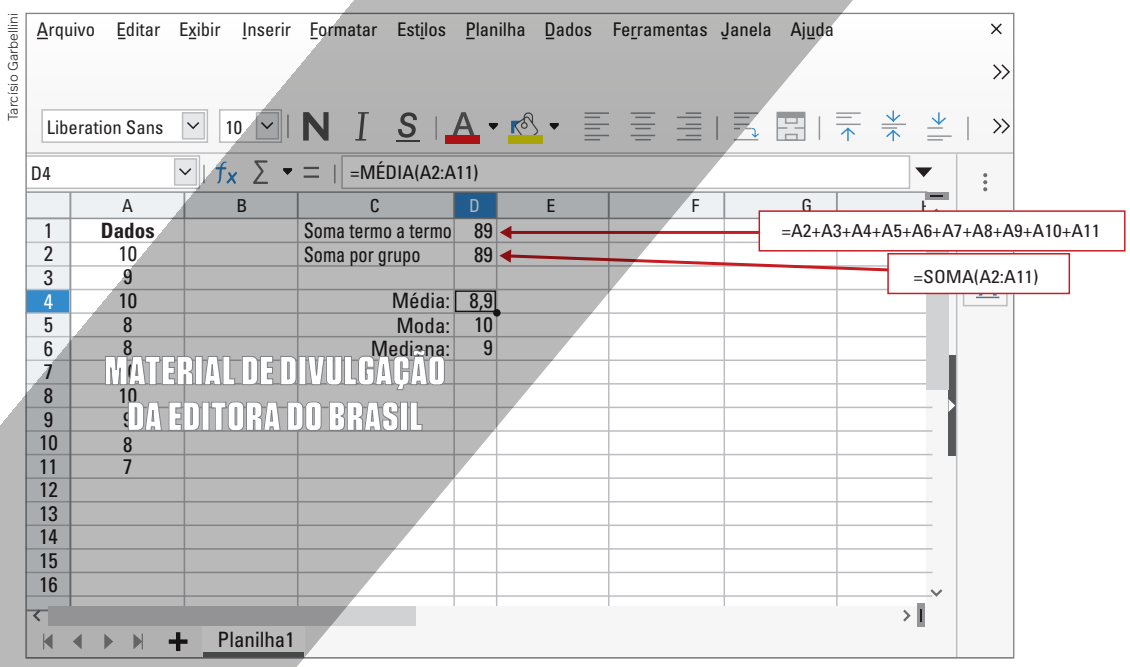
Assim, digita-se a expressão =(2*F1-(3+G1^2))/H1 na célula *H2*, por exemplo, e obtém-se o valor numérico desejado. Em programas de computador a multiplicação é indicada pelo asterisco (*), a divisão pela barra (/) e a potência pelo circunflexo (^).

Além disso, não é preciso utilizar colchetes e chaves para escrever expressões, usa-se parênteses dentro de parênteses. Além de expressões, existem fórmulas pré-programadas que substituem algumas expressões muito utilizadas. Por exemplo, para determinar a soma de um conjunto de dados listados na coluna *A*, da célula *A2* até a célula *A11* (ver célula D1 na figura 2), pode-se digitar a expressão:

$$=A2+A3+A4+A5+A6+A7+A8+A9+A10+A11$$

Ou, de modo equivalente, usar a função **SOMA** do programa e digitar a expressão =SOMA(*A2:A11*).

A média também é determinada, entre outras maneiras, pela função **MÉDIA** predefinida no *software*, digitando-se a expressão =MÉDIA(*A2:A11*). Analogamente, para determinar a moda desses valores, usamos a função **MODO** na expressão =MODO(*A2:A11*). E, para determinar a mediana, usa-se a função **MED** na expressão =MED(*A2:A11*).



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Figura 2.

Assim, podemos determinar a soma, média, moda e mediana de um conjunto de dados sem criar uma expressão numérica para esse cálculo. Há diversas funções arquivadas na biblioteca de uma planilha eletrônica que possibilitam a simplificação dos cálculos.

Você pode encontrar as funções predefinidas do *software* acessando o menu Inserir > Função. No assistente de funções que se abre, faça a busca por categorias de funções ou por ordem alfabética.

Além de determinar automaticamente valores relacionando os conteúdos das células, é possível fazer diferentes tipos de gráficos com base em um conjunto de dados usando esse tipo de *software*.

Gráficos estatísticos

Para criar um gráfico de setores com os dados indicados na coluna *A* da figura 2, por exemplo, basta selecionar o conteúdo da célula *A2* até a célula *A11*, clicar no menu **Inserir** e depois em **Gráfico**. Feito isso, uma janela será aberta para você escolher o tipo de gráfico: de colunas, de barras, de linhas, entre outros (ver figura 3). Para obter um gráfico de setores, escolha o tipo ***Pizza***, que é como geralmente são denominados nesses *softwares*.

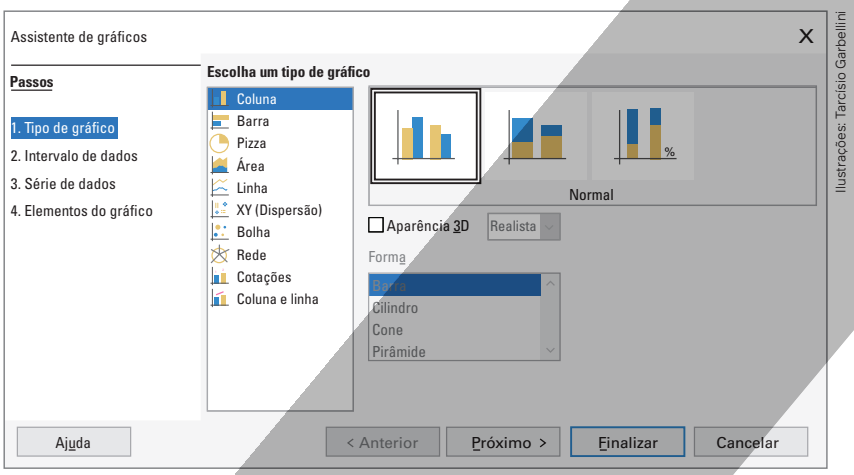


Figura 3.

Depois de escolher o tipo de gráfico, basta clicar em **Finalizar** e o gráfico é inserido na planilha eletrônica. A próxima etapa é compor a legenda e o título do gráfico. Você pode fazer ajustes, como trocar as cores, inserir o título dos dados e outros detalhes que facilitem a divulgação das informações.

Para criar gráficos que relacionem duas variáveis, basta organizar os dados em duas colunas diferentes da planilha (uma coluna para cada variável) – nas células *B2* até *B11* e *C2* até *C11*, por exemplo –, clicar com o *mouse* e selecionar todas as células que contêm os dados digitados. Depois basta repetir o procedimento anterior e escolher o tipo de gráfico mais adequado, que pode ser de barras duplas.

É possível também classificar as variáveis atribuindo título e unidade a elas. Por exemplo, se um par de dados se refere aos valores esperados e reais nos primeiros meses de um ano, digite essas informações em uma coluna (como na coluna *A* da figura a seguir) e na primeira linha das colunas de dados (como nas células *B1* e *C1* da figura 4). Ao selecionar todas as células (de *A1* até *D11*) e criar um gráfico de barras, a legenda e o título dos dados já são automaticamente preenchidos, mas ainda é possível editá-los.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

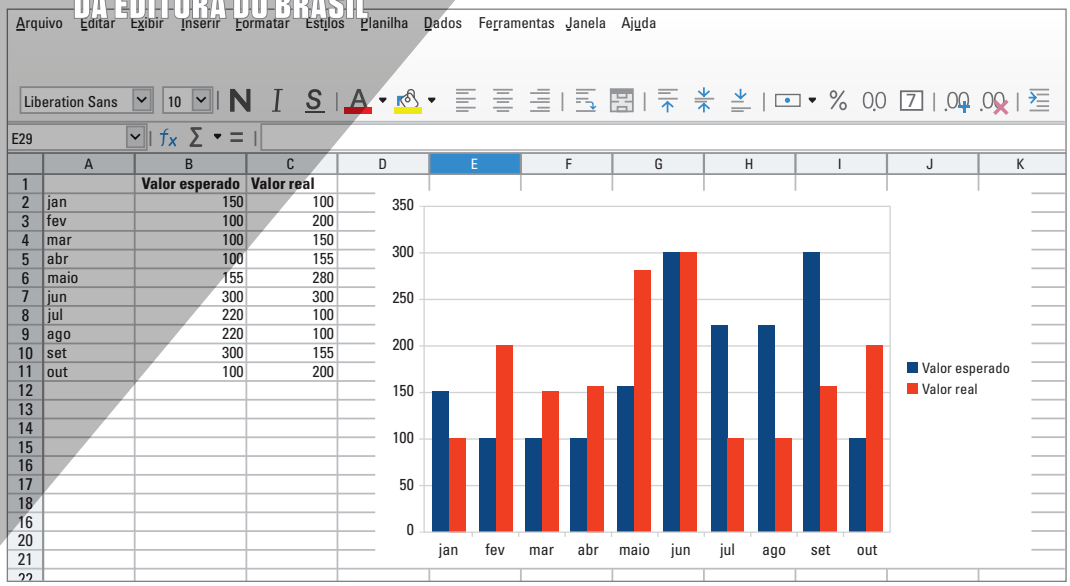


Figura 4.

Software de geometria dinâmica

Software de geometria dinâmica é um programa que, em um ambiente virtual, possibilita o estudo da Geometria simulando o uso de régua e compasso. A principal característica desse ambiente é a possibilidade de movimentar as figuras representadas mantendo algumas características determinadas.

Existem diferentes programas que podem ser usados no trabalho com geometria dinâmica, e algumas versões estão disponíveis na internet, sem necessidade de instalação do *software*.

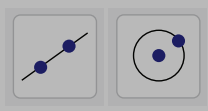
Apesar da variedade de ambientes virtuais de geometria dinâmica, todos têm funcionalidades comuns, necessárias para as construções geométricas.

Construções geométricas

Duas ferramentas são básicas para qualquer construção. A ferramenta **seta** possibilita selecionar e mover pontos, retas, figuras ou construções inteiras. A ferramenta **ponto** pode ser usada para criar pontos diretamente no plano cartesiano, é necessário apenas selecioná-la e clicar no lugar do plano em que o ponto deve ser criado; dessa maneira, automaticamente são atribuídos ao ponto um nome e suas coordenadas.

Exemplos de ícones para as ferramentas **seta** e **ponto**.

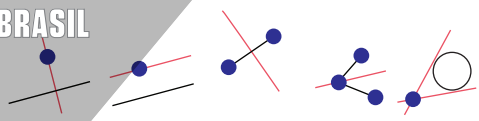
Utilizando as ferramentas principais, **reta** e **círculo**, pode-se fazer qualquer construção geométrica, pois elas simulam a régua e o compasso. A ferramenta **círculo**, dependendo do *software* utilizado, também pode vir indicada como "circunferência" ou "compasso".



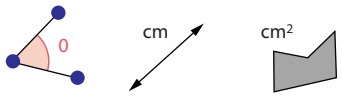
Exemplo de ícones para as ferramentas **reta** e **círculo**.

Há ainda outras ferramentas que facilitam construções geométricas básicas, como **reta perpendicular**, **reta paralela**, **bissetriz**, **mediatriz**, **reta tangente** etc. Além dessas funcionalidades, outra categoria de ferramentas importante é a de medições de **ângulos**, **comprimentos** e **áreas**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL



Exemplo de ícones das ferramentas reta perpendicular, reta paralela, mediatriz, bissetriz e reta tangente.



Exemplo de ícones das ferramentas para ângulo, comprimento e área.

Ilustrações: Tarcísio Garbellini

Exemplo

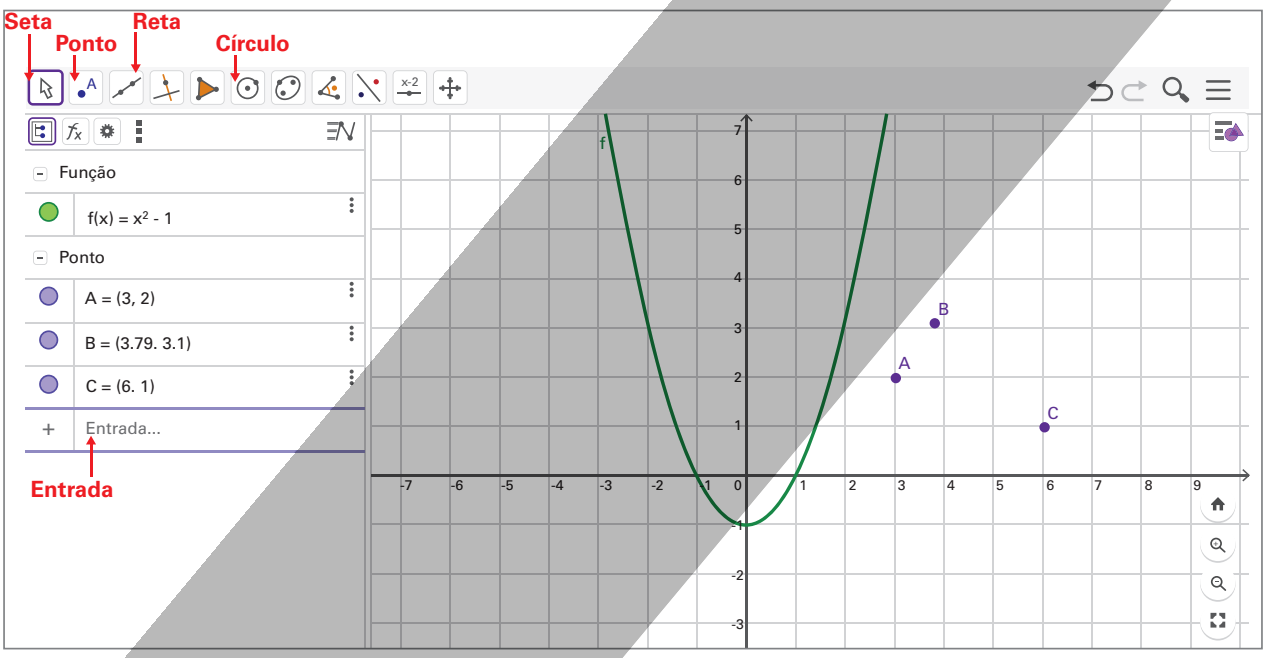
Veja as etapas para a criação de uma reta tangente a uma circunferência cujo raio tem 5 unidades de medida de comprimento e o centro está em (1, 5).

1. Crie o ponto *A*(1, 5) clicando no ponto (1,5) do plano cartesiano com o botão **ponto** ativado.
2. Com a ferramenta **círculo dados centro e raio**, clique no ponto *A* e insira o valor 5 na caixa que se abre.
3. Para criar a reta tangente a essa circunferência, basta selecionar o botão **reta tangente** e clicar em um dos pontos da circunferência obtida anteriormente.

Expressões algébricas

O uso da caixa **entrada** também é relevante quando, por exemplo, é necessário determinar a localização de um ponto por meio de suas coordenadas. Nesse caso, na **entrada** é suficiente digitar o valor *x* da abscissa e o valor *y* da ordenada no formato (*x*, *y*). Além disso, pode-se obter a representação gráfica de funções no plano cartesiano com base em sua representação algébrica. Para representar o gráfico de $f(x) = x^2 - 1$, basta digitar a expressão = *x*^2−1 no campo **entrada** (ver figura 5).

> Em geral, nos programas de computador, para indicar uma potência, utiliza-se o acento circunflexo (**^**). Assim x^2 é indicado por *x*^2, ou 10^3 por 10^3 etc. A multiplicação é representada pelo asterisco (*****) e a divisão pela barra (**/**).



Tarcísio Garbellini

Figura 5.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Calculadoras

As calculadoras são ferramentas importantes no dia a dia, pois, assim como outras tecnologias, agilizam o cálculo em diversas operações. Existem diferentes tipos, as mais conhecidas são a convencional e a científica. Atualmente, elas também estão disponíveis nos computadores e *smartphones*.

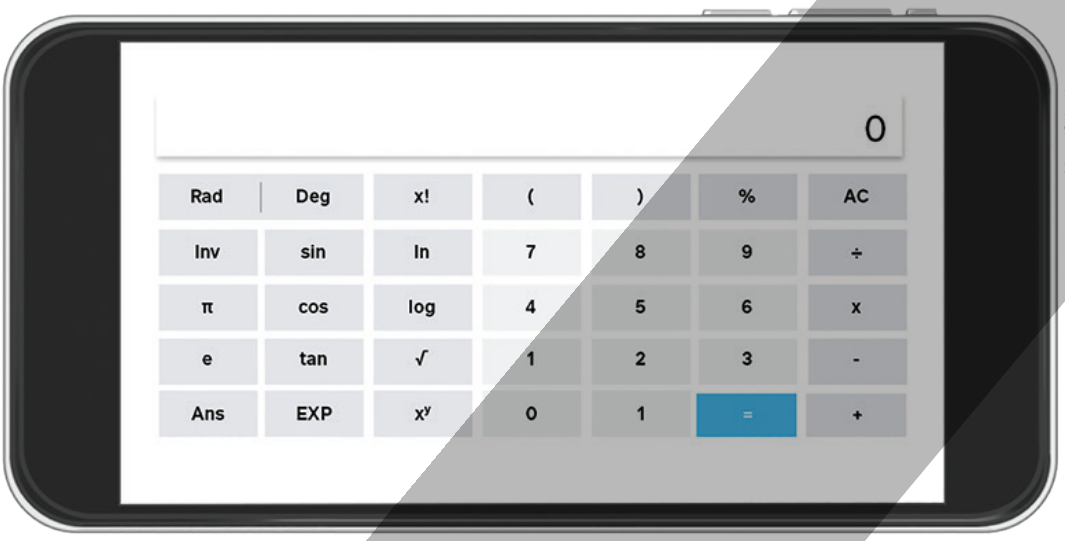
Com a calculadora convencional é feito o cálculo de operações básicas, como adição, subtração, multiplicação e divisão. A maioria delas inclui também uma tecla para o cálculo de porcentagens e outra para raízes quadradas.

Já as calculadoras científicas, além das funcionalidades das convencionais, possibilitam outras operações, como calcular potências com expoentes inteiros ou fracionários com a tecla x^y; determinar a representação fracionária de um número decimal com a tecla $\frac{a\,b/c}{}$; utilizar potências de base 10 com a tecla **EXP**; calcular raízes com diferentes índices com a tecla $\sqrt[x]{\ }$; determinar valores trigonométricos etc. Além disso, é possível utilizar as teclas de parênteses **(** e **)** para digitar uma expressão numérica e obter seu resultado.

Jouke van Keulen/Shutterstock.com

Calculadora científica.

Para acessar a calculadora científica no computador, basta abrir a convencional (também chamada de calculadora-padrão) e, no menu dela, habilitar a calculadora científica. Em *smartphones,* pode ser acessada pelo menu principal do aplicativo da calculadora-padrão ou, na maioria dos aparelhos, girando a tela para que fique na horizontal.



Mauro Salgado

Calculadora científica exibida na tela de um *smartphone*.

Veja como calcular alguns valores utilizando a calculadora do celular.

Comente com os estudantes que os dados da "entrada na calculadora" podem variar de acordo com o modelo.

Expressão numérica	Entrada na calculadora	Expressão no visor da calculadora
$0{,}75^{10} + \sqrt[4]{3}$	Digite **0,75**, digite x^y, digite **10**, digite **+**, digite **3**, digite x^y, digite **(**, digite **1**, digite **÷**, digite **4** e digite a tecla **)**	0,75^(10) + 3^(1/4)

Apesar de as calculadoras, assim como outras ferramentas tecnológicas, serem importantes por auxiliarem no estudo de propriedades matemáticas e agilizarem cálculos, há um limite de dígitos com os quais elas conseguem operar ou mostrar no visor. Assim, resultados de valores periódicos, como 0,333..., ou irracionais, como $\sqrt{2}$, são representados e operados considerando uma aproximação. Por exemplo, se a calculadora tem capacidade de operar com até 10 dígitos, o valor de $\sqrt{2}$, que é aproximadamente 1,414213562373095, será considerado como sendo exatamente 1,41421356.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Unidades de medida

Lidamos cotidianamente com grandezas discretas e contínuas. Chamamos de grandezas discretas aquelas que são enumeráveis, ou seja, que podemos contar uma a uma, como pessoas e objetos. As grandezas contínuas não são enumeráveis, mas ainda assim lidamos com elas cotidianamente e precisamos medi-las: distâncias, comprimentos, ângulos, áreas, volumes, capacidades, intervalos de tempo, massas etc.

Para essas medições é preciso estabelecer unidades de medida e comparar a grandeza com a unidade de medida. Assim, é preciso estabelecer unidades de medida compatíveis com cada grandeza.

Os sistemas de medida baseiam-se no uso de uma unidade-padrão e de seus múltiplos e submúltiplos. Isso acontece porque, sendo grandezas contínuas, em geral a comparação entre a grandeza e a unidade não resulta em um número inteiro. Por exemplo, ao medir uma distância em metros (como a largura de uma sala), é comum que essa distância contenha uma quantidade inteira de metros e mais uma fração da unidade de medida metro. Para medir essa fração usamos os submúltiplos do metro (decímetros, centímetros e milímetros).

Em contrapartida, ao medir o tamanho de uma rua, é comum que a quantidade de metros seja muito grande, por isso usamos agrupamentos de múltiplos da unidade (decâmetros, hectômetros e quilômetros).

Basicamente, os sistemas de fracionamento (submúltiplos) e agrupamentos (múltiplos) da unidade podem ser decimais, de base 10, ou sexagesimais, de base 60.

Sistemas sexagesimais de medidas

Nos sistemas sexagesimais de medidas, o submúltiplo da unidade é obtido por uma fração da unidade cujo denominador é 60. Utilizamos esse sistema atualmente para medir o tempo em horas e para medir ângulos.

Medidas de tempo

Podemos medir o tempo em anos, meses, dias, e também usando horas (h), minutos (min) e segundos (s).

- 1 minuto equivale a uma fração da hora, precisamente $\frac{1}{60}$, ou seja, $1\ \text{min} = \frac{1}{60}\ \text{h}$
- 1 segundo equivale a uma fração do minuto, também $\frac{1}{60}$, ou seja, $1\ \text{s} = \frac{1}{60}\ \text{min}$

Portanto, 1 segundo equivale a uma fração da hora, precisamente, $\frac{1}{3\,600}$, isto é, $1\ \text{s} = \frac{1}{3\,600}\ \text{h}$.

Ou seja:

$$\mathbf{1\ min = 60\ s\ e\ 1h = 60\ min = 3600\ s}$$

Como nosso sistema de numeração é decimal, é preciso ter cuidado ao fazer transformações de unidades num sistema sexagesimal. Por exemplo, quando dizemos 2,3 h, isso não significa 2 h e 3 min, o correto é 2 h e $\frac{3}{10}$ de hora. Ao transformar 2,3 h para horas e minutos, precisamos multiplicar a parte decimal por 60, assim:

$$\mathbf{2{,}3\ h = 2\ h + 0{,}3\ h = 2\ h + 0{,}3\ \cdot\ 60\ min = 2h18min}$$

Os cálculos para transformação de minutos em segundos são análogos aos utilizados para transformação de horas em minutos.

A partir dos segundos, passamos a usar a base dez para representar partes do segundo: décimos de segundo, centésimos de segundo, milésimos de segundo etc. É comum encontrar essas medidas em competições esportivas que são decididas pelo tempo, como natação ou corridas, entre tantas outras modalidades.

Outro ponto a ser observado é que não agrupamos as horas em conjuntos múltiplos de 60, ou seja, não temos uma unidade de medida que represente 60 h. Em vez disso, utilizamos unidades que fogem ao sistema sexagesimal: agrupamos 24 h em um dia e os dias em semanas, meses e anos.

Medidas de ângulos

As medidas de ângulos também são feitas num sistema sexagesimal, como as medidas de tempo. Os ângulos são medidos em graus. Seus submúltiplos se chamam minutos e segundos, embora utilizem símbolos diferentes daqueles dos [illegible]

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

minutos ’ segundos ’’

$$1' = 60'' \text{ e } 1^\circ = 60' = 3600''$$

Nesse caso também é preciso ter cuidado ao fazer transformações de unidades. De fato,

$$30{,}5^\circ = 30^\circ + 0{,}5^\circ = 30^\circ + (0{,}5 \cdot 60)' = 30^\circ\ 30'$$

Ou ainda:

$$30{,}5^\circ = (30{,}5 \cdot 60)' = 1830'$$

Todos os cálculos são análogos aos do tópico sobre medidas de tempo. Nota-se que aqui também não agrupamos os graus em conjuntos múltiplos de 60, ou seja, não temos uma unidade de medida que represente 60°, mas temos um agrupamento máximo de 360° que ocorre num círculo.

Sistemas decimais de medidas

Nos sistemas decimais de medidas, a partir de uma unidade-padrão de medida temos os submúltiplos e múltiplos dessa unidade, que são representados por prefixos.

- Múltiplos da unidade:

  10 vezes a unidade (prefixo: *deca*); 100 vezes a unidade (prefixo: *hecta*); 1000 vezes a unidade (prefixo: *quilo*).
- Submúltiplos da unidade:

  0,1 vezes a unidade (prefixo: *deci*); 0,01 vezes a unidade (prefixo: *centi*); 0,001 vezes a unidade (prefixo: *mili*).

Se o nome da unidade-padrão é X, os símbolos de seus principais múltiplos serão:

decaX (1 daX = 10 · X),
hectoX (1 hX = 100 · X) e
quiloX (1 kX = 1000 · X).

Os submúltiplos serão:

deciX (1 dX = 0,1 · X),
centiX (1 cX = 0,01 · X) e
miliX (1 mX = 0,001 · X).

Veja um resumo dessas relações no quadro abaixo.

1 kX	1 hX	1 daX	1 X	1 dX	1 cX	1 mX
1000 · X	100 · X	10 · X	1 · X	0,1 · X	0,01 · X	0,001 · X

Mesmo que existam todos esses prefixos no sistema decimal de medidas para os múltiplos e submúltiplos das unidades de medida, nem todos são empregados igualmente; na prática, alguns se destacam em relação a outros. São eles: *quilo*, *centi* e *mili*.

Unidades de capacidade

Utilizamos medidas de capacidade para determinar o tamanho do espaço tridimensional interior de um recipiente ou quanto de ar ele contém. É preciso diferenciar essa medida da medida de massa: se um recipiente tem capacidade de 1 litro, nele cabe um litro de qualquer coisa, seja água, ar, areia, seja outro material qualquer, mesmo que as massas sejam diferentes.

Unidade-padrão
litro (L)
Múltiplos e submúltiplos principais:
1 kL = 1000 L 1 mL = 0,001 L

Unidades de massa

De maneira bastante superficial, podemos dizer que utilizamos medidas de massa para determinar a quantidade de matéria de um corpo. Nesse caso, a unidade de medida tomada como padrão é o quilograma. Isso significa que, diferentemente do que ocorre com as unidades do sistema decimal, as unidades de massa mais comuns são todas formadas por submúltiplos da unidade-padrão.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Unidade-padrão
quilograma (kg)
Submúltiplos principais:
1 g = 0,001 kg ou 1000 g = 1 kg
1 mg = 0,001 g ou 1000 mg = 1 g

Há ainda uma unidade múltipla do quilograma usada para indicar medidas relacionadas a grandes massas: a tonelada (T). Uma tonelada equivale a 1000 quilogramas (1 T = 1000 kg).

Unidades de comprimento

O comprimento é uma grandeza física fundamental que expressa a distância entre dois pontos. Utilizamos medidas de comprimento para determinar o tamanho, por exemplo, de segmentos, distância entre duas cidades, altura de uma pessoa etc.

Unidade-padrão
metro (m)
Múltiplos e submúltiplos principais:
1 km = 1000 m 1 dm = 0,1 m 1 cm = 0,01 m 1 mm = 0,001 m

No sistema métrico existem também medidas de superfície, em metros quadrados (m^2), e medidas de espaço, em metros cúbicos (m^3).

Unidades de área

Chamamos de unidades de área aquelas usadas para medir uma região do espaço em duas dimensões, ou seja, uma superfície delimitada.

Unidade-padrão

metro quadrado (m^2)

Múltiplos e submúltiplos principais:

$1\ km^2 = (1000\ m)^2 = 1000000\ m^2$

$1\ dm^2 = (0{,}1\ m)^2 = 0{,}01\ m^2$

$1\ cm^2 = (0{,}01\ m)^2 = 0{,}0001\ m^2$

$1\ mm^2 = (0{,}001\ m)^2 = 0{,}000001\ m^2$

Exemplo:

Observe como transformar 2,34 m^2 para a medida em centímetros quadrados:

$2{,}34\ m^2 = 2{,}34 \cdot (100\ cm)^2 = 2{,}34 \cdot (10000\ cm^2) = 23400\ cm^2$

Unidades de volume

Chamamos de unidades de medida de volume aquelas usadas para medir uma região do espaço tridimensional, como um sólido maciço.

Unidade-padrão

metro cúbico (m^3)

Múltiplos e submúltiplos principais:

$1\ km^3 = (1000\ m)^3 = 1000000000\ m^3$

$1\ dm^3 = (0{,}1\ m)^3 = 0{,}001\ m^3$

$1\ cm^3 = (0{,}01\ m)^3 = 0{,}000001\ m^3$

$1\ mm^3 = (0{,}001\ m)^3 = 0{,}000000001\ m^3$

Um metro cúbico é a medida do volume de um cubo cuja aresta mede 1 m.

Exemplo:

Vamos transformar 2,3 m^3 em centímetros cúbicos:

$2{,}3\ m^3 = 2{,}3 \cdot (100\ cm)^3 = 2{,}3 \cdot 1000000\ cm^3 = 2300000\ cm^3$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Há ainda uma correspondência entre as medidas de volume e de capacidade, já que ambas medem o espaço tridimensional. Enquanto ao medir o volume medimos o espaço ocupado por um corpo, ao medir a capacidade medimos o espaço da região interna desse corpo. A relação entre as unidades pode ser exposta de várias maneiras.

Entre as relações mais utilizadas temos:

$1\ dm^3$ corresponde a 1000 L

$1\ cm^3$ corresponde a 1 mL

Efetuando transformações de unidades

Utilizando propriedades de potenciação e de acordo com os prefixos utilizados nas medidas do sistema decimal, as transformações das unidades podem ser feitas de maneira mais simples.

Exemplo 1:

Transforme 24,5 kg para a unidade grama.

Substituímos 1 kg por 1000 g:

$24{,}5\ kg = 24{,}5 \cdot 1\ kg = 24{,}5 \cdot (1000\ g) = 24500\ g$

Exemplo 2:

Transforme 452 mL para a unidade litros.

Substituímos 1 mL por 0,001 L:

$452\ \text{mL} = 452 \cdot 1\ \text{mL} = 452 \cdot (0{,}001\ \text{L}) = 0{,}452\ \text{L}$

Exemplo 3:

Transforme 74,27 T para quilogramas.

Substituímos 1 T por 1 000 kg:

$74{,}27\ \text{T} = 74{,}27 \cdot 1\ \text{T} = 74{,}27 \cdot (1\,000\ \text{kg}) = 74\,270\ \text{kg}$

No caso de transformações relacionadas a volumes e áreas, utilizamos propriedades de potenciação que facilitam tais conversões entre unidades. As principais propriedades são:

- multiplicação de bases iguais:
  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- divisão de bases iguais:
  $a^m : a^n = a^{m-n}$
- potência de potência:
  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Também aqui o essencial está no conhecimento do que os prefixos representam. Nesse sentido, vamos exemplificar:

Exemplo 4:

Transformar 8,56 m^2 para centímetros quadrados.

Substituímos 1 m por 100 cm $\rightarrow 10^2$ cm:

$8{,}56\ \text{m}^2 = 8{,}56 \cdot 1\ \text{m}^2 = 8{,}56 \cdot (10^2\ \text{cm})^2 = 8{,}56 \cdot 10^4\ \text{cm}^2 = 8{,}56 \cdot 10\,000\ \text{cm}^2 = 85\,600\ \text{cm}^2$

Exemplo 5:

Transformar 25 000 dm^3 para metros cúbicos.

Substituímos 1 dm por 0,1 m $\rightarrow 10^{-1}$ m:

$25\,000\ \text{dm}^3 = 25\,000 \cdot 1\ \text{dm}^3 = 25\,000 \cdot (10^{-1}\ \text{m})^3 = 25\,000 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 = 25\,000 \cdot 0{,}001\ \text{m}^3 = 25\ \text{m}^3$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Notação científica

A notação científica é um modo de escrever números utilizando potências de dez, de forma que seja possível representar números muito grandes ou muito pequenos, o que facilita a leitura, as comparações e operações entre eles.

Utilizando notação científica, um número deve necessariamente ser escrito com a seguinte estrutura:

$$m \cdot 10^n$$

Nessa estrutura, m é um número real tal que $1 \leqslant m \leqslant 9$ e n é um número inteiro.

Exemplos:

a) $123{,}4 = 1{,}234 \cdot 10^2$

b) $0{,}0067 = 6{,}7 \cdot 10^{-3}$

c) $0{,}00003 = 3 \cdot 10^{-5}$

d) $34\,000 = 3{,}4 \cdot 10^4$

A notação científica também é importante para garantir o bom uso dos **algarismos significativos**, de acordo com a precisão de determinada medida.

Conjuntos numéricos

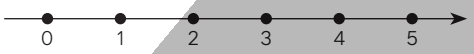
A noção de número é uma das mais sofisticadas e abstratas da Matemática. Uma forma de organizar essa ideia sem, necessariamente, discutir com profundidade o que são números é classificá-los em conjuntos. Veja a seguir uma apresentação dos diversos "tipos" de números usados nas representações e resoluções de problemas.

Conjunto dos números naturais

Os números naturais são usados em contagens. Embora existam infinitos números naturais, eles são enumeráveis, como mostra o conjunto a seguir.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Os números naturais são representados geometricamente por pontos equidistantes em uma reta. Observe o fragmento de reta numérica a seguir; nessa reta é dado um ponto denominado origem (ao qual faremos corresponder o 0), uma unidade de medida e um sentido positivo crescente.



Note que o menor número natural é zero. Para escrevermos apenas os números naturais positivos, precisamos excluir o zero do conjunto dos naturais:

$$\mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}^*$$

Observação

Utilizamos o asterisco para excluir o zero de um conjunto, de modo que o novo conjunto obtido admita apenas termos não nulos.

Conjunto dos números inteiros

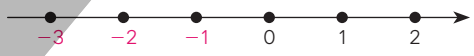
Os números naturais não são suficientes para trabalhar determinadas situações. Imagine que se queira representar, num extrato bancário, o valor do saldo de um cliente que está devendo 1000 reais ao banco. Como indicar isso? Além disso, como fazer a operação $(6 - 8)$? Para essas questões são necessários números negativos.

Com eles, podemos chegar em $6 - 8 = -2$, e o saldo bancário do cliente pode ser representado no extrato do banco como -1000 reais. Acrescentando-se os números negativos ao conjunto dos naturais, obtém-se o conjunto dos números inteiros.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2 ...\}$$

Observe que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, ou seja, todo número natural é inteiro. Esses conjuntos podem ser representados em diagramas de Euler ou na reta numérica, como nas figuras a seguir.



Reta numérica com os números inteiros e, portanto, também os números naturais.

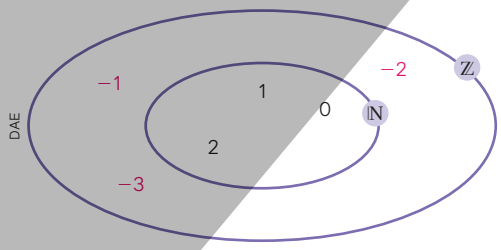


Diagrama de Euler do conjunto dos números naturais como subconjunto dos inteiros.

São subconjuntos do conjunto dos inteiros:

$\mathbb{Z}^* = \{..., -2, -1, 1, 2, ...\} = \mathbb{Z} - \{0\}$ (inteiros não nulos)

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, ...\} = \mathbb{N}$ (inteiros não negativos ou naturais)

$\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, ...\}$ (inteiros não positivos)

$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}^*$ (inteiros estritamente positivos)

$\mathbb{Z}_-^* = \{-1, -2, -3, ...\}$ (inteiros estritamente negativos)

Observação

Os símbolos + e − indexados no símbolo do conjunto representam que o conjunto não admite valores, respectivamente, negativos ou positivos.

Conjunto dos números racionais

Os números inteiros também não são suficientes para resolver determinadas situações. Imagine que se queira dividir igualmente 10 chocolates para 5 crianças. Cada criança receberia $10 \div 5 = 2$ chocolates. Mas e se fosse para dividir 10 chocolates para 20 crianças? O resultado da operação $10 \div 20$ não se encontra no conjunto dos números inteiros. No entanto, se for permitido partir os chocolates ao meio, cada criança receberia metade de um chocolate, isto é: $10 \div 20 = \frac{1}{2}$.

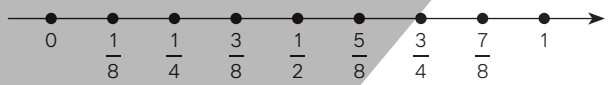
O número $\frac{1}{2}$ também pode ser representado na forma decimal por 0,5. Na notação decimal, os algarismos à direita da vírgula representam um "fragmento" de um inteiro (ou uma "parte" da unidade). Ao se acrescentar ao conjunto dos inteiros as frações, obtém-se o conjunto dos números racionais.

Observe que todo número inteiro também é um número racional. São as frações aparentes, como $\frac{6}{3} = 2$, $-\frac{15}{5} = -3$, $\frac{7}{1} = 7$ etc.

As partes da unidade, citadas anteriormente, são frações não aparentes, como $\frac{1}{2} = 0{,}5$, $\frac{5}{8} = 0{,}625$ etc. Nesse caso, na escrita fracionária o numerador é menor que o denominador, e na escrita decimal o algarismo zero fica à esquerda da vírgula para indicar que a parte inteira desse número é nula.

Há ainda os números mistos que têm parte inteira e parte fracionária, por exemplo $3\frac{2}{5}$ (três inteiros e dois quintos). Esse número pode ser escrito na forma de uma única fração ($\frac{17}{5}$) ou na forma decimal (3,4). Quando escrito na forma de fração, temos uma fração imprópria, que ocorre quando o numerador é maior que o denominador. Quando escrito na forma decimal, temos um número cuja parte inteira é não nula, isto é, alguma ordem à esquerda da vírgula contém um algarismo diferente de zero.

Ao reunirmos todos esses tipos de frações, temos o conjunto dos números racionais, formado por todos os números que podem ser escritos na forma de fração, com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero. Sua representação na reta numérica é:



Veja que estão representados apenas alguns números racionais entre 0 e 1; portanto, entre dois números racionais quaisquer existem infinitos outros números racionais, por isso é impossível colocar todos juntos numa fila em ordem crescente ou decrescente sem que falte algum. Apesar disso, os números racionais não preenchem toda a reta e, embora haja pontos entre eles, é conveniente escrever o conjunto de acordo com sua definição:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

O conjunto dos racionais é, portanto, formado por todos os números que podem ser escritos na forma de fração, isto é, na forma de divisão de um número inteiro por um número inteiro não nulo.

Essa nova notação requer alguns cuidados. Quando escrevemos $\frac{\pi}{4}$, por exemplo, embora usando um "traço" de fração, não é um número racional, pois π não é um número inteiro. Aliás, π também não é um número racional.

Veja a seguir a classificação dos números racionais.

- Números inteiros que podem ser escritos como frações aparentes. Exemplos:

  a) $-3 = -\frac{6}{2} = -\frac{15}{5}$... **b)** $\frac{12}{3} = 4$ **c)** $\frac{0}{7} = 0$

- Decimais exatos, que podem ser escritos como frações decimais, isto é, frações cujo denominador é uma potência de 10, ou quaisquer outras frações que, simplificadas, têm denominadores que são exclusivamente múltiplos de 2 ou de 5.

  a) $0{,}23 = \frac{23}{10}$ **b)** $1{,}15 = \frac{115}{100} = 1\frac{15}{100} = 1\frac{3}{20}$ **c)** $-\frac{3}{4} = -0{,}75$

Para transformar uma fração não aparente em um número na forma decimal, basta dividir o numerador pelo denominador.

- Dízimas periódicas são números decimais com infinitas casas depois da vírgula em uma sequência de algarismos que se repete. Essa sequência de algarismos repetidos é denominada período. Exemplos:

a) $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots = 0{,}\overline{3}$

b) $0{,}2121\ldots = 0{,}\overline{21} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$

Há vários procedimentos para encontrar a fração geratriz de uma dízima periódica. Veja aqui um deles. Sendo $x = 2{,}4545\ldots$, fazemos:

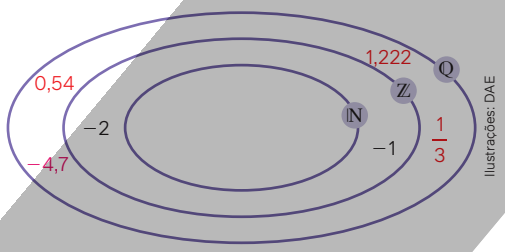
$$100x = 245{,}4545$$

$$100x - x = 245{,}4545\ldots - 2{,}45455\ldots = 243$$

$$99x = 243$$

$$x = \frac{243}{99} = \frac{27}{11}$$

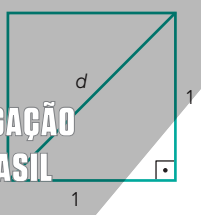
Lembre-se de que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. No diagrama de Euler, com alguns exemplos de elementos, tem-se:



Ilustrações: DAE

Conjunto dos números reais

Os números racionais também não são suficientes para todas as situações. Ao calcular o comprimento da diagonal do quadrado de lado 1 aplicando o Teorema de Pitágoras, chega-se ao seguinte resultado:



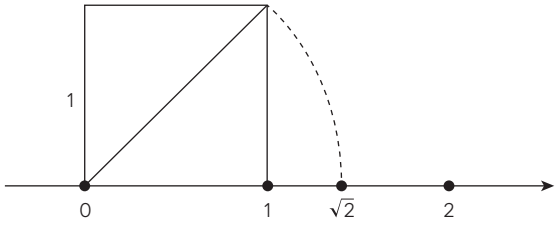
MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

$$d = \sqrt{2}$$

Mas $\sqrt{2}$ não é um número racional, pois sua representação decimal tem infinitas casas depois da vírgula sem uma sequência de algarismos que se repete, isto é, sem um período. Assim, $\sqrt{2}$ não pode ser escrita na forma de uma fração cujos numerador e denominador sejam números inteiros e o denominador diferente de zero.

Na figura a seguir, observe como podemos localizar na reta numérica o número irracional $\sqrt{2}$.



Tarcísio Garbellini

Observe que esse número irracional está situado entre os inteiros 1 e 2, isto é: $1 < \sqrt{2} < 2$. Assim como o $\sqrt{2}$, temos infinitos outros números irracionais, tais como: $-\sqrt{2}$, π, $-\pi$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ etc.

O conjunto dos números reais é a união do conjunto dos números racionais e do conjunto dos números irracionais.

Ao representar por $\mathbb{I}$ o conjunto dos números irracionais, temos as seguintes relações de inclusão entre os conjuntos numéricos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

e

$$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$$

Essas relações podem ser resumidas da seguinte maneira:

- todo número que é racional é também real;
- todo número que é irracional é também real;
- um número real é racional ou irracional.

Ao representarmos na reta todos os números reais, a reta fica completa, isto é, todo ponto da reta corresponde a um número real e todo número real corresponde a um ponto da reta.

Podemos considerar, portanto, que segmentos da reta numérica representam subconjuntos dos números reais. Esses subconjuntos contínuos são chamados de intervalos reais.

Intervalos reais

Quando consideramos dois números reais distintos quaisquer da reta numérica, entre eles existem infinitos outros números reais. Daí a necessidade de representarmos, por meio de intervalos, tais números. Observe os exemplos.

Exemplo 1

Vamos representar na reta numérica todos os números reais de -2 a 4.

Como os extremos fazem parte do intervalo, representamos por "bola fechada" na reta numérica acima. Tal intervalo é dito "fechado à esquerda e fechado à direita". Outras duas maneiras de representarmos são:

- utilizando colchetes: $[-2; 4]$;
- notação de conjuntos: $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 4\}$.

Observação:

Caso desejássemos excluir os extremos, colocaríamos "bola aberta" na reta para a indicação dos extremos do intervalo, isto é,

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Outras possíveis representações desse intervalo real são:

- utilizando colchetes: $]-2 ; 4[$;
- utilizando parênteses: $(-2; 4)$;
- notação de conjuntos: $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4\}$.

Exemplo 2

Vamos representar na reta numérica todos os números reais de -2 a 4, porém, vamos excluir o número 4.

Tal intervalo é dito "fechado à esquerda e aberto à direita". Outras duas maneiras de representarmos são:

- utilizando colchetes: $[-2 ; 4 [$;
- utilizando colchetes e parênteses: $[-2; 4)$;
- notação de conjuntos: $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < 4\}$.

Poderíamos ter o intervalo aberto à esquerda (excluindo o -2) e fechado à direita (incluindo o 4), cujos modos de representação seriam feitos em analogia a esse exemplo.

Exemplo 3

Vamos representar na reta numérica todos os números reais que são maiores ou iguais a zero.

Tal intervalo é dito "fechado à esquerda". Como na reta à direita do zero qualquer número real está no intervalo, dizemos que à direita dele "vai ao infinito". Representamos esse intervalo das seguintes maneiras:

- utilizando colchetes: $[0; +\infty[$;
- utilizando colchetes e parênteses: $[0; +\infty)$;
- notação de conjuntos: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$.

O símbolo infinito nessas notações é sempre utilizado como representação de intervalo aberto.

Exemplo 4

Vamos representar na reta numérica todos os números reais que são menores que 3.

Tal intervalo é dito "aberto à direita". Como na reta à esquerda do 3 qualquer número real está no intervalo, dizemos que à esquerda dele "vai ao menos infinito". Representamos esse intervalo das seguintes maneiras:

- utilizando colchetes: $]-\infty; 3[$;
- utilizando parênteses: $(-\infty; 3)$;
- notação de conjuntos: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$.

As notações de intervalos reais exemplificadas aqui são convenções para representar os infinitos números reais de parte da reta real. Recomendamos que a notação utilizando parênteses seja evitada pela inconveniência de também poder estar associada à representação de pares ordenados de um plano cartesiano.

Exemplo 5

Podemos também representar subconjuntos dos reais que não sejam intervalos, como subconjuntos dos conjuntos dos números naturais, inteiros ou racionais.

- $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\} = \{4, 5, 6, 7, ...\}$
- $\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leqslant 1\} = \{-1, 0, 1\}$
- $\left\{x \in \mathbb{Q} \mid x > \frac{1}{3}\right\}$ (não há forma simples de enumerar esse conjunto)
- $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ é múltiplo de $7\} = \{0, 7, 14, 21, ...\}$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Observação

Outra forma de escrever os múltiplos naturais de 7 (ou de qualquer outro número) é utilizando uma segunda variável:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x = 7n, n \in \mathbb{N}\} = \{0, 7, 14, 21, ...\}$$

Conhecer os conjuntos numéricos e as formas de representar intervalos e subconjuntos é essencial para modelar situações contextualizadas, resolver equações, estudar funções, representar corretamente hipóteses e resultados, interpretar medidas, entre inúmeras aplicações matemáticas.

A linguagem das funções

Para introduzir a ideia de função, vamos começar com uma noção intuitiva de um contexto do cotidiano.

Imagine que Camila seja uma bailarina e receba um salário mensal composto de um valor fixo de R$ 1.400,00 acrescido de R$ 500,00 por cada espetáculo de dança do qual participa em um mês. A tabela abaixo mostra alguns exemplos de valores possíveis para o salário de Camila, calculados de acordo com o número de espetáculos de que participa no mês.

Número de espetáculos	0	1	2	3	4
Salário (em reais)	$1400 + 0 \cdot 500 = 1400$	$1400 + 1 \cdot 500 = 1900$	$1400 + 2 \cdot 500 = 2400$	$1400 + 3 \cdot 500 = 2900$	$1400 + 4 \cdot 500 = 3400$

Observe que o salário depende do número de espetáculos e que, chamando-se de S o salário, em reais, e de x o número de espetáculos dos quais Camila participa no mês, podemos representar a relação entre eles pela expressão algébrica $S = 1400 + 500x$.

Quando temos, conforme exemplo, duas grandezas relacionadas em que uma delas depende da outra, estamos diante do conceito de função.

Reconhecimento de uma função

Dados dois conjuntos, A e B, uma relação $\mathcal{R}$ de A em B (denota-se $\mathcal{R}: A \to B$) é um conjunto de pares ordenados (x, y) em que x é um elemento do conjunto A e y é um elemento do conjunto B. Em notação simbólica,

$$\mathcal{R} = \{(x; y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\} \text{ é uma relação do conjunto } A \text{ no conjunto } B.$$

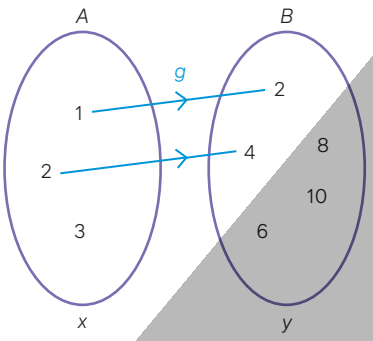
Duas condições devem ser satisfeitas para que uma relação seja uma função:

- todos os elementos x do conjunto A devem pertencer a algum par ordenado;
- cada um dos elementos x do conjunto A só pode pertencer a um único par ordenado.

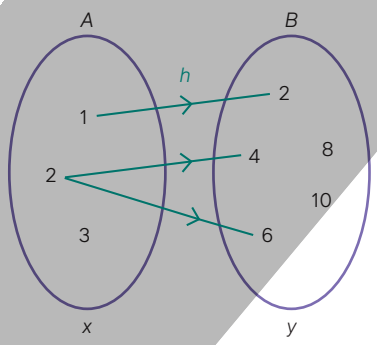
Exemplos

Considere os conjuntos $A = \{1; 2; 3\}$ e $B = \{2; 4; 6; 8; 10\}$ e as seguintes relações de A em B, ilustradas nos diagramas a seguir.

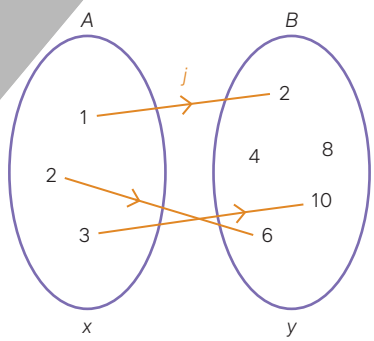
$g = \{(1; 2), (2; 4)\}$



$h = \{(1; 2), (2; 4); (2; 6)\}$



$j = \{(1; 2), (2; 6), (3; 10)\}$



Ilustrações: DAE

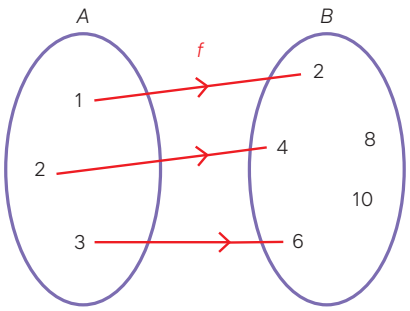
Verificando-se as condições apresentadas, conclui-se que:

- g **não é uma função** de A em B, pois o elemento $x = 3$, do conjunto A, não aparece em nenhum par ordenado da relação, isto é, existe um elemento em A que não se relaciona a nenhum elemento de B;
- h **não é uma função** de A em B, pois o elemento $x = 2$, do conjunto A, aparece em dois pares ordenados diferentes, isto é, um mesmo elemento de A relaciona-se a dois elementos distintos de B;
- j **é uma função** de A em B, pois todos os elementos de A aparecem em algum par ordenado e cada um deles aparece em um único par ordenado, isto é, todos os elementos do conjunto A estão relacionados a elementos de B e cada elemento de A está relacionado a um único elemento de B.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Elementos de uma função

Seja a função $f = \{(1; 2), (2; 4), (3; 6)\}$, de $A = \{1; 2; 3\}$ em $B = \{2; 4; 6; 8; 10\}$, ilustrada no diagrama a seguir.



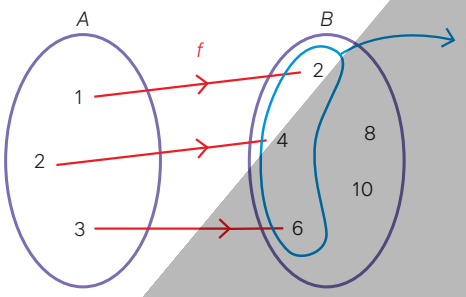
$f: A \to B$

Vejamos algumas denominações associadas a essa função.

Domínio, contradomínio e imagem

O conjunto A é denominado **domínio** da função f, B é o **contradomínio** da função f e o conjunto {2, 4, 6}, formado apenas pelos elementos de B que se relacionam a elementos de A, é denominado **imagem** da função f.

Chamamos de variável independente aquela que representa os valores do domínio da função. A variável que representa os valores da imagem é chamada de variável dependente, pois seu valor depende do valor considerado no domínio.



$D = \{1; 2; 3\}$

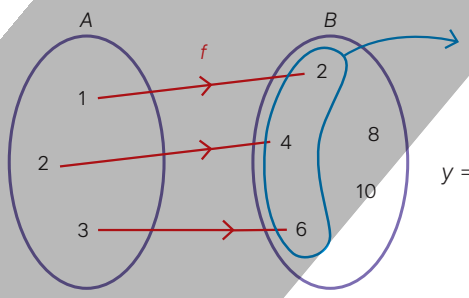
$CD = \{2; 4; 6; 8; 10\}$

$Im = \{2; 4; 6\}$

Lei de formação de uma função

Como nessa função cada elemento do domínio é relacionado a um elemento do contradomínio que é igual a seu dobro, podemos escrever uma expressão para representar algebricamente a relação entre os dois conjuntos, no caso $y = 2x$. Essa expressão é denominada **lei de formação** da função.

Note que y é a variável dependente e é escrita em função de x, que é a variável independente.



$y = 2x$ ou $f(x) = 2x$

Ilustrações: DAE

Cálculo de imagem numa função

O valor da função para determinado elemento x do domínio da função é o elemento y do conjunto-imagem da função, relacionado a ele. Em outras palavras, cada elemento y do conjunto-imagem da função é o **valor da função** para algum elemento x do domínio. Em relação à função f pode-se dizer, genericamente, que

$$y = f(x)$$

Conhecendo-se a lei de formação da função, é possível calcular o valor da função correspondente a determinado elemento do domínio. Para isso, basta substituir o x da expressão por esse elemento. No caso, como $y = 2x$, ou seja, como $f(x) = 2x$:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

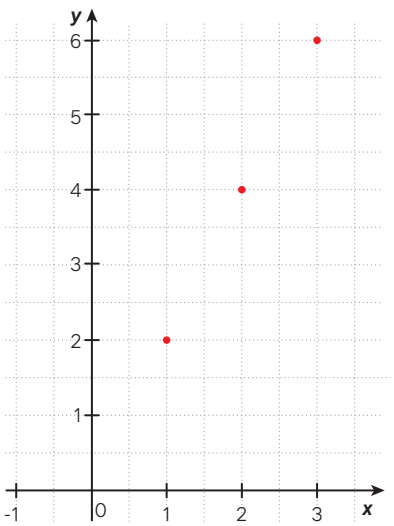
- $f(1) = 2 \cdot 1 = 2$
- $f(2) = 2 \cdot 2 = 4$
- $f(3) = 2 \cdot 3 = 6$

Note que, se um ponto $A\ (x_A, y_A)$ pertence a uma função, então $f(x_A) = y_A$.

Gráfico de uma função

Define-se **gráfico** de uma função como a representação geométrica, no plano cartesiano, de todos os pares ordenados da função. No exemplo, o gráfico da função f é o da figura a seguir.

x	y
1	2
2	4
3	6



Tarcísio Garbellini

No plano cartesiano, o eixo horizontal é chamado de eixo das abscissas. Nele marcamos os valores da variável independente. O eixo vertical é chamado de eixo das ordenadas e nele marcamos os valores da variável dependente.

Observação:
Embora os pontos desse gráfico estejam alinhados, não podemos uni-los traçando uma reta. O motivo é que o domínio dessa função é discreto, ou seja, é um subconjunto dos números naturais. Se o domínio fosse todos os números reais entre 1 e 3, então o gráfico seria o segmento de reta que une os pontos vermelhos e forma uma linha contínua.

Zero de uma função

Zero de uma função é o valor de x para o qual $y = 0$, ou seja, valor que anula a função. Graficamente, o zero de uma função corresponde à abscissa do ponto em que o gráfico intersecta o eixo das abscissas.

Algumas classificações de funções

Há algumas formas de classificar funções. Veja a seguir duas delas.

Quanto ao crescimento de uma função

Uma função é **crescente** se, ao aumentarmos os valores da variável independente, os valores da variável dependente também aumentarem. Simbolicamente:

Dada uma função f: $A \to B$ com m, n pertencentes a A, temos:

$$\text{Se } m > n, \text{ então } f(m) > f(n).$$

Analogamente, dizemos que uma função é **decrescente** quando os valores da variável dependente diminuem sempre que os valores da variável dependente aumentam. Simbolicamente:

Dada uma função f: $A \to B$ com m, n pertencentes a A, temos:

$$\text{Se } m > n, \text{ então } f(m) < f(n).$$

Quando uma função é somente crescente ou somente decrescente em todo seu domínio, dizemos que ela é **monótona**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Bijeção

Dizemos que uma função é **injetora** quando cada valor da variável dependente provém de um único valor da variável independente. Em outras palavras, quando nenhum valor do conjunto-imagem se relaciona com mais de um valor do domínio. Simbolicamente:

Dada uma função f: $A \to B$ com m, n pertencentes a A, dizemos que f é injetora se:

$$f(m) = f(n) \text{ implica } m = n.$$

Dizemos que uma função é **sobrejetora** quando todos os valores da variável dependente se relacionam com algum valor da variável independente. Em outras palavras, quando todos os valores do contradomínio pertencem ao conjunto-imagem. Simbolicamente:

Dada uma função f: $A \to B$, dizemos que f é sobrejetora se, para todo y pertencente a B, existe algum x pertencente a A tal que $y = f(x)$.

Quando uma função é simultaneamente sobrejetora e injetora, dizemos que ela é **bijetora**. Funções bijetoras são inversíveis. Quando uma função é bijetora, todo elemento da imagem está relacionado a um único elemento do domínio. Dessa forma, é sempre possível escrever uma nova função invertendo-se o domínio e a imagem da função original.

Fundamentos de Geometria Plana

A Geometria Plana que estudamos é uma ciência **axiomática**. Isso significa que ela é construída com base em axiomas, ou seja, afirmações consideradas verdadeiras, sem necessidade de demonstração. Uma vez estabelecidos os axiomas, estes são utilizados para explicar e deduzir propriedades e teoremas.

Os elementos primitivos da Geometria Plana são: o ponto, a reta e o plano. Com base neles definem-se todos os outros. Vamos ver alguns.

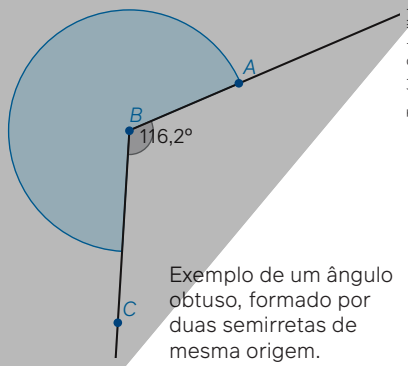
Ângulos

Quando duas semirretas têm uma mesma origem, a região do plano entre elas determina um ângulo. O ponto de encontro das semirretas é o vértice do ângulo, e sua medida se relaciona com o giro que fazemos partindo de uma delas para atingir a outra.

Classificamos os ângulos de acordo com suas medidas: nulo (0°), agudo (menor que 90°), reto (90°), obtuso (entre 90° e 180°) e raso (180°).

Se um ângulo tem mais de 180°, as mesmas semirretas formarão também um ângulo menor que 180°, conforme imagem ao lado.

Vamos ver algumas particularidades dos ângulos.



Tarcísio Garbellini

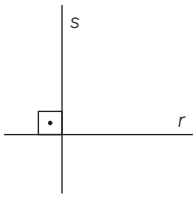
Exemplo de um ângulo obtuso, formado por duas semirretas de mesma origem.

Posições relativas entre retas

Paralelismo

Se duas retas estão contidas em um mesmo plano e não há ponto em comum entre elas, dizemos que essas retas são **paralelas**. Indicamos: $r \parallel s$.

Quando as retas têm um único ponto em comum, elas são chamadas de **concorrentes**.



DAE

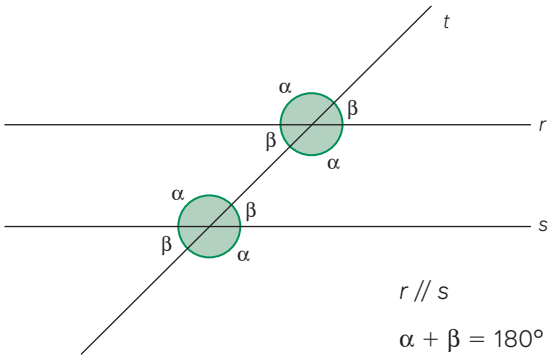
Perpendicularidade

Duas retas concorrentes que se cruzam formando quatro ângulos retos são denominadas retas **perpendiculares**. Indicamos: $r \perp s$.

Ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Uma reta transversal que corta duas retas paralelas determina oito ângulos tais que, considerando dois quaisquer entre eles, ou eles têm a mesma medida (neste caso os chamamos de congruentes) ou somam 180° (neste caso os chamamos de suplementares). Observe na figura ao lado que temos a reta t cortando as retas paralelas r e s.

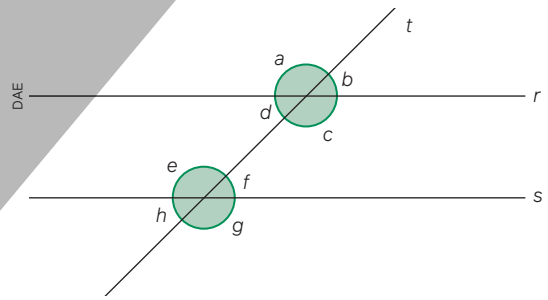


DAE

$r \parallel s$

$\alpha + \beta = 180°$

Dependendo de suas posições relativas, os ângulos são denominados: colaterais (internos ou externos), alternos (internos ou externos) ou correspondentes. Assim, os oito ângulos da figura podem ser indicados por:



DAE

correspondentes: *a* e *e*; *b* e *f*; *c* e *g*; *d* e *h*

alternos internos: *d* e *f*; *c* e *e*

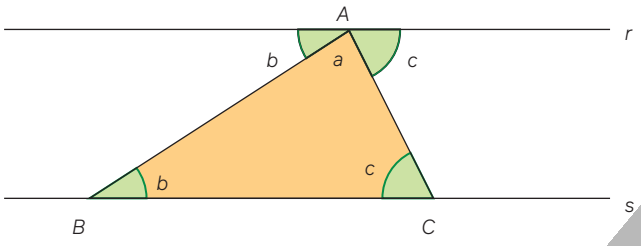
alternos externos: *a* e *g*; *b* e *h*

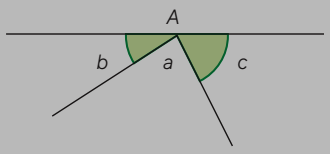
colaterais internos: *d* e *e*, *c* e *f*

colaterais externos: *a* e *h*; *b* e *g*

Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

Qualquer que seja o triângulo, a soma das medidas de seus ângulos internos vale 180°. Essa propriedade é facilmente demonstrada utilizando a ideia de que ângulos alternos internos são congruentes, conforme a ilustração a seguir.





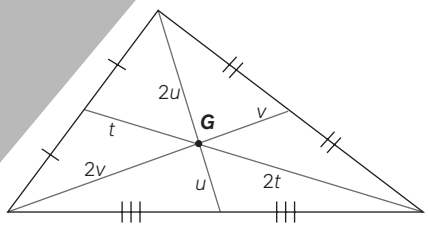
Dado o triângulo *ABC*, de ângulos internos medindo *a*, *b* e *c*, respectivamente, e traçando-se uma reta *r* paralela a um de seus lados ($\overline{BC}$), passando pelo vértice oposto (*A*), obtêm-se dois pares de ângulos alternos internos, que são, portanto, congruentes. Na ilustração acima e à direita, observa-se, no vértice *A*, um ângulo raso. Sendo assim:

$$a + b + c = 180°$$

Triângulos

Elementos em um triângulo

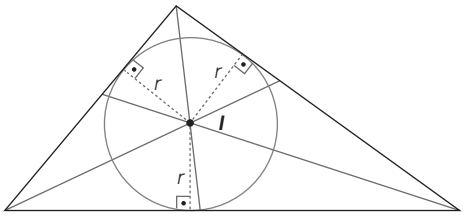
- Mediana de um triângulo: segmento que liga um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto. As três medianas de um triângulo concorrem num único ponto, denominado baricentro (*G*). O baricentro divide cada mediana na razão 2 : 1, ou seja, o segmento que liga *G* a um vértice é o dobro do segmento que liga G ao ponto médio do lado oposto.



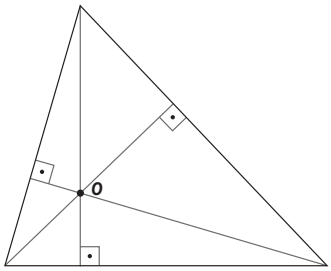
Ilustrações: Tarcísio Garbellini

- Bissetriz de um triângulo: segmento que divide um ângulo do triângulo ao meio, tendo extremidades em um vértice do triângulo e no lado oposto. As três bissetrizes de um triângulo concorrem em um único ponto, denominado incentro (*I*), que é centro da circunferência inscrita no triângulo.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

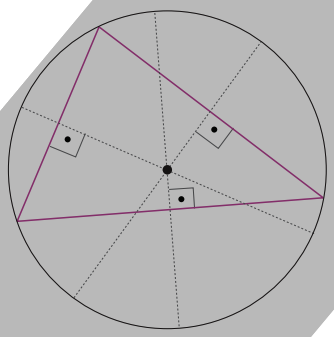


- Altura de um triângulo: segmento de reta que tem uma extremidade em um vértice do triângulo e a outra na reta suporte do lado oposto, sendo a ela perpendicular. As três alturas de um triângulo concorrem em um único ponto, denominado ortocentro (*O*).



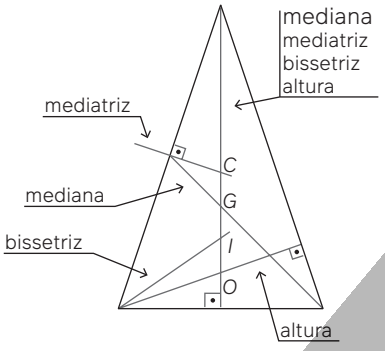
Observação: A mediana, a bissetriz e a altura são denominadas cevianas do triângulo, pois ligam vértices e os respectivos lados opostos.

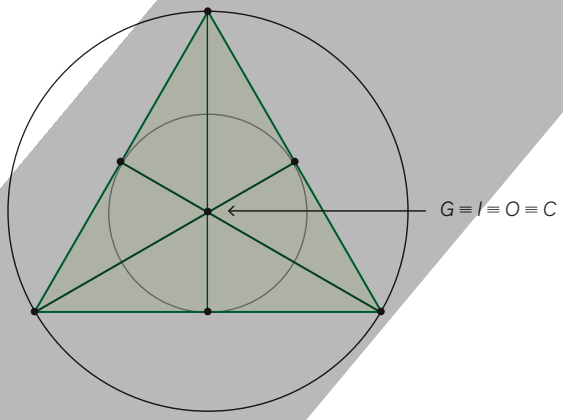
- Mediatriz de um lado de um triângulo: é a reta perpendicular a esse lado do triângulo que passa por seu ponto médio. As três mediatrizes de um triângulo concorrem num único ponto, denominado circuncentro (*C*), que é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.



Ilustrações: Tarcísio Garbellini

Observação: Num triângulo isósceles, a mediana, a bissetriz e a altura relativas à base são coincidentes e estão contidas na mediatriz relativa à base. No triângulo equilátero, isso acontece em relação a qualquer lado. Como consequência, no triângulo isósceles *G*, *I*, *O* e *C* são alinhados, e no triângulo equilátero esses pontos são coincidentes ($G \equiv I \equiv O \equiv C$).





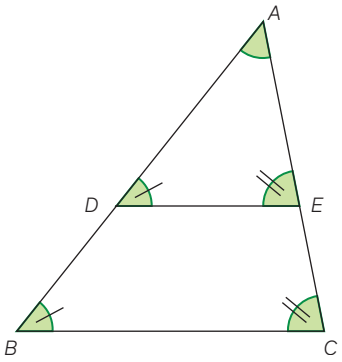
Semelhança de triângulos

Dois polígonos são semelhantes quando têm lados correspondentes com medidas proporcionais e ângulos correspondentes congruentes.

No caso específico de dois triângulos, sempre que seus ângulos correspondentes forem congruentes, seus lados terão medidas proporcionais, e vice-versa. Isso significa que, para que dois triângulos sejam semelhantes, basta que tenham ângulos correspondentes congruentes ou lados correspondentes com medidas proporcionais. A figura abaixo, em que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, ilustra um caso de semelhança entre triângulos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Como $\overline{DE}$ [illegible] $m(A\hat{E}D)$ e $m(A\hat{C}B) = m(A\hat{E}D)$. Além disso, $\hat{A}$ é um ângulo comum [illegible] ABC e ADE. Neste caso, os triângulos são semelhantes (escreve-se $\Delta ABC \sim \Delta ADE$) e pode-se dizer que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = k$, sendo k um número real positivo.

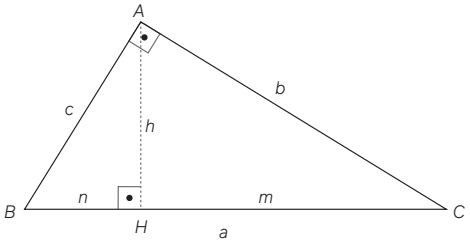


k é a razão de semelhança entre os triângulos.

Observação: Se dois triângulos são semelhantes e sua razão de semelhança é *k*, então a razão entre suas áreas é k^2.

Relações métricas no triângulo retângulo

Dado um triângulo retângulo qualquer, como o da figura ao lado, e traçando-se a altura relativa à sua hipotenusa, ficam determinados, na hipotenusa, dois segmentos que são denominados projeções dos catetos sobre a hipotenusa. As medidas *b* e *c*, dos catetos, a medida *a*, da hipotenusa, as medidas *m* e *n*, das projeções dos catetos sobre a hipotenusa, e a medida *h*, da altura relativa à hipotenusa, relacionam-se da seguinte forma:



$a^2 = b^2 + c^2$

$a \cdot h = b \cdot c$

$h^2 = m \cdot n$

$b^2 = m \cdot a$

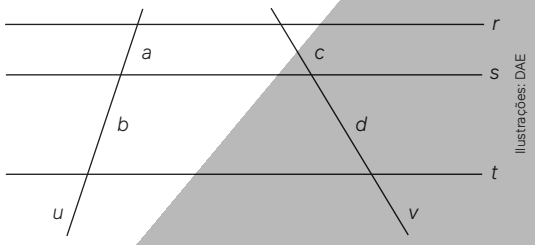
$c^2 = n \cdot a$

As demonstrações de todas essas relações podem ser feitas com base na semelhança dos três triângulos retângulos envolvidos: *ABC*, *ABH* e *ACH* (verifique a congruência de seus ângulos correspondentes!). Entre essas relações métricas a mais utilizada é o **teorema de Pitágoras**: $a^2 = b^2 + c^2$.

Teorema de Tales

Um feixe de retas paralelas (na figura, *r*, *s* e *t*) determina em duas transversais (*u* e *v*) segmentos cujas medidas são proporcionais. Assim, na figura, tem-se:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

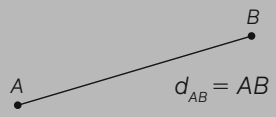


Ilustrações: DAE

Distâncias

Distância entre dois pontos

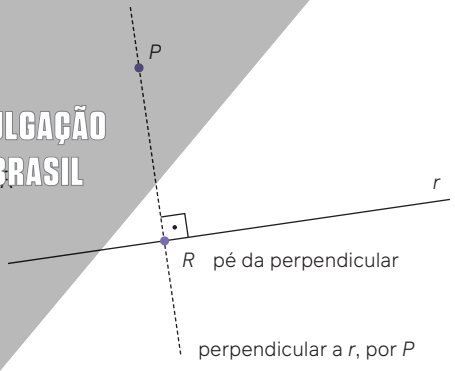
É o comprimento do segmento de reta que liga os dois pontos, como mostra a figura.



Distância entre um ponto e uma reta

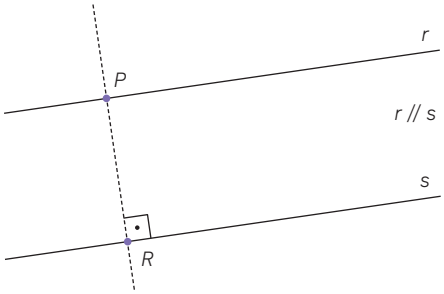
Dado um ponto *P* não pertencente a uma reta *r* também dada, traçamos uma perpendicular pelo ponto *P* à reta *r*: a distância entre *P* e *r* é a distância entre *P* e o pé da perpendicular em *r*, como mostra a figura.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL



Distância entre duas retas paralelas

É a distância de um ponto qualquer de uma das retas à outra reta, como mostra a figura.



$d_{rs} = d_{P,s} = PR$

$d_{rs} = d_{R,r} = PR$

GABARITO

Unidade 1

Páginas 38 a 41

Atividades finais

1. Foram investidos R$ 2.000,00 em B e R$ 3.000,00 em C.
$\alpha = 87°$; $\beta = 162°$ e $\gamma = 111°$

2. **a)** 3 kg
b) 42%

3. **a)** 50%
b) R$ 100,00 por litro.

4. **a)** 129,23%
b) 38,69% e 20,77%
c) 14,88%

5. e

6. c

7. c

8. e

9. d

10. b

11. e

12. b

13. b

Unidade 2

Páginas 84 e 85

Atividades finais

1. **a)** A razão deverá ser negativa.
b) O termo geral é $a_n = 4n - 1$.
c) Representa a razão da progressão aritmética.
d) $S_n = \frac{a_1 - a_n}{2} \cdot n$
e) Sim, a razão é 4.
f) Sim.
g) $x < 3$
h) Uma solução, nenhuma solução e infinitas soluções, respectivamente.
i) Infinitas.

2. d

3. c

4. e

5. a

6. b

7. b

8. c

9. d

10. c

11. b

12. c

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Unidade 3

Páginas 116 e 117

Atividades finais

1. **a)** PIB significa Produto Interno Bruto. Ele indica a soma de todos os bens e serviços produzidos por um país, estado ou cidade, geralmente por ano.
b) A renda *per capita*, de forma simplificada, é o resultado da divisão da renda nacional pelo número de habitantes. Renda *per capita* ou rendimento *per capita* é um indicador que auxilia na medição do grau de desenvolvimento econômico de um país ou de uma região.
c) Geralmente quando se deseja mostrar os dados em relação ao todo.
d) O gráfico de linhas é utilizado frequentemente para analisar o comportamento de um dado em relação ao tempo.
e) O fluxograma pode ser considerado um esquema para indicar de forma simples o funcionamento de um processo. É a representação, por meio de figuras, de um algoritmo.
f) Descreve as várias etapas para a execução de determinado problema.
g) INPC, IPCA.
h) O Índice de Desenvolvimento Humano, IDH, é um indicador utilizado para classificar os países em relação ao grau de desenvolvimento.

2. d

3. c

4. a

5. a

6. d

7. e

Competências gerais da BNCC

Competências gerais da Educação Básica
1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 9-10. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 19 jun. 2020.

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias	
1	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
EM13MAT101	Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias	
EM13MAT102	Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
EM13MAT103	Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
EM13MAT104	Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (Índice de Desenvolvimento Humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
EM13MAT105	Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
EM13MAT106	Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
2	Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
EM13MAT201	Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
EM13MAT202	Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
EM13MAT203	Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
3	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, para construir argumentação consistente.
EM13MAT301	Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT302	Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT303	Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
EM13MAT304	Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
EM13MAT305	Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
EM13MAT306	Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias	
EM13MAT307	Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT308	Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
EM13MAT309	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT310	Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
EM13MAT311	Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
EM13MAT312	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
EM13MAT313	Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
EM13MAT314	Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
EM13MAT315	Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
EM13MAT316	Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).
4	Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
EM13MAT401	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a [illegible] e geometria dinâmica.
EM13MAT402	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
EM13MAT403	Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
EM13MAT404	Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT405	Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
EM13MAT406	Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
EM13MAT407	Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias	
5	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.
EM13MAT501	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
EM13MAT502	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
EM13MAT503	Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT504	Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
EM13MAT505	Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
EM13MAT506	Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
EM13MAT507	Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
EM13MAT508	Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
EM13MAT509	Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.
EM13MAT510	Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
EM13MAT511	Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, [illegible] implicações no cálculo de probabilidades.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

[illegible] ção. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 531-546. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 19 jun. 2020.

Referências

ABDALA, Vitor. Safra de grãos fecha 2019 com recorde de 241,5 milhões de toneladas. *Agência Brasil*, Brasília, DF, 8 jan. 2020. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2020-01/safra-de-graos-fecha-2019-com-recorde-de-2415-milhoes-de-toneladas. Acesso em: 11 maio 2020.

A agropecuária é um tema disparador para diversos assuntos relacionados à Matemática e às Ciências Humanas. Por isso, é interessante trazer dados e conhecimentos dessa área para problematizar em sala de aula.

ARAÚJO, Fernanda. O que é Imposto de Renda e para que serve? *In*: SERASA ENSINA. São Paulo, [20--?]. Disponível em: https://www.serasaconsumidor.com.br/ensina/dicas/o-que-e-imposto-de-renda/. Acesso em: 23 maio 2020.

O texto explica o que é o Imposto de Renda, como ele é calculado e para que serve.

BRACARENSE, Paulo Afonso. *Estatística aplicada às Ciências Sociais*. Curitiba: IESDE Brasil, 2018. p. 142.

Cada vez mais indicadores estão se mostrando importantes para o investimento internacional e para as tomadas de decisões de um país. Esses conceitos estão muito presentes nas Ciências Humanas, porém a Matemática (em especial a Estatística) é de suma importância para o entendimento de alguns deles.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. Parecer nº 3, de 8 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, observadas as alterações introduzidas na LDB pela Lei nº 13.415/2017. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, p. 49, 21 nov. 2018.

Nesse documento, que altera o modelo único de currículo do Ensino Médio por uma nova organização flexível e diversificada, encontram-se detalhadas todas as orientações para a implementação do Novo Ensino Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018.

A BNCC é o documento que determina as competências, habilidades e aprendizagens essenciais que todas as crianças, adolescentes e jovens brasileiros devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Justiça e Segurança Pública. Fundação Nacional do Índio. *Modalidades de Terras Indígenas*. Brasília, DF: Funai, [20--]. Disponível em: http://www.funai.gov.br/index.php/indios-no-brasil/terras-indigenas. Acesso em: 11 maio 2020.

No texto são apresentadas as modalidades de Terras Indígenas, de acordo com a legislação vigente.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 1997. p. 292-293.

O trecho trata de um dos matemáticos mais importantes da história. Leonardo de Fibonacci fez descobertas fundamentais, além de ter uma história muito interessante para se trabalhar em sala de aula. Os conceitos atribuídos a ele, como a recorrência da proporção áurea na natureza, podem ser explorados com os estudantes, pois despertam curiosidade pela Matemática.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 519.

O trecho faz referência a um dos maiores prodígios da Matemática, Carl Gauss. Refere-se a um dos seus feitos mais conhecidos: a soma dos 100 primeiros números de uma maneira fácil de entender, mostrando que algumas conclusões matemáticas são mais triviais do que parecem.

FERREIRA, Jamil. *A construção dos números*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

Começando com o conjunto dos números naturais até o conjunto dos números complexos, o livro aborda a construção rigorosa dos conjuntos numéricos estudados desde o Ensino Fundamental ao Ensino Médio, e as propriedades de cada um.

GAMBA, Sabine Righetti Estêvão. Cientistas publicam um novo estudo sobre coronavírus a cada três horas; China lidera. *Folha de S.Paulo*, São Paulo, 1 abr. 2020. Disponível em: https://www1.folha.uol.com.br/equilibrioesaude/2020/04/cientistas-publicam-um-novo-estudo-sobre-coronavirus-a-cada-tres-horas-china-lidera.shtml. Acesso em: 11 maio 2020.

A reportagem traz um relato atual sobre o coronavírus e o desenvolvimento científico. Uma das reflexões sobre o tema é a democratização do discurso científico, o que ajuda os estudantes a se aproximarem do assunto.

IBGE. Desigualdades sociais por cor ou raça no Brasil. *Estudos e pesquisas*. Rio de Janeiro: IBGE, n. 41, p. 1, 2019. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101681_informativo.pdf. Acesso em: 13 jul. 2020.

Por meio do texto e do infográfico, é apresentada a situação de desigualdade em que se encontram a população negra e parda do Brasil.

ILHÉU, Thaís. Pela primeira vez, negros são maioria nas universidades públicas. *Guia do Estudante*, [São Paulo], 14 nov. 2019. Disponível em: https://guiadoestudante.abril.com.br/universidades/pela-primeira-vez-negros-sao-maioria-nas-universidades-publicas/. Acesso em: 23 maio 2020.

O texto traz dados sobre os resultados alcançados pela política de cota nas universidades, mostrando os ganhos da população negra,

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

segmento associado às piores condições na sociedade brasileira.

LIMA, Elon Lages *et al. A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 1997. v. 1.
Aborda os conjuntos numéricos e as funções. As demonstrações são apresentadas com rigor e criatividade, o que favorece uma aprendizagem significativa.

LIMA, Elon Lages *et al. A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 1998. v. 2.
A primeira parte dessa obra aborda progressões aritméticas e geométricas com aplicações na Matemática Financeira, análise combinatória e probabilidade.

LIMA, Elon Lages. *Números e funções reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
Esse volume faz parte da coleção Profmat, produzida pela Sociedade Brasileira de Matemática para fomentar, em âmbito nacional, seu programa de Mestrado Profissional em Matemática. O foco é o desenvolvimento das funções de uma variável estudadas sem uso de cálculo infinitesimal. Aborda noções de conjuntos, a ideia geral de função, os diferentes conjuntos numéricos e, por fim, as diferentes classes de funções.

MARTINS, Elaine Quem foi Ada Lovelace? *In*: PARANÁ. Secretaria da Educação. Curitiba: SEED-PR, 17 jan. 2019. Disponível em: http://www.filosofia.seed.pr.gov.br/modules/noticias/article.php?storyid=703&tit=Quem-foi-Ada-Lovelace. Acesso em: 26 jun. 2020.
Esse texto lança um olhar sobre as mulheres na ciência e como muitas vezes, por mera estereotipação, elas são afastadas de uma área na qual foram muito importantes e pioneiras.

MILIES, César P.; COELHO, Sônia P. *Números*: uma introdução à Matemática. São Paulo: Edusp, 2006.
Citando os p[illegible] uma tomada de posição quanto à forma em que acreditamos que a matemática deva ser apresentada; um curso não deve se limitar a transmitir apenas o conteúdo técnico, deve preocupar-se também com a formação do estudante". Assim, o conteúdo do livro foi desenvolvido com base nas anotações de aula do curso de Álgebra Linear ministrado pelos professores-autores. Os conceitos são sempre contextualizados por referências históricas e exemplificados com aplicações e exercícios resolvidos.

MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila Cristina. *Progressões e Matemática Financeira*. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
A Matemática Financeira e os conceitos de progressões aritméticas e geométricas são explicados por meio de situações cotidianas. O apêndice do livro traz um passo a passo sobre o uso de planilhas eletrônicas e calculadoras financeiras para calcular progressões e taxas de juros.

OLIVEN, Arabela Campos. Ações afirmativas, relações raciais e política de cotas nas universidades: uma comparação entre os Estados Unidos e o Brasil. *Revista Educação*, Porto Alegre: PUC-RS, v. 30, n. 61, p. 30, jan./mar. 2007. Disponível em: https://www.redalyc.org/pdf/848/84806103.pdf. Acesso em: 23 maio 2020.
O texto serve de introdução para o assunto das cotas raciais nas universidades definindo o significado de ações afirmativas.

PIB: entenda o que é e como é calculado. *In*: FINANCE ONE. [*S. l.*], 11 mar. 2020. Disponível em: https://financeone.com.br/pib-o-que-e-e-como-e-calculado/. Acesso em: 22 maio 2020.
No texto é apresentado o significado do PIB (Produto Interno Bruto) e como ele é calculado.

POPULAÇÃO indígena no Brasil. *In*: MUNDO EDUCAÇÃO. São Paulo, c2020. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/geografia/a-populacao-indigena-no-brasil.htm. Acesso em: 11 maio 2020.
Neste *site* são encontrados dados e informações sobre os povos indígenas no Brasil.

RIBEIRO, Leila; FOSS, Luciana; CAVALHEIRO, Simone. Entendendo o pensamento computacional. *In*: CORNELL UNIVERSITY. Ithaca: Cornell University, 2017. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1707.00338.pdf. Acesso em: 22 maio 2020.
O texto apresentado introduz o estudante ao pensamento computacional e ao objetivo da computação.

ROQUE, Tatiana. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
Visando acabar com o mito de que a Matemática é só teoria e abstração, acessível apenas aos gênios, a autora apresenta uma visão crítica de como a história da Matemática vem sendo contada. Ao abordar o desenvolvimento dos sistemas matemáticos ao longo do tempo, traz diferentes soluções para problemas semelhantes.

VIEIRA, Bárbara M. SP registra em março mais de 90% do volume de chuva esperado para o mês, diz Prefeitura. *G1*, São Paulo, 11 mar. 2019. Disponível em: https://g1.globo.com/sp/sao-paulo/noticia/2019/03/11/choveu-em-uma-noite-80-esperado-para-o-mes-diz-prefeito-em-exercicio-de-sp-eduardo-tuma.ghtml. Acesso em: 22 maio 2020.
O texto introduz o conceito de grandezas diretamente proporcionais trazendo os dados sobre o volume de chuvas esperado para março e o volume de chuva registrado nos dez primeiros dias do mês.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Referências complementares

CARZOLA, Irene *et al*. (org). *Estatística para os anos iniciais do Ensino Fundamental*. Brasília, DF: SBEM, 2017. v. 9. *E-book*. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/ebook_sbem.pdf. Acesso em: 25 maio 2020.

Apesar de o título referir-se aos anos iniciais, o livro faz um panorama geral do assunto, com exemplos de uma pesquisa estatística envolvendo um ciclo investigativo que serve de base para os estudos de qualquer público: da Educação Básica à universidade. São discutidas as fases da investigação científica por meio do estudo de instrumentos de coleta de dados, variáveis quantitativas e qualitativas, tipos de gráficos, tabelas, média, mediana, amplitude, interpretação de dados e conclusões.

CURSOS. *In*: FUNDAÇÃO BRADESCO: ESCOLA VIRTUAL. [Osasco], [201-?]. Disponível em: https://www.ev.org.br/cursos. Acesso em: 3 jun. 2020.

São oferecidos gratuitamente vários cursos nas áreas de Administração, Contabilidade e finanças, Desenvolvimento pessoal e profissional e Informática.

DICAS DE PROGRAMAÇÃO. [*S. l.*: s. *n.*], c2018. Disponível em: https://dicasdeprogramacao.com.br/. Acesso em: 3 jun. 2020.

Esse *blog* apresenta várias dicas de programação e desenvolvimento de *softwares*.

FUNDAMENTOS de lógica de programação. *In*: FUNDAÇÃO BRADESCO: ESCOLA VIRTUAL. [Osasco], [201-?]. Disponível em: https://www.ev.org.br/curso/informatica/desenvolvimento-de-sistemas/fundamentos-de-logica-de-programacao?cst=495. Acesso em: 25 maio 2020.

Curso gratuito de 15 horas sobre os fundamentos básicos da lógica de programação e as principais técnicas para o desenvolvimento de algoritmos.

PROGRAMAÊ. [*S. l.*: s. *n.*], [201-?]. Disponível em: http://programae.org.br/. Acesso em: 3 jun. 2020.

O *site* da iniciativa Programaê tem o objetivo de facilitar a introdução da linguagem de programação e do pensamento computacional nas práticas pedagógicas.

SCRATCH. Estados Unidos, [200-?]. Disponível em: https://scratch.mit.edu/. Acesso em: 3 jun. 2020.

Scratch é um projeto do Lifelong Kindergarten Group do MIT Media Lab, que visa ajudar os jovens a pensar e trabalhar de forma criativa e colaborativa.

TIPOS de gráficos. *In*: EDUCA MAIS BRASIL. [*S. l.*], c2020. Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/tipos-de-graficos. Acesso em: 5 maio. 2020.

Nessa página são apresentados os tipos de gráfico e seus principais componentes.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

ISBN 978-85-10-08357-7