LUCIANA MARIA TENUTA DE FREITAS (COORDENAÇÃO)
ADILSON LONGEN
RODRIGO MOROZETTI BLANCO

PNLD 2021 • OBJETO 2
CÓDIGO DA COLEÇÃO
0149P21202
CÓDIGO DO LIVRO
0149P21202135

ENTER AÇÃO

MATEMÁTICA

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO • VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO

A MATEMÁTICA FINANCEIRA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR MEIO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

ENSINO MÉDIO
Matemática e suas Tecnologias

Editora do Brasil

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

ENTRE AÇÃO

MANUAL DO PROFESSOR

MATEMÁTICA

A MATEMÁTICA FINANCEIRA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR MEIO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Luciana Maria Tenuta de Freitas (Coordenação)

Mestre em Ensino de Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC-Minas)

Bacharel e licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Assessora pedagógica da Educação Básica, com atuação na formação de professores

Adilson Longen

Doutor em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Mestre em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Professor do Ensino Médio

Rodrigo Morozetti Blanco

Mestre em Matemática com linha de pesquisa em Filosofia da Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat)

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP)

Professor da Educação Básica com atuação na formação de professores

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Ensino Médio

1ª edição
São Paulo, 2020

Editora do Brasil

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Longen, Adilson
Interação matemática : a matemática financeira e a resolução de problemas por meio das funções exponencial e logarítmica / Adilson Longen, Rodrigo Morozetti Blanco ; coordenação Luciana Maria Tenuta de Freitas. -- 1. ed. -- São Paulo : Editora do Brasil, 2020. -- (Interação)

ISBN 978-85-10-08360-7 (aluno)
ISBN 978-85-10-08361-4 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) 2. Matemática e suas tecnologias (Ensino médio) I. Blanco, Rodrigo Morozetti. II. Freitas, Luciana Maria Tenuta de. III. Título IV. Série.

20-38726 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Maria Alice Ferreira - Bibliotecária - CRB-8/7964

© Editora do Brasil S.A., 2020
Todos os direitos reservados

Direção-geral: Vicente Tortamano Avanso
Direção editorial: Felipe Ramos Poletti
Gerência editorial: Erika Caldin
Supervisão de arte: Andrea Melo
Supervisão de editoração: Abdonildo José de Lima Santos
Supervisão de revisão: Dora Helena Feres
Supervisão de iconografia: Léo Burgos
Supervisão de digital: Ethel Shuña Queiroz
Supervisão de controle de processos editoriais: Roseli Said
Supervisão de direitos autorais: Marilisa Bertolone Mendes

Supervisão editorial: Rodrigo Pessota
Consultoria técnico-pedagógica: Airton Temistocles Gonçalves de Castro e Eduardo Wagner
Edição: Adriana Soares Netto, Daniel Leme, Everton José Luciano, Katia Simões de Queiroz e Marcos Gasparetto
Assistência editorial: Juliana Bomjardim, Viviane Ribeiro e Wagner Razvickas
Especialista em revisão e copidesque: Elaine Silva
Copidesque: Gis[illegible] Beletti
Revisão: Amanda Cabral, Andréia Andrade, Fernanda Almeida, Fernanda Sanchez, Flávia Gonçalves, Gabriel Ornelas, Jor[illegible] Martin Gonçalves e Rosani Andreani
Pesquisa iconográfica: Elena Molinari
Assistência de arte: Daniel Souza
***Design* gráfico:** Talita Lima
Capa: Megalo Design
Imagem de capa: akinbostanci/iStockphoto.com, ilkercelik/iStockphoto.com, loveguli/iStockphoto.com, malerapaso/iStockphoto.com, marchmeena29/iStockphoto.com, masterzphotois/iStockphoto.com e tylim/iStockphoto.com
Edição de arte: Paula Coelho e Talita Lima
Ilustrações: Mauro Salgado, Reinaldo Vignati e Tarcísio Garbellini
Editoração eletrônica: JS Design
Licenciamentos de textos: Cinthya Utiyama, Jennifer Xavier, Paula Harue Tozaki e Renata Garbellini
Controle de processos editoriais: Bruna Alves, Carlos Nunes, Rita Poliane, Terezinha de Fátima Oliveira e Valéria Alves

1ª edição, 2020

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Editora do Brasil

Rua Conselheiro Nébias, 887
São Paulo/SP – CEP 01203-001
Fone: +55 11 3226-0211
www.editoradobrasil.com.br

Caro professor

A implementação da proposta do Novo Ensino Médio é um desafio para professores e estudantes. Por meio desta coleção, pretendemos auxiliá-lo nessa importante jornada.

Para que as aprendizagens escolares capacitem os jovens a atuar, com competência e responsabilidade, na sociedade em que vivem, é importante que se apropriem da Matemática como uma das diversas formas de leitura da realidade e possam utilizá-la como ferramenta que os auxilie a intervir, de forma consciente e responsável, nessa realidade.

Com esse objetivo, apresentamos a você esta obra, que tem o estudante como centro do processo de aprendizagem, numa proposta interativa e aberta de ensino de Matemática. Os diversos tipos de atividades propiciam aos alunos a discussão de ideias, o desenvolvimento de hipóteses, a argumetação, a elaboração de problemas, o desenvolvimento de projetos, entre outros, enquanto desenvolvem as competências socioemocionais. Dessa forma, a sala de aula passa a ser um espaço vivo, em que ideias matemáticas são discutidas, confrontadas, validadas ou refutadas o tempo todo.

Cabe a você ser o organizador/mediador desse processo estimulando as discussões, promovendo debates, orientando as reformulações, valorizando as produções e o posicionamento dos estudantes, o que contribui para o desenvolvimento integral deles.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Este Manual foi elaborado visando orientá-lo nesse processo. Esperamos que você possa aproveitar nossas sugestões de forma criativa, desenvolvendo e ampliando o trabalho de acordo com suas possibilidades e com a realidade em que está inserido.

Os autores

SUMÁRIO

O NOVO ENSINO MÉDIO V

A BNCC E O NOVO ENSINO MÉDIO VI

A BNCC e o letramento matemático VII

ABORDAGEM TEÓRICO-METODOLÓGICA IX

O desenvolvimento de competências e habilidades IX

A resolução de problemas e a investigação matemática X

- O papel do erro XII
- O trabalho em grupo XII
- O pensamento computacional XIV

AVALIAÇÃO XIV

A CULTURA JUVENIL, A CONSTRUÇÃO DE UMA CONVIVÊNCIA DE PAZ E O PROJETO DE VIDA XVII

A cultura juvenil XVII

A construção de uma convivência de paz XVIII

O projeto de vida XXI

A ORGANIZAÇÃO DA OBRA XXIII

I. O Manual do Professor XXIII

II. O Livro do Estudante XXIII

1. A organização dos livros XXIII
   - 1.1 Quadro de conteúdos XXIV
2. A organização das unidades XXVII
   - 2.1 Os eixos XXVII
   - 2.2 As seções XXIX
   - 2.3 Outros recursos XXX
3. Conexões & projetos XXX

REFERÊNCIAS COMENTADAS XXXII

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS PARA ESTE VOLUME XXXVII

Objetivos XXXVII

Justificativas XXXVII

Conexões com outras áreas do conhecimento XXXVII

Temas Contemporâneos Transversais abordados no livro XXXVIII

Cronograma XXXVIII

Unidade 1 – Tópicos de Matemática Financeira XXXIX

Objetivos XXXIX

Justificativa XXXIX

Competências e habilidades da BNCC trabalhadas nesta unidade XXXIX

- Competências gerais XXXIX
- Competências específicas e habilidades de Matemática XL

Resoluções e comentários XL

Unidade 2 – Função exponencial e função logarítmica LXVIII

Objetivos LXVIII

Justificativa LXVIII

Competências e habilidades da BNCC trabalhadas nesta unidade LXVIII

- Competências gerais LXVIII
- Competências específicas e habilidades de Matemática LXIX

Resoluções e comentários LXIX

Unidade 3 – Sequências numéricas e progressão geométrica XCVI

Objetivos XCVI

Justificativa XCVI

Competências e habilidades da BNCC trabalhadas nesta unidade XCVI

- Competências gerais XCVI
- Competências específicas e habilidades de Matemática XCVI

Resoluções e comentários XCVII

Conexões & projetos CXVIII

Objetivos CXVIII

Justificativa CXVIII

Competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) CXVIII

- Competências gerais trabalhadas nos projetos CXVIII

Projeto 1 CXIX

Objetivo CXIX

- Competências específicas de Matemática: 1, 2, 3, 4 e 5 CXX

Orientações ao professor CXX

Projeto 2 CXXII

Objetivo CXXII

- Competências específicas de Matemática 1, 2, 3 e 5 CXXIII

Orientações ao professor CXXIII

ATIVIDADES COMPLEMENTARES CXXV

REFERÊNCIAS CXXVI

REFERÊNCIAS COMPLEMENTARES CXXVII

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

O NOVO ENSINO MÉDIO

As mudanças trazidas pelo Novo Ensino Médio visando a formação integral dos estudantes propõem que as aprendizagens escolares os capacitem para que ao final desta etapa de escolaridade estejam aptos a atuar, com competência e responsabilidade, na sociedade em que vivem.

Segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio:

> [...] formação integral: é o desenvolvimento intencional dos aspectos físicos, cognitivos e socioemocionais do estudante por meio de processos educativos significativos que promovam a autonomia, o comportamento cidadão e o protagonismo na construção de seu projeto de vida.

BRASIL. Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes [...]. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, n. 224, p. 21, 22 nov. 2018. Disponível em: http://www.in.gov.br/materia/-/asset_publisher/Kujrw0TZC2Mb/content/id/51281622. Acesso em: 1 ago. 2020.

No Novo Ensino Médio, os currículos são compostos por duas partes que se integram e se complementam: a **formação geral básica** e os **itinerários formativos**.

Na **formação geral básica** os currículos e as propostas pedagógicas devem garantir as aprendizagens essenciais definidas na BNCC, das quatro áreas de conhecimento: **Linguagens e suas Tecnologias**, **Matemática e suas Tecnologias**, **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, bem como desenvolver as competências gerais para a Educação Básica e as competências específicas e habilidades de cada área, definidas na BNCC, de modo integrado e articulado, considerando ainda o contexto histórico, econômico, social, ambiental, cultural local, do mundo do trabalho e da prática social.

Os **itinerários formativos** possibilitam aos estudantes fazer escolhas que irão compor seu currículo para aprofundar seus conhecimentos ou para se preparar para o mundo do trabalho. Quatro itinerários estão diretamente relacionados a cada área do conhecimento e um quinto itinerário é destinado à formação técnica e profissional.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Os itinerários são orientados por meio de quatro eixos estruturantes:

GoodStudio/Shutterstock.com

I – investigação científica: supõe o aprofundamento de conceitos fundantes das ciências para a interpretação de ideias, fenômenos e processos para serem utilizados em procedimentos de investigação voltados ao enfrentamento de situações cotidianas e demandas locais e coletivas, e a proposição de intervenções que considerem o desenvolvimento local e a melhoria da qualidade de vida da comunidade;

II – processos criativos: supõe o uso e o aprofundamento do conhecimento científico na construção e criação de experimentos, modelos, protótipos para a criação de processos ou produtos que atendam a demandas para a resolução de problemas identificados na sociedade;

III – mediação e intervenção sociocultural: supõem a mobilização de conhecimentos de uma ou mais áreas para mediar conflitos, promover entendimento e implementar soluções para questões e problemas identificados na comunidade;

IV – empreendedorismo: supõe a mobilização de conhecimentos de diferentes áreas para a formação de organizações com variadas missões voltadas ao desenvolvimento de produtos ou prestação de serviços inovadores com o uso das tecnologias.

BRASIL. Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes [...]. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, n. 224, p. 21, 22 nov. 2018. Disponível em: http://www.in.gov.br/materia/-/asset_publisher/Kujrw0TZC2Mb/content/id/51281622. Acesso em: 1 ago. 2020.

A BNCC E O NOVO ENSINO MÉDIO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) está estruturada com base em **dez competências gerais** que devem ser desenvolvidas pelos estudantes desde a Educação Infantil até o Ensino Médio.

Competências gerais

1. **Conhecimento**
Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. **Pensamento científico, crítico e criativo**
Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. **Repertório cultural**
Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4. **Comunicação**
Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. **Cultura digital**
Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6. **Trabalho e projeto de vida**
Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7. **Argumentação**
Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8. **Autoconhecimento e autocuidado**
Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9. **Empatia e colaboração**
Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

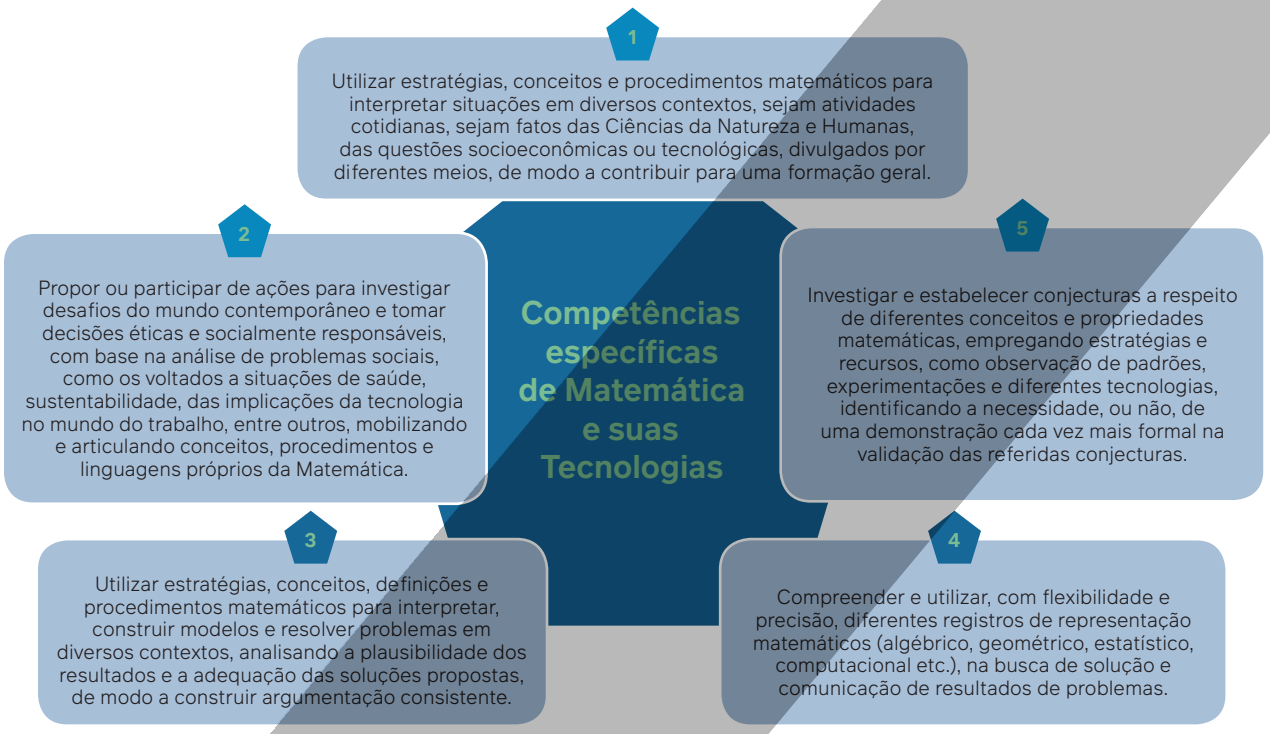
10. **Responsabilidade e cidadania**
Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

DAE

Fonte: BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 9. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 20 maio 2020.

As quatro áreas de conhecimento estabelecidas para o Ensino Médio estão definidas por meio de **competências específicas** que se articulam às competências gerais. No caso da área de **Matemática e suas Tecnologias** são cinco competências específicas, e cada uma delas se desdobra em um conjunto de habilidades que devem ser desenvolvidas ao longo dos três anos do Ensino Médio.



DAE

Fonte: BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 531. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 20 maio 2020.

Nesse novo contexto, a palavra-chave passa a ser **flexibilidade** e esta é a característica da coleção de Matemática que você tem em mãos. Esta obra foi escrita para atender à **formação geral básica** e atende às 10 competências gerais, às 5 competências específicas e às 43 habilidades [illegible] e suas Tecnologias.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

A BNCC e o letramento matemático

De acordo com o que propõe a BNCC, o desenvolvimento das habilidades e competências no Ensino Médio está articulado às "aprendizagens essenciais estabelecidas para o Ensino Fundamental" devendo consolidá-las, ampliá-las e aprofundá-las.

Para tanto devemos observar que:

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do **letramento matemático**, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição). (BRASIL, 2018, p. 266).

E ainda que:

> A área de Matemática, no **Ensino Fundamental**, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No **Ensino Médio**, na área de **Matemática e suas Tecnologias**, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade. (BRASIL, 2018, p. 471).

As mudanças proporcionadas pela BNCC ainda nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental são de grande importância para a compreensão da Matemática como uma disciplina muito mais ampla do que somente o trabalho com as operações básicas e o campo numérico.

Visando dar continuidade à proposta de desenvolvimento do letramento matemático do Ensino Fundamental, é essencial promover no Ensino Médio a consolidação, o aprofundamento e a ampliação do trabalho com as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, com foco na formulação e resolução de problemas em contextos variados, fazendo uso das ferramentas matemáticas e dos conhecimentos adquiridos previamente.

Temos ainda que:

> Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior. (BRASIL, 2018, p. 528).

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

O documento afirma ainda que:

> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos **processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas**. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2018, p. 529).

Assim, fica evidente o fato de que saber Matemática não se resume aos conteúdos específicos ou aos procedimentos de cálculo estudados, mas principalmente em compreender que o estudante letrado matematicamente é aquele que consegue argumentar claramente sobre determinada situação, defender seus pontos de vista, raciocinar sobre caminhos a serem escolhidos, priorizar questões a serem resolvidas, comunicar e ler com

propriedade as informações que lhe são apresentadas. A Matemática tecnicista, que perdurou na escola por muito tempo, hoje dá lugar à valorização do pensamento matemático e do raciocínio sobre os fatos, sejam eles relacionados ao cotidiano do estudante ou a descobertas que ampliarão seu repertório.

Ao se apresentar dessa forma, a BNCC estimula você, professor, e os estudantes a buscar maneiras diferentes de ensinar e aprender Matemática, promovendo o protagonismo, a troca de ideias e o compartilhamento de estratégias, além da autonomia dos estudantes para avançar em suas aprendizagens escolhendo estratégias próprias de resolução dos problemas que encontrarem.

Apresentamos a seguir a abordagem teórico-metodológica que fundamenta esta coleção e o modo que, por meio dela, a obra dialoga com a proposta da BNCC para o Ensino Médio.

ABORDAGEM TEÓRICO-METODOLÓGICA

A Matemática tem diferentes aplicações na vida das pessoas e estabelece relações com diversas áreas. É papel da escola mostrar essas relações, que podem ou não ser evidentes. Além disso, o trabalho com a Matemática deve levar os jovens a compreender a origem histórica de alguns conceitos, verificar suas aplicações nas Ciências da Natureza, no campo da Biologia, da Física e da Química; nas diferentes expressões da área de Linguagens, em especial na música, nas artes plásticas, nas artes cênicas e na dança; nas Ciências Humanas e Sociais, como nos estudos geográficos de escala ou topologia; enfim: perceber que a Matemática marca sua presença na vida das pessoas.

Constatar essa presença, fazer bom uso dela e aprender Matemática de maneira reflexiva, investigativa e valorizando os conhecimentos prévios é um caminho que auxilia o estudante, tanto dentro quanto fora da escola.

O desenvolvimento de competências e habilidades

Por meio do trabalho proposto nesta coleção pretendemos que os estudantes desenvolvam competências e habilidades de Matemática e suas Tecnologias, previstas na BNCC.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Porém, é de suma importância, compreender que:

> Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da ida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p. 8).

As competências gerais dizem respeito à formação integral dos estudantes e estão relacionadas tanto a seu desenvolvimento cognitivo quanto ao socioemocional.

Nesta obra, as competências gerais são desenvolvidas por meio dos diversos tipos de atividades propostos. A **competência geral 2**, por exemplo, que se refere ao exercício da curiosidade intelectual por meio da investigação, da análise crítica, da imaginação e da criatividade para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas, é trabalhada em vários momentos, uma vez que a resolução de problemas e a investigação matemática, que serão detalhadas a seguir, constituem o eixo condutor de todo o trabalho. Ao resolverem as atividades em grupos ou em duplas discutindo ideias, argumentando com

base em fatos e informações confiáveis e confrontando diferentes pontos de vista, os estudantes mobilizam a **competência geral 7**. Nesse processo desenvolvem também a **competência geral 4**, ao usarem diferentes formas de linguagem para se expressar. As atividades em grupos são ricas em oportunidades para mobilizar também a **competência geral 9**, que envolve o desenvolvimento de atitudes e valores como empatia e respeito, favorecendo o diálogo e uma convivência harmônica entre os jovens.

Na parte específica deste manual estão apontadas e exemplificadas as competências gerais trabalhadas em cada livro, unidade por unidade.

Já as habilidades se relacionam ao "saber fazer" e indicam o que os estudantes são capazes de aprender e a desenvolver. Elas são associadas a verbos como identificar, associar, analisar, investigar, argumentar, criar, entre outros. Também podem ser entendidas como objetivos de conhecimento, ou seja, aquilo que se espera do estudante e de seu desenvolvimento ao final do Ensino Médio.

Como apresentadas anteriormente, na área de Matemática e suas Tecnologias, as habilidades estão agrupadas nas 5 competências específicas indicadas na BNCC sem uma ordem preestabelecida, porque, diferentemente do Ensino Fundamental, seus códigos não indicam uma progressão, o que favorece a flexibilidade dos currículos e das propostas pedagógicas das escolas.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

De modo resumido, as habilidades que integram a competência específica 1 estão relacionadas aos contextos externos à Matemática. Na competência específica 2 estão as habilidades que se relacionam ao contexto social. A competência específica 3 envolve habilidades que se referem à resolução de problemas e à modelagem matemática, e na competência 4 estão agrupadas aquelas que dizem respeito a diferentes representações para um mesmo objeto matemático. Finalmente, na competência específica 5 encontram-se as habilidades que envolvem um tratamento mais formal da Matemática. Assim agrupadas, habilidades que se referem a um mesmo conteúdo são associadas a diferentes competências específicas. Esse é o caso, por exemplo, do estudo das probabilidades, que está ligado às competências específicas 1, 3 e 5 por meio das habilidades EM13MAT106, EM13MAT311, EM13MAT312 e EM13MAT511.

Na parte específica deste manual estão indicadas as habilidades trabalhadas em cada unidade com os respectivos exemplos.

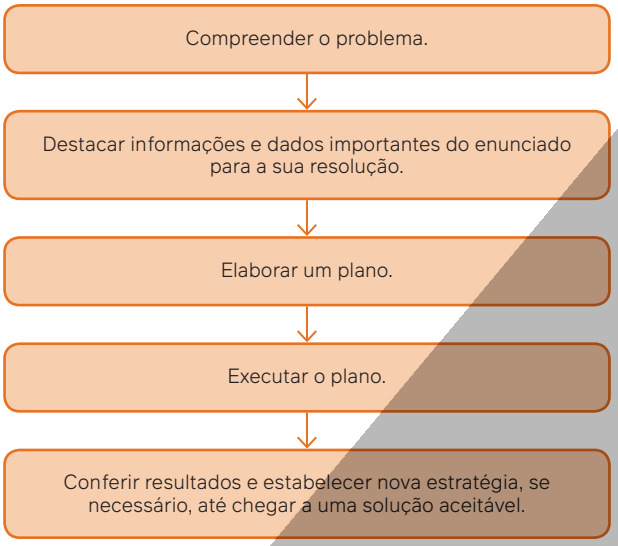
A resolução de problemas e a investigação matemática

Resolver problemas é uma prática diária, cotidiana e envolve os mais diversos tipos de situações. Para resolver um problema é necessário levantar hipóteses, discutir possibilidades, criar estratégias com base em conhecimentos prévios identificados visando atingir novos objetivos. Por mais simples que se configure, todo problema desafia quem o enfrenta fomentando o gosto pela descoberta de formas para resolvê-lo. Ao sentir-se desafiado, o estudante desprende um esforço cognitivo que lhe possibilita ir além. Junto com o trabalho de resolução de problemas, a investigação matemática estimula a busca por soluções criativas, inovadoras ou não, para situações que façam parte do cotidiano dos estudantes, dentro ou fora da escola.

Quando analisamos o trabalho em sala de aula sob o viés da resolução de problemas, entendemos que o desenvolvimento do pensamento matemático sempre parte de um problema e este é o meio pelo qual a Matemática será apreendida. Ao longo do processo histórico de constituição dos conceitos e conhecimentos matemáticos, o avanço dos estudos e as descobertas

foram ocasionados pela necessidade de solucionar problemas nos mais variados contextos. Para resolvê-los, o processo de investigação ganhou força e se configurou como um caminho importante para se chegar a conclusões sobre temas matemáticos.

George Polya (1978) resume as etapas de resolução de um problema conforme esquema a seguir.



DAE

Sob essa perspectiva, fica evidente sua proximidade com o que propõe a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) quando trata do letramento matemático e do desenvolvimento da autonomia e do protagonismo do estudante.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Segundo Sternberg (2001), partimos do pressuposto de que problema é toda situação inédita que leva o aluno a pensar e utilizar ferramentas mentais conhecidas por ele para se chegar a uma solução, o que também condiz com as ideias apresentadas pela BNCC.

Ao longo desta obra, além do trabalho fundamentado na resolução de problemas, as atividades tiveram como base a proposta da investigação matemática, em que os estudantes buscam a solução para situações que podem envolver um ou mais problemas. No trabalho com investigação matemática, o caminho a ser percorrido é mais importante do que a meta final. Nesse sentido, cabe a você acompanhar o estudante ao longo de todo o processo.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p. 23):

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os colegas e o professor.

O seu papel, professor, tanto no campo da resolução de problemas quanto nas investigações matemáticas é saber dosar e fazer as perguntas certas nos momentos certos, sem dar respostas, criando um movimento de construção do espírito investigativo, com a intenção de levar os estudantes a alcançar conquistas maiores por seus próprios meios promovendo, assim, a autonomia e a busca pelo aprendizado.

Os processos de investigação matemática estão estreitamente relacionados ao desenvolvimento da competência específica 5 da área de Matemática e suas tecnologias proposta na BNCC (BRASIL, 2018, p. 531) para o Ensino Médio:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

A proposta desta obra é recriada a todo momento, de acordo com os caminhos

traçados por você e pelo próprio estudante, por isso é essencial que a criação de processos investigativos aconteça de maneira eficiente, visando manter a atenção e a curiosidade do estudante de forma efetiva de acordo com o que você propõe e pelas descobertas próprias e da turma. Cabe também a você proporcionar momentos de trocas entre os estudantes e de criação de novas estratégias. Dessa forma, a construção se tornará muito mais significativa.

O papel do erro

Os estudantes devem desenvolver o hábito de encarar suas dificuldades e entender que os erros são parte integrante do processo de aprendizagem, não com medo, mas com a percepção de que são parte da caminhada rumo ao acerto. O próprio processo de investigação matemática favorece essa percepção: nele o estudante constrói, reconstrói, avalia e reavalia a situação quantas vezes for necessário. Segundo Rico (1995), os erros contêm um potencial educativo que precisa ser bem explorado. O ato de explicar e dar sentido aos próprios erros é uma atividade altamente estimuladora e provocativa para os estudantes.

É importante lembrar que o estudante só adquire esse tipo de postura com a prática, tornando-se um hábito esse movimento. Não é com uma ou duas propostas que a turma adquire esse posicionamento questionador e protagonista, mas com o trabalho de diferentes habilidades, com o olhar de que é possível explorar as ideias matemáticas de diferentes formas, por diferentes caminhos, partilhando com seus pares e discutindo as estratégias de resolução. Nesse sentido, é papel do estudante argumentar sobre suas ações e dialogar com você e com os colegas a respeito das ideias matemáticas, do que entendeu e dos conceitos trabalhados e das habilidades desenvolvidas no processo de aprendizagem.

Você pode organizar debates para que a turma discuta diferentes estratégias de resolução para determinada situação. Ao conhecer diferentes estratégias, ideias e resoluções para um problema específico, o estudante consegue ser protagonista da própria prática e desenvolve autonomia.

O trabalho em grupo

Na perspectiva da resolução de problemas e da investigação matemática que orientam o trabalho desta coleção, a realização das atividades em duplas ou em pequenos grupos tem importância fundamental.

Em seu livro *Planejando o trabalho em grupo* Cohen e Lotan (2017, p. 1) definem esse tipo de trabalho como:

> [...] alunos trabalhando juntos em grupos pequenos de modo que todos possam participar de uma atividade com tarefas claramente atribuídas. Além disso é esperado que os alunos desempenhem suas tarefas sem supervisão direta e imediata do professor.

As autoras defendem que, quando você, professor, propõe uma atividade em grupo e permite que os estudantes se esforcem sozinhos, inclusive cometendo erros, delega autoridade aos estudantes e essa autoridade é a primeira característica-chave do trabalho em grupo.

A construção de um ambiente propício a esse tipo de trabalho, inclusive em relação à forma de constituição dos grupos, pode ocorrer com diálogo sobre os combinados que envolvem a relação entre professor e estudante e entre os próprios estudantes. Além do estímulo a serem autônomos na tomada de decisões, está a seu cargo fazer com que a turma coloque em jogo as decisões tomadas, vivenciando-as.

A segunda característica-chave do trabalho em grupo, ainda segundo as autoras, é que nenhum dos participantes consegue fazer todas as partes da atividade sozinho, ou seja, todos precisam uns dos outros

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

para completar a atividade. A terceira característica-chave está relacionada à natureza das atividades propostas.

> Se o professor quer que os alunos se comuniquem de maneira autônoma e produtiva, eles vão precisar ter algo a respeito do que irão conversar. Se o professor quer que os alunos se engajem em conversas substantivas e de alta qualidade, a atividade precisa estabelecer problemas complexos ou dilemas, ter diferentes soluções possíveis e contar com a criatividade. (COHEN; LOTAN, 2017, p. 2-3).

Nessa perspectiva, trabalhando em duplas ou em pequenos grupos por meio de atividades diversificadas, que envolvem discussões com os colegas, o estudante tem a oportunidade de levantar hipóteses, argumentar, defender suas ideias, mudar de opinião ao ouvir a argumentação do colega e, assim, desenvolver a empatia e o respeito pelo outro, o que contribui para sua formação humana. Esse exercício de respeito às opiniões dos outros, da valorização das diversas ideias apresentadas, com reflexão constante sobre o que o outro pensa, sem pré-julgamentos, desenvolve a escuta ativa e as competências gerais da BNCC 4, 7 e 9 relacionadas ao uso de diferentes linguagens, à argumentação e ao exercício da empatia, do diálogo, da resolução de conflitos e da cooperação, respectivamente.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Ao estudante que desenvolve um trabalho em grupo é dada a oportunidade de reconhecer as próprias emoções frente a opiniões contrárias às suas, ao ser questionado por seu posicionamento. Conflitos de opiniões são constantes na vida em sociedade e o trabalho em grupo se configura uma experiência única no ambiente escolar, observado sob essa perspectiva, e promove o desenvolvimento integral do estudante.

Quando professores e estudantes compreendem a potencialidade de aprendizagem do trabalho em grupo, e incorporam a cultura desse tipo de trabalho, os resultados se efetivam em um ambiente envolto em compreensão, soluções de conflitos, com orientações claras, perguntas pertinentes, bom convívio, respeito e com parceria entre todos os envolvidos no processo.

Uma sugestão para esse tipo de trabalho, inclusive envolvendo turmas com número grande de estudantes, é constituir grupos permanentes para determinado período, um mês por exemplo. Dessa forma, esse mesmo grupo se reúne sempre que forem propostas atividades coletivas. Entre as vantagens desse tipo de organização está a facilidade de você ficar mais próximo dos estudantes para observar suas necessidades e fazer intervenções em relação a conhecimentos, habilidades, atitudes e valores. Seu olhar para o grupo como um todo possibilita a observação mais aguçada de cada estudante.

Nesse tipo de organização envolvendo grupos mais permanentes, as possibilidades de intervenção que atendam às necessidades individuais dos estudantes também se intensificam. Por exemplo, enquanto todos os grupos desenvolvem determinada atividade, você pode pedir a um ou mais estudantes que tenham necessidades comuns de aprendizagem, que se reúnam com você ou com estudantes que não apresentaram a mesma dificuldade, para que haja um atendimento mais específico. A reorganização dos grupos periodicamente, inclusive com a participação dos estudantes para definir critérios de escolha dos integrantes dos novos grupos, é fundamental para que desenvolvam competências ligadas à incorporação de direitos e responsabilidades, ponderação sobre consequências, participação social e liderança, entre outros.

O trabalho em grupo, incorporado como

cultura, transforma consideravelmente os indivíduos de maneira positiva porque proporciona verdadeiro desenvolvimento pessoal e coletivo. A escola tem a oportunidade de tornar esses momentos propícios para a construção de uma sociedade mais empática, de respeito entre todos, a partir do momento que os estudantes conseguem fazer um paralelo entre suas práticas ao longo do processo de aprendizagem e as atividades cotidianas.

O pensamento computacional

Diferentemente do que se possa imaginar, o pensamento computacional não está necessariamente associado à programação de computadores, ao uso de tecnologias ou à comunicação pela internet.

Veja no esquema a seguir o que se entende por cultura digital, tecnologia digital e pensamento computacional, nas etapas da educação básica.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

DAE

O pensamento computacional se relaciona aos processos de pensamento utilizados para modelar problemas e resolvê-los de forma eficiente, determinando soluções genéricas para classes inteiras de problemas e pode ser decomposto em quatro etapas (PENSAMENTO..., 2019):

- decomposição – divisão de um problema em partes menores;
- padrões – identificação de um ou mais padrões que geram o problema;
- abstração – seleção dos dados essenciais de um problema;
- algoritmo – estabelecimento de uma sequência ou ordem em que o problema será resolvido.

O pensamento computacional se relaciona aos processos de pensamento utilizados para formular e resolver problemas e suas soluções. Ele enfatiza que as soluções precisam ser representadas de tal forma que possam ser realizadas tanto por humanos como por "agentes de processamento de informações". Wing (PENSAMENTO..., 2019), André (PENSAMENTO..., 2019).

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 474), o pensamento computacional possibilita ao estudante "compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos".

Assim, o trabalho voltado para a autonomia do sujeito, por meio da investigação matemática e da resolução de problemas, conforme proposto nesta coleção, contém elementos essenciais para o desenvolvimento do pensamento computacional dos estudantes. Esse trabalho é potencializado nesta obra por meio de um dos eixos que estruturam as unidades de cada livro chamado "Algoritmos e fluxogramas". Informações detalhadas deste eixo encontram-se na explicação da organização do Livro do Estudante, neste manual.

AVALIAÇÃO

A avaliação da aprendizagem dos estudantes deve estar alinhada à proposta metodológica desenvolvida. Mudanças na

concepção de ensino/aprendizagem e na abordagem dos conteúdos implicam repensar as finalidades da avaliação, o que e como se avalia, em um trabalho cotidiano que pressupõe uma variedade de situações de aprendizagem, inclusive coletivas.

Quando se trabalha na perspectiva do desenvolvimento de competências e habilidades, o conceito de avaliação se amplia e deve levar em conta possibilidades de avaliar aprendizagens que vão além dos tópicos de conteúdo específico. Várias competências e habilidades de Matemática dizem respeito à investigação, à discussão de ideias, à capacidade de argumentação que demandam outros tipos de avaliação.

ysclips design/Shutterstock.com

Alinhado à perspectiva metodológica aqui adotada está o conceito de avaliação mediadora proposto por Hoffmann (2006). Segundo a autora:

> O significado primeiro e essencial da avaliação mediadora é o "prestar muita atenção" nas crianças, nos jovens, eu diria "pegar no pé" desse aluno mesmo, insistindo em conhecê-lo melhor, em entender suas falas, seus argumentos, teimando em conversar com ele em todos os momentos, ouvindo todas as suas perguntas, fazendo-lhes novas e desafiadoras questões, "implicantes", até, na busca de alternativas para uma ação educativa voltada para a autonomia moral e intelectual. (HOFFMANN, 2006).

Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) lembram que as investigações matemáticas são atividades de aprendizagem e, como tais, precisam ser avaliadas para que você possa saber se está havendo progresso dos estudantes de acordo com suas expectativas. Caso contrário, precisará fazer possíveis intervenções, retomadas ou replanejamento de seu trabalho. Além disso, por meio da avaliação os estudantes tomam conhecimento de como o desempenho deles é visto por você e podem refletir sobre aspectos em que precisam avançar. Esses autores apresentam algumas possibilidades de instrumentos de avaliação:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- **relatórios escritos**, em que um estudante ou um grupo de estudantes apresenta o trabalho desenvolvido. Nesse tipo de relatório podem ser apresentadas tanto as conclusões como todo o processo percorrido durante a investigação;
- **observação informal** dos estudantes enquanto realizam a tarefa e apresentam suas conclusões à turma. Nesses momentos podem ser observados aspectos tais como o modo de mobilizar os conhecimentos matemáticos formais e informais, o modo como entendem o processo investigativo e qual é o papel de cada estudante no desenvolvimento da atividade proposta. Cabe a você, quando oportuno, fazer perguntas que evidenciem como os estudantes estão pensando;
- **apresentações orais**, nas quais os estudantes têm a oportunidade de apresentar a você e aos colegas os resultados de suas investigações. Esses momentos se constituem uma oportunidade tanto para você avaliá-los quanto para o aprendizado dos

estudantes, uma vez que possibilitam a eles desenvolver processos de comunicação e de argumentação.

Outros tipos de instrumentos podem ser indicados para avaliar os estudantes, de forma coerente com o trabalho desenvolvido nesta obra.

- **Autoavaliação:** o estudante deve interpretar o próprio desempenho em relação a atitudes, habilidades desenvolvidas e desempenho intelectual. Para que esse instrumento seja aplicado de forma adequada, é necessário que os estudantes estejam bem preparados e que os critérios sejam bem definidos. Com a colaboração dos estudantes, podem ser elaboradas fichas para que eles preencham.
- **Prova em duplas:** nesse tipo de avaliação, o estudante tem oportunidade de discutir ideias, exercitar a argumentação, aprender a trabalhar de forma colaborativa e aprimorar as relações sociais. Para favorecer o desenvolvimento dessas habilidades, é fundamental que as questões propostas nesse tipo de prova propiciem o debate entre os estudantes.
- **Prova individual:** na seleção dos conteúdos deve-se dar ênfase àqueles realmente significativos. As questões devem ser planejadas e elaboradas com a intenção de levar o estudante a refletir e a estabelecer relações e não simplesmente repetir informações. No momento da escolha do instrumento de avaliação, observe se é compatível com o tipo de conteúdo a ser avaliado e com os objetivos que se deseja alcançar.
- **Portfólio:** é uma coletânea das produções dos estudantes durante determinado período. Pode conter produções de textos, atividades diversas, trabalhos e avaliações para que o próprio estudante acompanhe a evolução de seu processo de aprendizagem.
- **Provas tipo teste:** de tempos em tempos podem ser aplicados testes que simulem exames de vestibulares, Enem e avaliações de larga escala, uma vez que esse tipo de avaliação faz parte da vida dos estudantes, especialmente os do Ensino Médio. Entretanto, é importante lembrar que não é o treinamento sistemático nesse tipo de prova que vai garantir o sucesso dos estudantes. Mais preparados estarão para se sair bem em qualquer tipo de prova os estudantes que desenvolverem um pensamento matemático articulado e que souberam encontrar estratégias para resolver qualquer tipo de problema.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para a utilização de qualquer um desses instrumentos, devem-se ter bem claros os objetivos que orientam sua aplicação. Vasconcellos (2003) aponta questões fundamentais que servem de reflexão na elaboração de instrumentos de avaliação: Como os instrumentos são preparados? Como são aplicados? Como são analisados/corrigidos? Como os resultados são comunicados? E o mais importante, o que vai se fazer com os resultados?

É importante ressaltar a importância das **avaliações diagnósticas** que, independentemente dos tipos de instrumentos utilizados, devem auxiliá-lo na identificação do ponto de partida dos processos de ensino tendo como referência as aprendizagens ocorridas nos processos anteriores.

Para Frade, Val e Bregunci (2014, p. 39), esse tipo de avaliação:

> [...] é entendida também como a avaliação que ocorre ao longo dos processos de ensino e aprendizagem, visando a sua regulação. Ou seja, a avaliação diagnóstica pode ser entendida como aquela que verifica se o aluno aprendeu aquilo que lhe foi ensinado, a fim de identificar dificuldades de aprendizagem a serem superadas.

Ainda de acordo com as autoras, seja qual for a interpretação, a **avaliação diagnóstica** é parte de um percurso de aprendizagem cuja finalidade é delimitar pontos de partida e/ou de retomada para o ensino.

Cabe a você, professor, na elaboração do planejamento de uma etapa de trabalho, estabelecer momentos de avaliação prevendo, inclusive, um número de aulas para possíveis retomadas, de acordo com as necessidades de aprendizagem dos estudantes, evidenciadas nas avaliações.

Ao compreender o processo de aprendizagem, o educador desenvolve a percepção de que os erros e as dúvidas dos estudantes, numa dimensão educativa, são elementos altamente significativos para o desenvolvimento da ação educacional. São eles que fornecem informações sobre o nível de desenvolvimento das habilidades de cada estudante em resolver problemas, em utilizar adequadamente as diversas formas de linguagem para comunicar suas ideias, no desenvolvimento de raciocínios e análises e na integração de todos esses aspectos para promover seu desenvolvimento, tanto em termos cognitivos quanto pessoais.

É importante lembrar que as avaliações diagnósticas devem considerar, além dos aspectos relativos aos conhecimentos e habilidades, aqueles relacionados a atitudes e valores que os estudantes carregam consigo ao chegar à escola. As atividades em grupo são uma ótima oportunidade para que atitudes e valores sejam avaliados e problematizados, com o objetivo de provocar reflexões que os levem a se desenvolver nos aspectos cognitivo e pessoal. Em alguns casos, podem ser implementados projetos que potencializem atitudes e valores positivos nos estudantes.

Nessa perspectiva a avaliação deixa de ser o momento terminal do processo ensino-aprendizagem para se transformar em um movimento contínuo, com momentos constantes de busca da compreensão dos avanços e das dificuldades do estudante. Aprimorar os processos avaliativos de forma a torná-los mais justos, equilibrados e eficientes é realmente um grande desafio para os educadores.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

A CULTURA JUVENIL, A CONSTRUÇÃO DE UMA CONVIVÊNCIA DE PAZ E O PROJETO DE VIDA

A cultura juvenil

De acordo com Correa, Alves e Maia (2014, p. 15-16) a expressão “culturas juvenis” se refere:

> [...] a modos de vida específicos e práticas habituais dos jovens, que expressam certos significados e valores tanto no âmbito das instituições quanto no âmbito da própria vida cotidiana.

Para essas autoras, são muitas as imagens que se relacionam à ideia de juventude, podendo estar associadas a uma fase da vida, a uma determinada faixa etária, ou ainda, a um jeito de ser.

> Se estivermos considerando a pluralidade de maneiras e símbolos que representam e expressam a juventude, é porque há também variadas formas

> e lugares de construção de identidades juvenis. Para que compreendamos as diferenças e semelhanças, é preciso investigar as experiências que os sujeitos vivenciam em seu contexto social e os significados que atribuem a elas. (CORREA; ALVES; MAIA, 2014, p. 14).

Quanto aos procedimentos para se trabalhar as culturas juvenis, as autoras apontam para a importância da cultura na construção das identidades dos jovens, possibilitando "práticas coletivas e de interesses comuns, sobretudo em torno dos diferentes estilos musicais". (CORREA; ALVES; MAIA, 2014, p. 15).

Elas recomendam música, danças, grafite, esportes e tecnologias como importantes mediadores da construção de vivências de jovens. No portal EMDiálogo (UFF, [20--?]) podem ser encontradas várias sugestões para o trabalho com as culturas juvenis.

Por meio das atividades propostas nesta coleção os jovens terão a oportunidade de exercitar a convivência discutindo ideias, confrontando pontos de vista, argumentando, ouvindo os colegas, desenvolvendo projetos, entre tantas outras possibilidades. Exercitam assim o diálogo, a empatia e resolvem conflitos. Todas essas experiências, vivenciadas no dia a dia e no ambiente escolar, oferecem aos jovens a oportunidade de se desenvolver como sujeitos capazes de construir uma sociedade em que os indivíduos reconheçam que há diferenças entre as pessoas, que essas diferenças são legítimas e devem ser respeitadas para que haja convivência de paz. Em todos os livros da coleção, a última parte intitulada **Conexões & Projetos** oferece várias oportunidades de se trabalhar, por meio de projetos, as culturas juvenis.

A construção de uma convivência de paz

Entre as competências gerais expressas na BNCC, duas são particularmente importantes para a construção dessa convivência de paz. Uma delas é a **competência geral 8**:

> Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas. (BRASIL, 2018, p. 10).

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Essa competência diz respeito ao autocuidado e ao desenvolvimento da autoconsciência, da autoestima, da autoconfiança, do equilíbrio emocional, da saúde e do desenvolvimento físico. Ao longo de todo o Ensino Médio, é seu papel estar atento aos sofrimentos psíquicos dos estudantes e manter um ambiente de diálogo, de escuta e abertura para acolher as demandas deles no que diz respeito à prevenção do suicídio e da automutilação.

HilaryGraphic/Shutterstock.com

Recomenda-se a toda a comunidade escolar – que inclui professores, pais, estudantes e demais funcionários da instituição – a adoção de um olhar atento para prevenir a automutilação e o suicídio entre os estudantes, bem como uma postura ativa no sentido de intervir, quando necessário, para buscar o encaminhamento de situações identificadas para tratamento, na intenção de controlar fatos prejudiciais à saúde mental e evitar a violência autoprovocada.

De acordo com duas pesquisas realizadas pela Universidade Federal de São Paulo (ESTUDOS..., 2019), a atenção às rotinas dos jovens é fundamental como possibilidade de prevenção do suicídio.

Segundo os pesquisadores (TAVARES, 2019), quadros depressivos aliados a sentimentos de desesperança e inutilidade podem desencadear comportamento suicida. As pesquisas revelaram que os rapazes, a partir da puberdade, apresentam taxas de suicídio de 3 a 4 vezes maiores que as meninas. As possíveis causas estão ligadas às características de impulsividade e agressividade, além do uso de drogas, como tabaco e álcool. No caso das meninas, as pesquisas apontaram como possíveis causas crises e instabilidades de ordem financeira, econômica e social.

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, a Constituição Federal, o Estatuto da Criança e do Adolescente, a Política Nacional de Prevenção da Automutilação e do Suicídio e as leis que regem a educação no Brasil, é importante destacar de maneira enfática o posicionamento ético que se espera da escola na sociedade brasileira.

> O governo do Brasil optou pela abordagem interdisciplinar em uma ação conjunta entre os Ministério da Saúde (MS) e da Mulher, da Família e dos Direitos Humanos (MMFDH).
>
> As políticas públicas de prevenção ao suicídio e automutilação pretendem, de modo inédito, realizar ações programáticas que alterem os índices de suicídio e autolesão entre crianças e jovens (PREVENÇÃO..., [2019]).

Diante do que foi exposto, torna-se parte do trabalho de todos os profissionais responsáveis pela educação escolar se abrir ao diálogo em relação aos sofrimentos psíquicos e emocionais dos jovens, buscando caminhos para auxiliá-los quando for o caso. O artigo intitulado "A escola tarnsdisciplinar: lugar para falar sobre saúde mental" (LOPES, 2019) apresenta sugestões de como a escola pode atuar na detecção precoce e na prevenção de casos de suicídio, depressão, ansiedade e outros transtornos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Outra importante competência expressa na BNCC (BRASIL, 2018, p. 10) para a construção de uma convivência de paz entre os jovens é a **competência geral 9**.

> Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

Por meio de diversas atividades propostas nesta obra os estudantes têm a oportunidade de desenvolver essa competência, que diz respeito à valorização da diversidade, ao reconhecimento do outro, ao acolhimento da perspectiva do outro, ao diálogo e à convivência, à colaboração e à resolução de conflitos. Na parte específica deste manual estão indicadas algumas delas.

Entretanto, a convivência diária entre os jovens pode favorecer um tipo de atitude negativa denominada *bullying*.

> De origem inglesa e sem tradução no Brasil, é utilizado para qualificar comportamentos agressivos no âmbito escolar, praticados tanto por meninos quanto por meninas. Os atos de violência (física ou não) ocorrem de forma intencional e repetitiva contra um ou mais alunos que se encontram impossibilitados de fazer frente às agressões sofridas. Tais comportamentos não apresentam motivações específicas ou justificáveis. Em última instância, significa dizer que, de forma "natural", os mais fortes utilizam os mais frágeis como meros objetos de diversão, prazer e poder, com o intuito de maltratar, intimidar, humilhar e amedrontar suas vítimas. (SILVA, 2010, p. 7).

Consiste em um tipo de agressão que se repete intencionalmente e desqualifica o outro na forma de constrangimento, que muitas vezes está relacionado a características físicas ou identitárias da vítima. Cláudio Marques da Silva Neto (2018) afirma que:

> O *bullying* já é considerado um problema de saúde pública no Brasil. Uma pesquisa do Fundo das Nações Unidas para Infância (Unicef) aponta o Brasil como quarto país com maior prática de *bullying* no mundo. Dados mostram que 43% dos estudantes de 11 a 12 anos disseram ter sido vítimas de violência física ou psicológica na escola pelo menos uma vez em outubro do ano passado.

Segundo Ana Beatriz Barbosa Silva (2010, p. 7), as formas de *bullying* são:

- Verbal (insultar, ofender, falar mal, colocar apelidos pejorativos, "zoar")
- Física e material (bater, empurrar, beliscar, roubar, furtar ou destruir pertences da vítima)
- Psicológica e moral (humilhar, excluir, discriminar, chantagear, intimidar, difamar)
- Sexual (abusar, violentar, assediar, insinuar)
- Virtual ou *Ciberbullying* (*bullying* realizado por meio de ferramentas tecnológicas: celulares, filmadoras, internet etc.)

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Ainda segundo a autora, seguem algumas formas de se reconhecer quando uma criança ou adolescente está sofrendo *bullying* na escola:

> No recreio encontram-se isoladas do grupo, ou perto de alguns adultos que possam protegê-las; na sala de aula apresentam postura retraída, faltas frequentes às aulas, mostram-se comumente tristes, deprimidas ou aflitas; nos jogos ou atividades em grupo sempre são as últimas a serem escolhidas ou são excluídas; aos poucos vão se desinteressando das atividades e tarefas escolares; e em casos mais dramáticos apresentam hematomas, arranhões, cortes, roupas danificadas ou rasgadas. (SILVA, 2010, p. 10).

Para que o *bullying* seja combatido ou minimizado na escola, é importante que você esteja atento a esse tipo de situação. No caso de identificar essa prática, o tema deve ser trazido para discussão entre os estudantes e, por meio do diálogo, inclusive com a conscientização dos agressores, devem ser estabelecidos combinados que assegurem o respeito e a dignidade no ambiente escolar.

No artigo intitulado "5 ações para promover a saúde mental na escola" (SEMIS, 2018) são propostas atitudes que visam à prevenção e à promoção da saúde mental dos estudantes. Entre elas estão a atenção permanente ao tema, o investimento no trabalho das competências socioemocionais, conforme já indicamos anteriormente, e o envolvimento e o empoderamento dos alunos. Algumas sugestões de atividades para promover o combate à violência nas escolas, em especial o *bullying*, podem ser encontradas na aula proposta por Lérida Oliveira (2012), no Portal do Professor, no *site* do Ministério da Educação.

Nas *Cartilhas sobre como enfrentar a violência e promover a cultura de paz nas escolas* (CARTILHAS..., [2018]), também podem ser encontradas algumas estratégias para promover a cultura de paz entre os estudantes.

O projeto de vida

A Base Nacional Comum Curricular propõe que no Ensino Médio as escolas organizem suas práticas de modo a contemplar o projeto de vida dos estudantes.

De acordo com Moran (2017),

> O projeto ou plano de vida representa o que o indivíduo quer ser e o que ele vai fazer em certos momentos de sua vida, bem como as possibilidades de alcançá-lo. Projeto de vida, num sentido amplo, é tornar conscientes e avaliar nossas trilhas de aprendizagem, nossos valores, competências e dificuldades e também os caminhos mais promissores para o desenvolvimento em todas as dimensões. É um exercício constante de tornar visível, na nossa linha do tempo, nossas descobertas, valores, escolhas, perdas e também desafios futuros, aumentando nossa percepção, aprendendo com os erros e projetando novos cenários de curto e médio prazo. É um roteiro aberto de autoaprendizagem, multidimensional, em contínua construção e revisão, que pode modificar-se, adaptar-se e transformar-se ao longo da nossa vida.

O compromisso com o desenvolvimento integral dos estudantes pressupõe seu desenvolvimento tanto social como pessoal, incluindo uma formação que possibilite a reflexão e possíveis tomadas de decisão a respeito de seu projeto de vida.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 473):

> [...] é papel da escola auxiliar os estudantes a aprender a se reconhecer como sujeitos, considerando suas potencialidades e a relevância dos modos de participação e intervenção social na concretização de seu projeto de vida. É, também, no ambiente escolar que os jovens podem experimentar, de forma mediada e intencional, as interações com o outro, com o mundo, e vislumbrar, na valorização da diversidade, oportunidades de crescimento para seu presente e futuro.

Ao vislumbrar o futuro, os jovens precisam também se preparar para o mercado de trabalho. A **competência geral 6** da BNCC (BRASIL, 2018, p. 9) deixa claro o compromisso da escola nesse sentido.

> Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

O artigo “Como preparar nossos jovens para o mercado de trabalho do futuro?” (PARENTE, 2018), traz uma reflexão sobre as transformações que a escola precisa fazer para formar jovens com as habilidades necessárias a um mercado de trabalho em mudanças constantes e cada vez mais velozes, e apresenta as seguintes estratégias:

> – Encorajar crianças a explorar novos interesses e a encontrar propósitos em pequenos projetos;
> – Ensinar os estudantes a acolher a diversidade de ideias e comportamentos, e a aceitar *feedbacks* (retornos avaliativos);
> – Encorajar a execução de ideias. Inovações não precisam ser grandiosas, podem ser pequenas implementações que mudam processos e fazem a diferença em um ambiente de trabalho e na comunidade onde vivem;
> – Utilizar a escrita e a arte para lidar com emoções e exercer empatia;
> – Dar espaço para que os estudantes explorem e sejam capazes de imaginar;
> – Criar situações que exponham essas crianças a inovações, como visitas a museus, acesso a leituras e cursos sobre temas atuais;
> – Reconfigurar a relação entre professores e estudantes, com o professor sendo mais um mediador inspirador do que um “chefe”.

Esta coleção, por meio de diversos tipos de atividades, que propiciam diferentes tipos de interação entre os colegas e entre os estudantes e o professor, enquanto vivenciam diferentes experiências, oferece a oportunidade a cada jovem de projetar, definir e redefinir o que deseja para sua vida.

Especialmente no trabalho com os projetos, trazidos em cada livro desta coleção na seção **Conexões & Projetos**, os estudantes têm a oportunidade de viver experiências que podem marcar definitivamente a forma como veem o mundo e atuam nele. Essa parte do livro será detalhadamente explicada nas seções relativas ao Livro do Estudante.

Finalmente, alinhada ao Novo Ensino Médio e à BNCC, comprometida com o referencial teórico acima exposto e com as recomendações para a construção de uma cultura de paz e para o projeto de vida dos jovens, esta coleção foi pensada para que os estudantes tenham experiências que os levem a desenvolver um pensamento matemático consistente, [illegible] que aplicam esse conhecimento a outras áreas do conhecimento, [illegible] mundo real, desenvolvendo-se assim como sujeitos autônomos, capazes de atuar com competência e responsabilidade em uma sociedade cada vez mais complexa.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Boyko.Pictures/Shutterstock.com

A ORGANIZAÇÃO DA OBRA

I. O Manual do Professor

É formado por esta parte geral e uma parte específica, de acordo com cada livro.

1. Parte geral	2. Parte específica
Esta primeira parte consta do Manual do Professor em todos os livros da coleção.	A parte específica de cada livro está distribuída nos tópicos a seguir. • Sobre o livro • Objetivos do livro • Justificativa • Conexões com outras áreas de conhecimento • Temas Transversais abordados no livro • Cronograma

Em cada unidade	Em Conexões & projetos
• Objetivos da unidade • Justificativa • Competências gerais comentadas • Competências específicas • Habilidades comentadas • Resoluções e comentários	• Objetivos • Justificativa • Competências gerais trabalhadas em cada projeto comentadas • Objetivos de cada projeto • Competências específicas trabalhadas em cada projeto • Lista de habilidades de cada projeto • Orientações ao professor
Atividades complementares	
Referências comentadas	

Audiovisual
A coleção é acompanhada de seis videotutoriais, um por livro, em que são apresentados os objetivos, a justificativa, a relação com a BNCC e a estrutura de cada material, fornecendo a você, professor, subsídios para seu planejamento, a preparação e condução dos conteúdos. Por se tratar de outra linguagem, o vídeo pode ser uma ferramenta mais clara e acessível para a compreensão da obra.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

II. O Livro do Estudante

Veja a seguir a descrição detalhada de cada parte que integra o Livro do Estudante.

1. A organização dos livros

A forma de organização dos assuntos levou em conta o conhecimento matemático mobilizado e articulado, diferentemente da organização tradicionalmente apresentada. Para favorecer sua autonomia, professor, esta obra foi concebida tendo a flexibilidade como norte. Os seis livros foram elaborados de forma independente, sem uma ordem preestabelecida. Dessa forma, você pode utilizá-los de acordo com sua realidade e do modo que pretende implementar seu planejamento, escolhendo a ordem em que cada livro será trabalhado. Além disso, na medida do possível, as unidades do mesmo livro podem ser trabalhadas na sequência que você julgar conveniente.

Para viabilizar essa proposta, foram reunidos em um mesmo livro assuntos que se relacionam; porém, os livros da coleção não têm caráter sequencial. Apresentamos a seguir o quadro de conteúdos com o resumo de cada unidade dos seis livros.

1.1 Quadro de conteúdos

Unidade 1 – Função afim	**Objetivos** • Estudar e aplicar o raciocínio proporcional. • Conhecer a função afim, identificar as situações que podem ser modeladas por ela e usar procedimentos algébricos e gráficos para resolvê-la. • Resolver e elaborar problemas que envolvam a função afim.	Competências gerais: 2, 4, 5 e 9 Competências específicas: 1, 3, 4 e 5	Habilidades: EM13MAT101 EM13MAT302 EM13MAT401 EM13MAT404 EM13MAT501 EM13MAT510
Unidade 2 – Progressão aritmética, funções e sistemas lineares	**Objetivos** • Investigar as propriedades de uma progressão aritmética, relacioná-la com a função afim e resolver problemas que a envolvam. • Resolver problemas que envolvem sistemas de equações lineares. • Analisar o crescimento linear em situações de juros simples.	Competências gerais: 2, 4, 5 e 9 Competências específicas: 2, 3, 4 e 5	Habilidades: EM13MAT203 EM13MAT301 EM13MAT302 EM13MAT405 EM13MAT507
Unidade 3 – Raciocínio lógico e tratamento da informação	**Objetivos** • Desenvolver noções básicas de linguagem computacional. • Utilizar algoritmos e fluxogramas para descrever procedimentos de execução de uma atividade. • Localizar e analisar informações em textos, tabelas e gráficos estatísticos, assim como construí-los. • Interpretar taxas e índices socioeconômicos de forma crítica.	Competências gerais: 1, 4, 5, 6, 7 e 9 Competências específicas: 1, 3 e 4	Habilidades: EM13MAT102 EM13MAT104 EM13MAT315 EM13MAT405

Unidade 1 – Unidades de medida	**Objetivos** • Entender o que é medir e como as medidas podem ser obtidas. • Conhecer e utilizar as unidades de medida adotadas ou não no Sistema Internacional de Unidades. • Relacionar grandezas fundamentais e derivadas com as respectivas unidades de medida. • Resolver problemas envolvendo precisão de medidas e notação científica.	Competências gerais: 1, 4, 5, 7, 9 e 10 Competências específicas: 1, 2, 3 e 4	Habilidades: EM13MAT103 EM13MAT201 EM13MAT313 EM13MAT314 EM13MAT315 EM13MAT405
Unidade 2 – O estudo das equações do 2º grau	**Objetivos** • Retomar a resolução de equações do 2º grau e obter a fórmula resolutiva. • Utilizar a resolução de equações do segundo grau para resolver problemas. • Obter relações entre raízes e coeficientes de uma equação do segundo grau.	Competências gerais: 1, 2 e 4 Competências específicas: 3 e 4	Habilidades: EM13MAT302 EM13MAT315 EM13MAT405
Unidade 3 – Função quadrática e inequações do 2º grau	**Objetivos** • Utilizar funções do segundo grau para modelar e resolver problemas. • Construir gráficos de funções quadráticas, assim como identificar e calcular as coordenadas do ponto extremo. • Resolver inequações do segundo grau. • Resolver problemas envolvendo funções definidas por mais de uma sentença.	Competências gerais: 2, 4 e 5 Competências específicas: 3, 4 e 5	Habilidades: EM13MAT302 EM13MAT402 EM13MAT404 EM13MAT405 EM13MAT502 EM13MAT506

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Unidade 1 – Tópicos de Matemática Financeira	**Objetivos** • Compreender e usar os conceitos de juros simples e juros compostos. • Calcular capital aplicado após um período nas duas modalidades de juros, diferenciando-as.	Competências gerais: 2, 4, 5 e 9 Competências específicas: 1, 2, 3 e 4	Habilidades: EM13MAT101 EM13MAT104 EM13MAT203 EM13MAT302 EM13MAT303 EM13MAT315 EM13MAT405
Unidade 2 – Função exponencial e função logarítmica	**Objetivos** • Conhecer os logaritmos e entender como aplicá-los. • Modelar, resolver e elaborar situações de crescimento e decrescimento que envolvam funções exponenciais e funções logarítmicas.	Competências gerais: 1, 2, 4, 5 e 9 Competências específicas: 1, 3 e 4	Habilidades: EM13MAT101 EM13MAT304 EM13MAT305 EM13MAT403
Unidade 3 – Sequências numéricas e progressão geométrica	**Objetivos** • Identificar sequências numéricas e sua formação por meio do termo geral. • Relacionar o cálculo de montantes em juros compostos com crescimento em progressão geométrica. • Usar logaritmo para resolver problemas relacionados à progressão geométrica. • Corresponder os termos de uma progressão geométrica com imagens de função exponencial.	Competências gerais: 2, 4 e 9 Competências específicas: 3, 4 e 5	Habilidades: EM13MAT304 EM13MAT305 EM13MAT405 EM13MAT508

Unidade 1 – Estatística descritiva	**Objetivos** • Interpretar criticamente situações socioeconômicas utilizando medidas de tendência central e medidas de dispersão. • Calcular e analisar medidas de tendência central e de dispersão. • Construir e analisar gráficos e diagramas estatísticos.	Competências gerais: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9 e 10 Competências específicas: 2, 3 e 4	Habilidades: EM13MAT202 EM13MAT316 EM13MAT406 EM13MAT407
Unidade 2 – Análise combinatória	**Objetivos** • Empregar diagrama da árvore na resolução de problemas de contagem. • Calcular número de possibilidades de ocorrência de um evento utilizando estratégias de arranjo, combinação, permutação simples e com repetição. • Utilizar os princípios aditivo e multiplicativo de contagem para resolver problemas e criar situações que possam ser resolvidas por eles.	Competências gerais: 2, 4, 5 e 9 Competências específicas: 3 e 4	Habilidades: EM13MAT310 EM13MAT315 EM13MAT405
Unidade 3 – Probabilidades	**Objetivos** • Identificar situações do cotidiano quanto ao uso das probabilidades. • Calcular a probabilidade condicional de dois eventos simultâneos. • Resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de probabilidades.	Competências gerais: 1, 2, 4, 7 e 9 Competências específicas: 1, 3 e 5	Habilidades: EM13MAT106 EM13MAT311 EM13MAT312 EM13MAT511

Unidade 1 – Geometria plana	**Objetivos** • Compreender relações e empregar diferentes métodos para o cálculo de perímetros e áreas de figuras planas. • Resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de perímetros e áreas de polígonos. • Estabelecer relações entre ângulos de um polígono regular e utilizar o conceito de ângulo para elaborar e resolver problemas de ladrilhamento no plano.	Competências gerais: 1, 2, 4, 5, 7 e 9 Competências específicas: 2, 3 e 5	Habilidades: EM13MAT201 EM13MAT307 EM13MAT505
Unidade 2 – Triângulos e geometria das transformações	**Objetivos** • Identificar e compreender diferentes transformações isométricas e homotéticas e usá-las para resolver e elaborar problemas. • Desenvolver noções de Geometria dos Fractais. • Obter relações métricas a partir de semelhança de triângulos. • Estabelecer relações trigonométricas em triângulos e usá-las para resolver e elaborar problemas.	Competências gerais: 1, 2, 3, 4 e 5 Competências específicas: 1 e 3	Habilidades: EM13MAT105 EM13MAT308
Unidade 3 Funções trigonométricas	**Objetivos** • Identificar e relacionar unidades de medidas de ângulos: grau e radiano. • Conceituar circunferência trigonométrica e definir o seno e o cosseno • Definir, construir gráficos e identificar periodicidade das funções seno e cosseno. • Relacionar as funções trigonométricas com fenômenos periódicos e usá-las para resolver e elaborar problemas.	Competências gerais: 1, 2, 4, 5 e 7 Competência específica: 3	Habilidade: EM13MAT306

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Unidade 1 – Os sólidos geométricos	**Objetivos** • Desenvolver noções sobre o método axiomático. • Resolver e elaborar problemas relacionados aos cálculos de medidas de comprimento associados aos elementos de alguns sólidos geométricos. • Retomar planificações de sólidos geométricos. • Resolver e elaborar problemas envolvendo elementos de poliedros. • Investigar e compreender diferentes projeções cartográficas.	Competências gerais: 1, 2, 3, 4, 5 e 9 Competência específica: 5	Habilidade: EM13MAT509
Unidade 2 – Prismas e cilindros	**Objetivos** • Resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de áreas de superfícies e volumes de cilindros e prismas. • Compreender o princípio de Cavalieri para o cálculo de volume de sólidos geométricos e usá-lo para calcular o volume de prismas e cilindros.	Competências gerais: 1, 2, 4, 5 e 9 Competências específicas: 2, 3 e 5	Habilidades: EM13MAT201 EM13MAT309 EM13MAT504
Unidade 3 – Pirâmides, cones e esferas	**Objetivos** • Resolver e elaborar problemas relacionados ao cálculo de áreas de superfícies e volumes de pirâmides, cones e esferas. • Compreender o princípio de Cavalieri para a determinação dos volumes de pirâmides, cones e esferas.	Competências gerais: 1, 2, 4 e 7 Competências específicas: 2, 3 e 5.	Habilidades: EM13MAT201 EM13MAT309 EM13MAT504

Além das três unidades, cada livro contém uma parte importante chamada **Conexões & Projetos**, constituída por dois projetos por meio dos quais os estudantes colocam em ação, de forma articulada, as habilidades trabalhadas nas unidades daquele livro. Esta parte será tratada detalhadamente no item IV deste texto.

Ao final de cada livro encontra-se a **Caixa de ferramentas**, cuja proposta descrevemos a seguir.

- A **Caixa de ferramentas**

Para garantir a independência dos livros, selecionamos alguns tópicos que darão suporte para o desenvolvimento de determinadas unidades e que aparecem em mais de um livro. Dessa forma, não é necessário seguir uma ordem estabelecida para o estudo dos seis livros que compõem a coleção. A **Caixa de ferramentas** de cada livro é constituída dos tópicos relacionados àquele livro e será acessada pelos estudantes quando necessário, favorecendo tanto a autonomia deles quanto a sua, uma vez que possibilita diferentes modos de apresentação e ordenação do conteúdo. O ícone da **Caixa de ferramentas** aparece em um boxe com o respectivo texto na primeira vez que algum tópico é utilizado na unidade.

Os tópicos que integram a **Caixa de ferramentas** são textos relacionados a alguns conhecimentos desenvolvidos nos anos finais do Ensino Fundamental e servem de fonte de consulta e retomadas que se façam necessárias.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 471),

> No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração.

Seguem os tópicos da **Caixa de ferramentas** e as respectivas habilidades dos anos finais do Ensino Fundamental que foram retomadas e/ou aprofundadas.

Tópicos	Habilidades da BNCC
Algoritmos e fluxogramas	EF06MA04, EF06MA34, EF07MA07, EF07MA26, EF07MA28, EF08MA10, EF08MA11, EF08MA16, EF09MA17
Recursos digitais	EF06MA23, EF07MA23, EF08MA23
Unidades de medida	EF06MA24, EF06MA27, EF07MA29, EF07MA30, EF08MA19, EF08MA20, EF08MA21, EF09MA04, EF09MA18
Conjuntos numéricos	EF07MA03, EF07MA10, EF08MA05, EF09MA01, EF09MA02
A linguagem das funções	EF09MA06
Cálculo de áreas	EF07MA31, EF07MA32, EF07MA33, EF08MA19
Pesquisa estatística	EF06MA33, EF07MA36, EF08MA27, EF09MA23
Fundamentos de geometria plana	EF07MA23, EF07MA24, EF08MA15, EF08MA17, EF09MA14, EF09MA12, EF09MA13, EF09MA16, EF09MA17

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Os textos são acompanhados de exemplos que auxiliarão os estudantes na compreensão dos tópicos retomados. A **Caixa de ferramentas** favorece aos estudantes o desenvolvimento dos processos de leitura e pode ser explorada da forma que você julgar conveniente. Veja as duas sugestões a seguir.

- Situação 1: ao fazer o planejamento, selecione previamente, na **Caixa de ferramentas**, o tópico ou os tópicos necessários ao desenvolvimento de determinado assunto.

Oriente, então, os estudantes para que façam um estudo prévio individualmente como tarefa de casa ou, na sala de aula, discutindo com o colega.

- Situação 2: o próprio estudante, quando sentir necessidade, recorre à **Caixa de ferramentas** para estudar o tópico que lhe convier. Espera-se, assim, contribuir para a formação de um jovem autônomo, capaz de identificar suas necessidades de aprendizagem e, com base na própria iniciativa, buscar caminhos para aprender.

2. A organização das unidades

Tendo a resolução de problemas como eixo condutor de todo o trabalho, as unidades que compõem cada livro são constituídas por um percurso de investigação com sucessivas problematizações que possibilitam aos estudantes a elaboração de conclusões e o estabelecimento de novos conceitos. Da forma como estão propostas, as atividades propiciam o desenvolvimento de processos como investigação, construção de modelos e resolução de problemas.

Ao longo de cada unidade, trabalhando ora individualmente, ora em duplas ou em pequenos grupos, os estudantes têm diversas oportunidades de mobilizar sua forma própria de raciocinar, fazer representações, se comunicar e argumentar. São apresentadas situações que os levam a discutir, propor e validar hipóteses, desenvolvendo assim conceitos, representações e procedimentos cada vez mais complexos.

Para propiciar esse trabalho, as unidades são constituídas por **eixos, seções** e **outros recursos**, descritos a seguir.

2.1 Os eixos

Em todos os livros da coleção, sempre que possível, três elementos estão presentes: **Produção de textos**, **Algoritmos e fluxogramas** e **Recursos digitais**.

Por perpassarem as unidades, fazendo a articulação entre os assuntos trabalhados, esses elementos foram denominados **eixos** e garantem a diversidade de atividades, o desenvolvimento de habilidades e a participação dos estudantes como sujeitos ativos no processo de ensino e aprendizagem. Em uma mesma unidade podem aparecer diversos eixos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- **Produção de textos**

A **competência geral 7** da BNCC (BRASIL, 2018, p. 9) propõe que o estudante deve ser capaz de:

> Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

Visando desenvolver essa competência, em todas as unidades de todos os livros da coleção são propostas atividades em que os estudantes produzirão textos tanto oralmente como por escrito. Por meio desses textos eles descrevem formas de pensar, elaboram hipóteses, apresentam argumentações, elaboram problemas, entre outros. Esse eixo favorece, particularmente nos jovens, o desenvolvimento da capacidade de argumentação.

Quanto à elaboração de problemas, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 536) propõe que:

> Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada.

Um dos pontos de destaque que evidenciam a autonomia no desenvolvimento do pensamento matemático é a elaboração de problemas sobre determinado conceito. Saber elaborar uma situação-problema requer um esforço cognitivo muito maior do que uma simples solução, além de necessitar de conhecimento mais profundo sobre o assunto tratado.

- **Algoritmos e fluxogramas**

Esse eixo favorece o desenvolvimento do pensamento computacional, que está presente na BNCC desde o 6º ano do Ensino Fundamental. Esse tipo de pensamento permite que, diante de um problema, o sujeito possa dividi-lo em partes, identificar padrões, imaginar uma solução que seja válida para diversos problemas e definir uma sequência de passos que os resolvam. Esses passos podem ser expressos por meio de um algoritmo, que por sua vez pode ser representado por um fluxograma.

Os algoritmos e fluxogramas são trabalhados nesta coleção como um eixo que perpassa todos os livros, sempre que possível, envolvendo os mais diversos assuntos, visando desenvolver as seguintes habilidades:

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Considerando que nem todos os estudantes tiveram a oportunidade de desenvolver as habilidades relativas à elaboração de algoritmos e fluxogramas propostas na BNCC para o Ensino Fundamental, esse assunto é tratado em um tópico da **Caixa de ferramentas**, onde constam conceitos, como a descrição do que é um algoritmo, para que serve, tipos de algoritmos, fluxograma e os símbolos utilizados na sua elaboração.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- **Recursos digitais**

Em diversas atividades, em todos os livros, os estudantes fazem uso de planilhas eletrônicas, *softwares* de geometria dinâmica ou de calculadoras.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 536),

> [...] o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações.

A importância deste eixo fica evidente devido ao fato de que dezessete habilidades, distribuídas nas cinco competências específicas de Matemática, se referem ao uso das tecnologias digitais para a etapa do Ensino Médio na BNCC.

Neste caso também, a **Caixa de ferramentas** inclui um tópico em que são apresentadas noções básicas de como utilizar planilhas eletrônicas, *softwares* de geometria dinâmica e calculadoras científicas.

2.2 As seções

UNIDADE

Nas **aberturas de unidades** são propostas algumas questões para serem debatidas com a turma, cujo objetivo é mobilizar os conhecimentos anteriores e provocar a necessidade de aquisição de novas habilidades e/ou conteúdos conceituais.

Essas questões podem ser trabalhadas na perspectiva da "sala de aula invertida" (BACICH; MORAN, 2018), em que o estudante, de alguma forma, tem acesso prévio ao assunto que será tratado. Essa é uma das metodologias ativas propostas como forma de colocar o estudante no centro do processo de aprendizagem. Com essa perspectiva, o problema ou as questões na abertura de cada unidade podem ser propostos com antecedência, envolvendo inclusive algum tipo de pesquisa, de modo que ao iniciar a unidade o estudante já tenha tido a oportunidade de pensar sobre o assunto que será abordado. A primeira aula daquela unidade passa a ser, então, um momento de ricas discussões sobre o assunto, com a contribuição de cada estudante.

Para pensar e discutir

Esta seção aparece ao longo de toda a unidade, permeando o texto. O objetivo é colocar o estudante como participante ativo do próprio processo de aprendizagem, potencializando de forma sistemática sua capacidade de fazer inferências pelo aprimoramento de processos de leitura. É constituída por situações que levam o estudante a pensar individualmente, seja durante a aula ou como tarefa de casa. As questões propostas podem envolver investigação de propriedades, elaboração de novos problemas, conclusões ou sínteses que podem ser apresentadas por meio de um texto argumentativo ou de resoluções matemáticas para justificar os argumentos apresentados na discussão, conforme o caso, o que propicia mais uma oportunidade para o desenvolvimento da capacidade de argumentar dos estudantes.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Em seguida, as questões são discutidas em duplas, em grupos ou com toda a turma, sob sua mediação, professor.

Incentivar os estudantes a pensar sobre as questões propostas e apresentar argumentos bem fundamentados é seu papel nesse tipo de atividade. No momento das discussões, cabe também a você garantir um ambiente de respeito e, por meio de novos questionamentos, promover o desenvolvimento de ideias matemáticas e corrigir os conceitos envolvidos.

Para explorar

Os estudantes resolvem as atividades propostas nesta seção sempre em duplas ou em pequenos grupos. Eles trocam ideias ao investigar regras, padrões e propriedades matemáticas e ao fazer análises críticas, criativas e propositivas envolvendo diversos tipos de situações. É hora de observar, testar, comparar, discutir, argumentar, ouvir o colega e explicar seu pensamento.

As atividades propostas nesta seção possibilitam também o desenvolvimento do processo de metacognição (LEITE; DARSIE, 2011), por meio do qual os estudantes têm a oportunidade de pensar sobre como aprendem, promovendo o autoconhecimento, a autonomia intelectual e o controle das próprias atividades cognitivas.

Durante a realização das atividades, cabe a você incentivá-los a se expressarem com clareza, comunicarem suas formas de pensar e apresentarem argumentos que justifiquem suas afirmações.

Para retomar

Esta seção retoma problemas propostos na própria unidade, geralmente no início, aplicando conhecimentos recém-adquiridos. A ideia é trazer diversas formas de abordagem do assunto, relacioná-las e retomá-las, de modo a contribuir para o desenvolvimento de habilidades.

Aproveitando a oportunidade

Seção de aprofundamento de assuntos não especificados na BNCC por meio do processo de investigação, envolvendo problematizações decorrentes dos temas principais trabalhados na unidade. Você tem autonomia para desenvolver ou não esse tópico, de acordo com as necessidades dos estudantes e a disponibilidade de tempo.

Atividades

Blocos de atividades ao final de cada tópico. Podem ser abertas ou fechadas e, em alguns casos, envolver investigações matemáticas, produção de textos ou elaboração de algoritmos e fluxogramas. Nesses blocos podem haver atividades para ser resolvidas em grupos ou em duplas, usando ou não algum tipo de tecnologia digital.

Atividades finais

Relação de atividades envolvendo todo o assunto estudado na unidade. Podem ser abertas ou não. Inclui questões de concursos, de vestibulares e do Enem. Podem ser propostas como tarefa de casa ou para serem resolvidas durante a aula. Você pode selecionar algumas atividades para serem resolvidas em duplas e discutidas coletivamente.

Visando contribuir para a autonomia dos estudantes, as respostas dessas atividades constam no final do Livro do Estudante.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

2.3 Outros recursos

Os seguintes recursos podem aparecer ao longo das unidades, quando oportuno.

Vozes

Dados biográficos de autores, personalidades de destaque e outros, com descrição de suas trajetórias e importância.

Análise e contexto

Textos do cotidiano (notícias, ensaios, divulgação científica) para análise e estudo. São acompanhados de questões.

INFOGRÁFICO

Os infográficos apresentam uma síntese de assuntos relacionados à unidade e podem ou não ser acompanhados de questões para discussão.

3. Conexões & projetos

A quarta parte do livro do estudante, logo depois da terceira unidade, é constituída por uma seção denominada **Conexões & Projetos** formada por dois projetos que visam levar os estudantes a colocar em ação, de forma articulada, as habilidades trabalhadas nas unidades de cada livro. Por meio desses projetos, eles terão a oportunidade de desenvolver competências relacionadas a saberes e vivências da vida cotidiana usando diversos tipos de tecnologia e os conhecimentos matemáticos adquiridos. São abordados temas de interesse dos jovens, como a propagação de *fake news*, e ligados aos Temas Contemporâneos Transversais, como educação financeira e cultura indígena, entre outros.

Esse tipo de trabalho colabora para os estudantes se reconhecerem como sujeitos, considerando suas potencialidades e as possibilidades de participação e intervenção na sociedade em que vivem, o que contribui para a articulação de seu projeto de vida. A escolha dos temas também levou em conta a possibilidade de oferecer aos jovens a oportunidade de conhecer novas realidades, de se aprofundarem em temas relevantes para sua vida e, em alguns casos, fazer intervenções na comunidade. Esse é o caso, por exemplo do projeto sobre ações

sustentáveis, por meio do qual os estudantes desenvolvem ações de impacto social tendo como base o estudo de custos e rendimentos, visando ao melhor aproveitamento dos recursos disponíveis para a solução de um problema coletivo.

É um trabalho que mobiliza competências diversas, como: comunicar-se por meio de instrumentos produzidos pelas tecnologias e pela cultura moderna; ter domínio e responsabilidade diante das mais diversas situações; e respeitar os princípios éticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social.

A proposta de **Conexões & Projetos** visa, de acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 465):

- favorecer a atribuição de sentido às aprendizagens, por sua vinculação aos desafios da realidade e pela explicitação dos contextos de produção e circulação dos conhecimentos;
- garantir o protagonismo dos estudantes em sua aprendizagem e o desenvolvimento de suas capacidades de abstração, reflexão, interpretação, proposição e ação, [illegible] economia pes[illegible] intelectual e política;
- promover a aprendizagem colaborativa, desenvolvendo nos estudantes a capacidade de trabalharem em equipe e aprenderem com seus pares; e
- estimular atitudes cooperativas e propositivas para o enfrentamento dos desafios da comunidade, do mundo do trabalho e da sociedade em geral, alicerçadas no conhecimento e na inovação.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Essa parte da obra oferece, ainda, aos estudantes a oportunidade de (BNCC, 2018, p. 467):

- compreender e utilizar os conceitos e teorias que compõem a base do conhecimento científico-tecnológico, bem como os procedimentos metodológicos e suas lógicas;
- conscientizar-se quanto à necessidade de continuar aprendendo e aprimorando seus conhecimentos;
- apropriar-se das linguagens científicas e utilizá-las na comunicação e na disseminação desses conhecimentos; e
- apropriar-se das linguagens das tecnologias digitais e tornar-se fluentes em sua utilização.

Mais uma vez, pensando na autonomia docente, os projetos são independentes e ambos podem ser desenvolvidos por toda a turma, um de cada vez, de acordo com o cronograma proposto por você. Outra opção é que os estudantes escolham um dos projetos para desenvolver. Analise previamente as propostas, entre nos endereços e *sites* indicados e, se necessário, faça adaptações.

Cabe também a você escolher o melhor momento para dar início ao trabalho. Como o desenvolvimento de um projeto demanda tempo para que as várias etapas sejam cumpridas, sugerimos avaliar a possibilidade de, logo no início de um livro, apresentar a proposta de trabalho e orientar os estudantes para que desenvolvam seus projetos paralelamente ao desenvolvimento das unidades. Essa é mais uma oportunidade de investir na autonomia dos estudantes, uma vez que, caso necessário, podem acessar conteúdos de unidades ainda não trabalhadas mas importantes para o desenvolvimento de seus projetos, o que potencializa seus processos de leitura e compreensão de textos, incluindo o texto matemático. Seu papel é fundamental para incentivá-los a se engajar nesse tipo de trabalho e atender às necessidades específicas de cada grupo.

REFERÊNCIAS COMENTADAS

21 PERGUNTAS e respostas sobre *bullying*. *Nova Escola,* São Paulo, 1 ago. 2009. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/336/bullying-escola. Acesso em: 26 jun. 2020

Nesse artigo, especialistas esclarecem dúvidas e apontam soluções para esse problema que preocupa pais, professores e gestores.

ABRAMOVAY, Miriam; RUA, Maria das Graças. *Violências nas escolas*. Brasília, DF: Unesco Brasil, 2002. Disponível em: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000133967. Acesso em: 26 jun. 2020

Publicação da Unesco que apresenta conceitos e dados acerca de situações de violência escolar, incluindo *bullying*.

ALRO, H.; SKOVSMOSE, O. *Diálogo e aprendizagem em educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

Os autores abordam a relação entre a comunicação na sala de aula e a aprendizagem, enfatizando a importância do diálogo.

BACICH, Lilian; HOLANDA, Leandro. *STEAM em sala de aula*: a aprendizagem baseada em projetos integrando conhecimentos na educação básica. Porto Alegre: Penso Editora, 2020.

Esse livro apresenta a proposta STEAM, sigla em inglês para Ciência, Tecnologia, Engenharia, Artes e Matemática, por meio da qual os estudantes se envolvem em propostas reais para o desenvolvimento de projetos em diversas áreas.

BACICH, Lilian; TANIZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando de Mello. *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso Editora, 2015.

O ensino híbrido é uma abordagem pedagógica que visa colocar o estudante no centro do processo de aprendizagem combinando atividades presenciais e atividades feitas em diferentes ambientes com o uso de tecnologias digitais.

BACICH, Lilian; MORAN, José. *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso Editora, 2018.

Os autores apresentam contribuições teóricas e práticas sobre o ensino e a aprendizagem desenvolvidas por meio das metodologias ativas apoiadas em tecnologias, que visam favorecer a participação ativa do estudante nos processos de aprendizagem.

BENDER, Willian N. *Aprendizagem baseada em projetos:* educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso Editora, 2015.

Explora as formas como os professores podem aplicar a Aprendizagem Baseada em Projetos (ABP) em uma sala de aula real e apresenta diretrizes práticas sobre como usar a ABP em todo o currículo.

BIBIANO, Bianca; SANTOMAURO, Beatriz; MARTINS, Ana Rita. Como agrupo meus alunos? *Nova Escola*, São Paulo, 1 mar. 2009. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/1475/como-agrupo-meus-alunos. Acesso em: 22 maio 2020.

Nesse artigo são apresentadas alternativas para o trabalho em grupos.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto, 2003.

Os autores apresentam os conceitos de modelo e modelagem matemática e propõem a modelagem como método de ensino de matemática.

BNCC COMENTADA para o Ensino Médio. *In:* INSTITUTO REÚNA. São Paulo, c2020. Disponível em: https://institutoreuna.org.br/projeto/base-comentada-para-o-ensino-medio/. Acesso em: 22 maio 2020.

A BNCC Comentada para o Ensino Médio é uma ferramenta que traduz, comenta e explica as competências específicas e as habilidades de cada área de conhecimento desta etapa da educação.

BOALER, Jo. Benefícios do esforço – Parte 3. São Paulo, 23 maio 2018. 1 vídeo (4min33s). Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1_MvTAoH-QJZuhYF9U6Gf_GM65NyHgegh/view. Acesso em: 20 jul. 2020.

Nesse vídeo, gravado durante o I Seminário Mentalidades Matemáticas, a neurocientista Jo Boaler, cofundadora do Youcubed e professora da Universidade de Stanford, apresenta os benefícios do esforço produtivo nas aulas de Matemática.

BOALER, Jo. *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso Editora, 2018.

A autora propõe a ruptura com alguns mitos relativos à aprendizagem da Matemática e apresenta a possibilidade de ensiná-la como uma disciplina criativa e visual.

BORBA, Marcelo C.; SILVA, Ricardo S. R.; GADANIDIS, George. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

Nesse livro, os autores apresentam quatro fases da implementação das tecnologias digitais em Educação Matemática.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática*. São Paulo: Editora Blucher, 2012.

Esse é um clássico de História da Matemática que

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

tem sido texto de referência há mais de 20 anos para aqueles que estudam o assunto.

BRANDT, Celia Finck; BURAK, Dionísio; KLÜBER, Tiago Emanuel. *Modelagem matemática*: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações. Ponta Grossa: Editora da UEPG, 2016. Disponível em: https://static.scielo.org/scielobooks/b4zpq/pdf/brandt-9788577982325.pdf. Acesso em: 21 maio 2020.
Voltado para professores da Educação Básica, o livro apresenta resultados de pesquisas que visam contribuir para tornar o ensino de Matemática mais contextualizado e vinculado à realidade.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 20 maio 2020.
A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que estabelece conhecimentos, competências e habilidades que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da escolaridade básica.

BRASIL. Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes [...]. *Diário Oficial da União*: seção 1, p. 21, 22 nov. 2018. Disponível em: http://www.in.gov.br/materia/-/asset_publisher/Kujrw0TZC2Mb/content/id/51281622. Acesso em: 27 jul. 2020.
A resolução nº 3 atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Regulamenta a implantação do Novo Ensino Médio.

BROUSSEAU, G. *Introdução ao estudo das situações didáticas*: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.
O livro aborda a teoria das situações didáticas, um conceito criado pelo autor há quatro décadas e constante[illegible]

CARAÇA, Bento [illegible] *damentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva, 2000.
Esse livro é referência para o estudo da Matemática e está organizado em três partes: Números, Funções e Continuidade.

CARTILHAS sobre como enfrentar a violência e promover a cultura de paz nas escolas. *In*: PRATTEIN. São Paulo, [2018]. Disponível em: http://prattein.com.br/home/index.php?option=com_content&view=article&id=767:cartilhas-sobre-como-enfrentar-a-violencia-epromover-a-cultura-de-paz-nas-escolas&catid=124:violencia-na-escola&Itemid=216. Acesso em: 13 jun. 2020.
Seleção de cartilhas para entender e enfrentar a violência e promover a cultura de paz nas escolas.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. *Estudar matemáticas*: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.
O livro aborda o estudo da Matemática considerando a educação como um projeto em que os principais protagonistas são os estudantes.

CHICA, Cristiane. Explorando problemas no painel de soluções. *In*: MATHEMA. São Paulo, 20 set. 2019. Disponível em: https://mathema.com.br/jogos-e-atividades/explorando-problemas-no-painel-de-solucoes/. Acesso em: 23 jun. 2020.
Nesse artigo, por meio de exemplos, a autora apresenta como trabalhar com painel de soluções nas aulas de Matemática.

COHEN, Elizabeth G.; LOTAN, Rachel A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. Porto Alegre: Penso Editora, 2017.
Apresenta os referenciais teóricos e a pesquisa que dão suporte ao trabalho em grupo e descreve passos importantes para sua concretização na sala de aula.

COMPETÊNCIAS gerais da BNCC. *In*: MOVIMENTO PELA BASE. [*S. l.*], 1 mar. 2018. Disponível em: http://movimentopelabase.org.br/acontece/competencias-gerais-de-bncc/. Acesso em: 22 maio 2020.
A página esclarece o que são as competências gerais. Inclui um vídeo de Anna Penido que explica como cada uma das competências gerais se articula ao trabalho desenvolvido no cotidiano da escola, passando por todas as disciplinas.

CORREA, Licinia Maria; ALVES, Maria Zenaide; MAIA, Carla Linhares (org.). *Cadernos temáticos*: juventude brasileira e Ensino Médio. Belo Horizonte: Editora da UFMG, 2014. Disponível em: http://observatoriodajuventude.ufmg.br/publication/colecao-cadernos-tematicos-culturas-juvenis-e-tecnologias/. Acesso em: 13 jul. 2020
Esse caderno visa oferecer aos professores referenciais teórico, metodológico, didático e pedagógico que lhes possibilite dialogar com a diversidade juvenil, principalmente com as juventudes imersas no cotidiano das escolas.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *O que é matemática?*: uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2000.
Esse livro trabalha a Matemática de forma construtiva e orgânica, como base para o pensar e agir científicos.

DAVID, Maria Manuela S.; LOPES, Maria da Penha. Falar sobre matemática é tão importante quanto fazer matemática. *Presença pedagógica*, Belo Horizonte, v. 6, n. 32, p. 17-24, 2000.
Nesse artigo, as autoras defendem a importância do falar sobre Matemática para promover o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes e analisam os papéis que o professor pode desempenhar em sala de aula visando socializar o "fazer Matemática".

DAVID, Maria Manuela M. S.; TOMAZ, Vanessa Sena. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.
O livro apresenta e discute situações de sala de aula que evidenciam abordagens interdisciplinares.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

EDUMATEC. *Softwares* de geometria. Porto Alegre: UFRGS, c2008. Disponível em: http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/softwares/soft_geometria.php. Acesso em: 22 maio 2020.
No *site* são encontradas várias indicações de aplicativos e *softwares* para desenvolver atividades nas aulas de Matemática.

ESTUDOS da EPM/Unifesp detalham perfil de casos de suicídio na adolescência no Brasil. *In*: UNIFESP. São Paulo, 5 set. 2019. Disponível em: https://www.unifesp.br/campus/sao/noticias/1144-estudos-da-epm-unifesp-detalham-perfil-de-casos-de-suicidio-na-adolescencia-no-brasil. Acesso em: 26 jun. 2020
Artigo que relata duas pesquisas realizadas pela Universidade Federal de São Paulo (Unifesp), entre os anos de 2006 e 2015, sobre o suicídio entre jovens.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.
O livro traz a história da Matemática desde a Antiguidade até os tempos modernos e apresenta exercícios ao final de cada capítulo como recurso pedagógico.

FANTE, Cleo. *Fenômeno* bullying: como prevenir a violência nas escolas e educar para a paz. Rio de Janeiro: Verus Editora, 2005.
O livro apresenta o *bullying* como um fenômeno que vem sendo tema de preocupação e de interesse nos meios educacionais e sociais em todo o mundo.

FRADE, Isabel Cristina Alves da Silva; VAL, Maria da Graça Costa; BREGUNCI, Maria das Graças de Castro (org). *Glossário Ceale*: termos de alfabetização, leitura e escrita para educadores. Belo Horizonte: UFMG; Faculdade de Educação, 2014.
Voltado para educadores em geral, inclui aproximadamente 200 verbetes escritos por colaboradores de diferentes instituições do país e do exterior, na área de especialização de cada um.

HERNÁNDEZ, Fernando. *Transgressão e mudança na educação*: os projetos de trabalho. Porto Alegre: Artmed, 2007.
A obra apresenta os pressupostos teóricos sobre o trabalho com projetos, com base em uma visão histórica.

HOFFMANN, Jussara. *Avaliação mediadora*: uma prática em construção da Pré-Escola à universidade. Porto Alegre: Mediação, 2006.
A autora propõe uma avaliação mediadora, da reflexão para a ação.

INSTITUTO AYRTON SENNA. Estante do educador. São Paulo, [20--?]. Disponível em: https://www.institutoayrtonsenna.org.br/pt-br/conteudos/estante-do-educador.html. Acesso em: 23 maio 2020.
Disponibiliza diversos *e-books* para auxiliar o professor a desenvolver uma prática que promova a educação integral dos estudantes.

INSTITUTO INSPIRARE. São Paulo, 2012. Disponível em: http://inspirare.org.br/. Acesso em: 26 maio 2020.
Nesse *site* são encontrados materiais relativos à promoção do desenvolvimento integral dos estudantes e sua preparação para a vida no mundo atual.

INSTITUTO REÚNA. São Paulo, c2020. Disponível em: https://institutoreuna.org.br/. Acesso em: 26 jun. 2020.
O *site* disponibiliza ferramentas e conteúdos práticos alinhados à BNCC e apresenta soluções para inovações na sala de aula.

LEITE, Eliana Alves Pereira; DARSIE, Marta Maria Pontin. Implicações da metacognição no processo de aprendizagem da Matemática. *Reveduc*, São Carlos, v. 5, n. 2, p. 179-191, nov. 2011. Disponível em: http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/250. Acesso em: 22 jun. 2020.
Artigo que apresenta implicações identificadas por diferentes autores entre metacognição e aprendizagem, e mais especificamente entre metacognição e aprendizagem da Matemática.

LOPES, Celi Espasandin; NACARATO, Adair Mendes (org.). *Educação matemática, leitura e escrita*: armadilhas, utopias e realidade. Campinas: Mercado de Letras, 2009.
O livro aborda a comunicação em sala de aula valorizando o estudante como protagonista do processo de aprendizagem, que interage com os colegas, o professor e a Matemática num ambiente de exploração.

LOPES, Celi Aparecida Espasandin; NACARATO, Adair Mendes (org.). *Escritas e leituras na educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.
Esses artigos abordam como a comunicação de ideias, interações, práticas discursivas, representações matemáticas, argumentações e negociações de significados podem contribuir para o ensino da Matemática.

LOPES, Marina. A escola também é lugar para falar sobre saúde mental. *In*: PORVIR. São Paulo, 30 set. 2019. Disponível em: https://porvir.org/escola-tambem-e-lugar-para-falar-sobre-saude-mental/. Acesso em: 13 jul.2020.
Esse artigo apresenta resultados de pesquisas relativas ao assunto, além de estratégias para a promoção da saúde mental nas escolas.

LUCKESI, Cipriano Carlos. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. São Paulo: Cortez, 2014.
O autor é referência em estudos sobre a avaliação da aprendizagem escolar e reuniu nesse livro um conjunto de artigos publicados por ele ao longo de anos de trabalho sobre o tema.

MÃO na massa. *In*: PORVIR. São Paulo, [201-]. Disponível em: https://porvir.org/mao-na-massa/. Acesso em: 22 maio 2020.
Nesse *site* são apresentadas diversas ferramentas e sugestões para colocar em prática as inovações e transformar a sala de aula, levando o estudante

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

a ser protagonista do processo de aprendizagem.

MORAN, José. A importância de construir projetos de vida na educação. *In*: EDUCAÇÃO TRANSFORMADORA. São Paulo, 2017. Disponível em: http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2017/10/vida.pdf. Acesso em: 26 jun. 2020.
O autor discute o que significa a construção de um projeto de vida para indivíduos e sugere alguns passos para desenvolver o projeto de vida dos estudantes na escola.

MOVIMENTO PELA BASE. [*S. l.*], [2015]. Disponível em: http://movimentopelabase.org.br/. Acesso em: 22 maio 2020.
Guias, vídeos e outros materiais que ajudam a entender a BNCC na prática.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na educação matemática*. Campinas: Mercado de Letras, 2013.
Nesse livro estão reunidos ensaios e narrativas, relatos e argumentos que discutem possibilidades de apropriação de práticas de letramento, incluindo o numeramento.

OLIVEIRA, Lérida. *Bullying*: conhecendo para combater. *In*: BRASIL. Ministério da Educação. *Portal do Professor*. [Brasília, DF], 3 jul. 2012. Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=41387. Acesso em: 13 jul. 2020.
A autora apresenta sugestão de atividades para conhecer e combater o *bullying*.

PAIS, Luiz Carlos. *Didática da Matemática*: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.
A obra apresenta os conceitos fundamentais de uma tendência que ficou conhecida como "didática francesa", desenvolvida por educadores franceses como um modo próprio de ver a educação centrada no ensino da Matemática.

PARENTE, Ra[illegible] jovens para o mercado de trabalho do futuro? *In*: PORVIR. São Paulo, 8 ago. 2018. Disponível em: https://porvir.org/como-preparar-nossos-jovens-para-o-mercado-de-trabalho-do-futuro/. Acesso em: 14 jul. 2020.
Apresenta a visão de alguns especialistas sobre as transformações que a escola precisa fazer para formar jovens com as habilidades necessárias a um mercado de trabalho cada vez mais novo.

PENSAMENTO computacional em sala de aula: muito além da programação. *In*: FUNDAÇÃO TELEFÔNICA VIVO. São Paulo, 28 nov. 2019. Disponível em: http://fundacaotelefonica.org.br/noticias/pensamento-computacional-em-sala-de-aula-muito-alem-da-programacao/. Acesso em: 22 jun. 2020.
Artigo que define o pensamento computacional e apresenta os pilares que o orientam.

PENSAMENTO computacional e programação como ferramentas de aprendizagem. *In*: INSTITUTO AYRTON SENNA. São Paulo, 13 set. 2019. Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/pt-br/meu-educador-meu-idolo/materialdeeducacao/pensamento-computacional-e-programacao-como-ferramentas-de-aprendizagem.html. Acesso em: 22 jun. 2020.
Esse artigo apresenta os elementos que caracterizam o pensamento computacional de acordo com Wing e descreve as etapas por meio das quais esse tipo de pensamento se organiza.

PERRENOUD, Philippe. *Avaliação*: da excelência à regulação das aprendizagens: entre duas lógicas. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.
O livro trata da avaliação como um problema complexo, que pode estar a serviço da aprendizagem.

PERRENOUD, Philippe. *Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.
Com base na participação na elaboração de um referencial de competências adotado em Genebra, em 1996, para formação continuada de professores, o autor elencou 10 competências necessárias à atividade docente.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1978. v. 2.
O livro apresenta a ideia de que por mais simples que seja um problema, ele desafia a curiosidade e quem o resolve pelos próprios meios coloca em jogo a criatividade e experimenta o prazer da descoberta.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
Os autores analisam, tomando como base pesquisas feitas com estudantes, de que modo as práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser levadas para a sala de aula e contribuir para a educação matemática.

PORVIR. São Paulo, 2012. Disponível em: https://porvir.org/. Acesso em: 26 jun. 2020.
Plataforma de conteúdos e mobilização sobre inovações educacionais do Brasil. Desde 2012, mapeia, produz e difunde referências para inspirar e apoiar transformações que garantam equidade e qualidade na educação a todos os estudantes brasileiros.

POZO, Juan Ignácio. *A solução de problemas*: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.
O eixo principal deste livro é a ideia de que nas diversas etapas da vida os estudantes devem adquirir não somente conhecimentos já elaborados e estruturados nas diversas disciplinas, mas habilidades e estratégias que permitam a eles aprender por si mesmos novos conhecimentos.

PREVENÇÃO ao suicídio e autolesão provocada sem intenção suicida entre adolescentes e jovens *In*: BRASIL. Ministério da Mulher, da Família e dos Direitos Humanos. [Brasília, DF], [2019]. Disponível em: https://www.gov.br/mdh/pt-br/navegue-por-temas/observatorio-nacional-da-familia/politicas-de-prevencao-ao-suicidio-e-autolesao-provocada-sem-intencao-suicida-entre-adolescentes-e-jovens. Acesso em: 26 jun. 2020.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Artigo que apresenta alguns sinais de alerta em relação à possibilidade de suicídio e, também, em linhas gerais, as políticas governamentais de prevenção.

PROJETO FUNDÃO – UFRJ. Rio de Janeiro, [201-?]. Disponível em: http://www.matematica.projetofundao.ufrj.br/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=12&Itemid=109. Acesso em: 22 maio 2020.

Nesse *site* são apresentadas as publicações do Projeto Fundão para o ensino de Matemática.

RICO, Luis. Errores y dificuldades en el aprendizaje de las matemáticas. *In*: CORE. [*S. l.*], 1995. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/12341117.pdf. Acesso em: 20 jul. 2020.

O autor analisa o papel do erro na aprendizagem da Matemática.

SEMIS, Laís. 5 ações para promover a saúde mental na escola. *Nova Escola*, São Paulo, 23 out. 2018. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/12912/5-acoes-para-promover-a-saude-mental-na-escola. Acesso em: 13 jul. 2020.

Nesse artigo são apresentadas ações que visam melhorar o clima na escola, estimular os professores e criar estratégias para lidar com casos de *bullying* e automutilação entre os estudantes.

SEMIS, Laís. O que são as competências gerais da BNCC e o que eu preciso saber sobre elas? *Nova Escola*, São Paulo, 27 fev. 2020. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/18902/o-que-sao-as-competencias-gerais-da-bncc-e-o-que-eu-preciso-saber-sobre-elas?utm_source=facebook&utm_medium=post-. Acesso em: 22 maio 2020.

Nesse artigo são apresentadas as 10 competências gerais propostas na BNCC e sua articulação com as práticas pedagógicas.

SILVA, Ana Beatriz Barbosa. *Bullying*: Cartilha 2010 – Projeto Justiça [...]. Brasília: Conselho Nacional de Justiça, 2010. Disponível em: http://www.truzzi.com.br/blog/wp-content/uploads/2010/10/Cartilha_Bullying_CNJ.pdf. Acesso em: 26 jun. 2020.

Cartilha produzida pelo Conselho Nacional de Justiça que explica como identificar e combater o *bullying* nas escolas.

SILVA NETO, Cláudio Marques da. Como combater o *bullying* na escola. *Nova Escola Gestão*, São Paulo, 6 abr. 2018. Disponível em: https://gestaoescolar.org.br/conteudo/1974/como-combater-o-bullying-na-escola. Acesso em: 7 jun. 2020.

A matéria aborda a importância e as maneiras de combater o *bullying* nas escolas, pois é um problema de saúde pública em todo o Brasil.

SMOLE, Kátia; DINIZ, Maria Ignez. *Ler e resolver problemas*: habilidades básicas para aprender Matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

A obra é referência no ensino de Matemática e tem como eixo condutor a resolução de problemas, além de contribuir para a reflexão sobre o desenvolvimento de habilidades e competências nas aulas de Matemática.

STERNBERG, R. J. *Psicologia cognitiva*. Tradução: Maria Regina Borges Osório. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2001.

Estudo sobre a psicologia cognitiva, equilibra a citação e a descrição de estudos clássicos com igual atenção às contribuições recentes ao campo.

TAVARES, Marcus. O que as escolas podem fazer para prevenir o suicídio entre os adolescentes e os jovens? *In*: TVESCOLA. Rio de Janeiro, 24 out. 2019. Disponível em: http://hotsite.tvescola.org.br/conexaoescolas/suicidio_escolas/. Acesso em: 26 jun. 2020.

Artigo da TV Escola relativo a duas pesquisas realizadas na Unifesp sobre o suicídio entre jovens.

UFF. *EMDiálogo*. Rio de Janeiro, [20--?]. Disponível em: http://www.emdialogo.uff.br/. Acesso em: 13 jul. 2020.

Portal feito por uma rede de universidades cujo objetivo é estimular debates e compartilhar conhecimentos e experiências que contribuam para a melhoria do Ensino Médio público.

VASCONCELLOS, Celso dos S. *Avaliação da aprendizagem*: práticas de mudança – por uma práxis transformadora. São Paulo: Libertad, 2003.

Nessa obra, o autor analisa as práticas concretas de avaliação da aprendizagem, por meio das representações e, sobretudo, pelas observações do cotidiano escolar.

VIOLÊNCIA escolar e *bullying*: relatório sobre a situação mundial. *In*: UNESDOC. [Paris], 2019. Disponível em: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000368092. Acesso em: 11 jun. 2020.

Publicação da Unesco que apresenta conceitos e dados acerca de situações de violência escolar, incluindo *bullying*. Rico material para discussão e para subsidiar o enfrentamento desse grave problema.

WIGGINS, Grant; MCTIGHE, Jay. *Planejamento para a compreensão*: alinhando currículo, avaliação e ensino por meio da prática do planejamento reverso. Porto Alegre: Penso Editora, 2019.

Esse livro se propõe a conduzir os professores à reflexão sobre planejamento, avaliação e ensino com o objetivo de contribuir para a promoção de uma aprendizagem mais engajadora e eficaz em qualquer etapa de ensino, seja na Educação Básica ou no Ensino Superior.

ZABALA, Antoni. *A prática educativa*: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

O livro propõe critérios que possibilitam a articulação de uma prática reflexiva e coerente. Apresenta o conceito de sequência didática e propõe o ensino segundo quatro tipos de conteúdo: factuais, conceituais, procedimentais e atitudinais. No último capítulo, aborda a avaliação em uma perspectiva formativa.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS PARA ESTE VOLUME

Visando desenvolver o letramento matemático, como proposto na BNCC, o eixo condutor deste livro trabalha a Matemática Financeira. Além de uma unidade dedicada especificamente ao assunto, com abordagem articulada dessa temática, são exploradas também as funções exponenciais, as funções logarítmicas e a progressão geométrica.

A resolução de problemas nas atividades é feita pela análise de situações reais e de investigações matemáticas acerca das propriedades das sequências e das progressões geométricas.

Os diversos conteúdos trabalhados são desenvolvidos por meio de atividades de investigação, exploração de situações-problema, elaboração de problemas para os colegas resolverem, discussões entre os estudantes usando ou não tecnologia. Dessa forma, individualmente, em duplas ou em pequenos grupos, mediados pela ação do professor, os estudantes desenvolvem as habilidades da BNCC e alcançam os objetivos definidos para cada unidade. Os projetos da seção **Conexões & Projetos** são mais uma oportunidade para colocar em ação as habilidades mobilizadas ao longo do volume.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Objetivos

- Compreender conceitos e teorias da área de Matemática Financeira e suas aplicações na vida diária.
- Utilizar as funções exponenciais e as funções logarítmicas para modelar e resolver problemas, tanto em contextos matemáticos quanto relacionados a outras áreas.
- Desenvolver o pensamento matemático por meio da investigação de padrões e de propriedades em sequências numéricas e progressões geométricas.

Justificativas

Espera-se contribuir, com as atividades desenvolvidas neste livro, para a formação de jovens que usem a Matemática para fazer a leitura de eventos reais, não apenas na escola e na família, mas no mundo.

As situações financeiras são exploradas, usando ou não tecnologias, no cálculo de juros e taxas e em comparações e discussões que auxiliam os estudantes a entender o noticiário econômico e a solucionar problemas coletivos e individuais que dizem respeito à economia doméstica e ao consumo.

As funções exponenciais e logarítmicas são exploradas visando desenvolver a habilidade de modelagem e resolução de problemas diversos, além de promover a leitura fluente de gráficos no plano cartesiano.

O trabalho com as sequências e as progressões geométricas por investigação e estabelecimento de conjecturas acerca de conceitos e propriedades matemáticas contribui para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Conexões com outras áreas de conhecimento

Unidade 1 – O trabalho com os índices socioeconômicos pode ser desenvolvido em parceria com o professor de Geografia.

Unidade 2 – Há possibilidade de integração com Biologia e Química no estudo de populações que crescem exponencialmente, como as de bactérias. Há ainda a possibilidade de integração com História e Sociologia no estudo da propagação de *fake news*. Por fim, é possível a integração com Física no estudo de unidades de medida que utilizam escalas logarítmicas como decibéis ou escala Richter.

Unidade 3 – A integração com Biologia e Química é possibilitada no estudo de crescimentos em progressão geométrica. Podem ser propostas situações em que os estudantes pesquisem o crescimento do número de bactérias num organismo, o decrescimento radioativo da massa de uma substância etc. Pode-se fazer também uma integração com Arte, por meio da utilização dos diversos tipos de padrões na Arte.

Conexões & Projetos – Tanto o **Projeto 1**, que envolve a educação financeira, como o **Projeto 2**, que trata da divulgação de *fake news* podem ser desenvolvidos com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Temas Contemporâneos Transversais abordados no livro

Educação para o consumo

Na Unidade 1 esse assunto é abordado em diversos momentos, por exemplo, no texto que aparece nas páginas 12 e 13 bem como na seção "Para pensar e discutir" da página 13, em que os estudantes refletem e discutem sobre o tema. No Projeto 1 de Conexões e Projetos "Como fazer seu dinheiro render", os estudantes fazem um estudo de caso de diferentes perfis de consumo.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Educação das relações étnico-raciais e ensino de história e cultura afro-brasileira, africana e indígena

Na Unidade 3, página 97, os alunos leem um texto sobre como a cultura afro-brasileira nasceu e qual foi sua influência nas Artes e pesquisam em *sites* de busca fotografias de tecidos da cultura afro-brasileira que contenham elementos matemáticos.

Educação financeira e fiscal

O assunto tratado na Unidade 1, Matemática financeira, diz respeito a esse tema transversal. No primeiro tópico da Unidade, da página 14 até a página 20, são retomadas estratégias de cálculo de porcentagem, usando ou não a calculadora, visando familiarizar os estudantes com o cálculo de impostos, índices e taxas. Em seguida, é retomado o trabalho já iniciado no Ensino Fundamental com o cálculo de aumentos e descontos percentuais em contextos financeiros. No segundo tópico da Unidade são trabalhados os juros simples e compostos por meio de problemas do cotidiano, como os que se encontram na página 30 e na seção "Para explorar" da página 32. O uso de planilhas eletrônicas em diversas atividades contribui para a educação financeira dos alunos.

Cronograma

Unidades	Sugestão de número de aulas
Unidade 1	18
Unidade 2	24
Unidade 3	18
Conexões & Projetos	6

Esta é apenas uma referência para a distribuição das aulas. Fica a seu critério adequar o cronograma de acordo com sua realidade e as necessidades dos estudantes.

UNIDADE 1 Tópicos de Matemática Financeira

Objetivos

- Compreender o conceito de juros simples e sua utilização.
- Calcular o montante de um capital aplicado na modalidade de juros simples após um período de aplicação.
- Interpretar o crescimento do montante de um capital aplicado a juros simples como crescimento linear.
- Compreender o conceito de juros compostos e sua utilização.
- Diferenciar aplicações em juros simples de aplicações em juros compostos.
- Calcular o montante de um capital aplicado na modalidade de juros compostos após um período de aplicação.
- Interpretar o crescimento do montante de um capital aplicado a juros compostos como crescimento exponencial.

Justificativa

O conhecimento sobre juros simples e de juros compostos, trabalhado por meio de comparações envolvendo financiamentos e taxas do mercado financeiro, possibilita aos estudantes compreenderem situações reais e contribui para que se tornem aptos a avaliar, com segurança, riscos e benefícios envolvendo situações financeiras.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Competências e habilidades da BNCC trabalhadas nesta unidade

Competências gerais

Competências gerais 2, 5 e 9

Na atividade de exploração da página 16, os estudantes pesquisam, em grupo, o significado dos índices econômicos IGPM, INPC e IPCA, descrevem a finalidade de cada um deles e, em seguida, elaboram uma planilha eletrônica com os índices acumulados mês a mês no último ano. Por fim, produzem um texto comparativo dos dados obtidos com observações sobre a finalidade dos índices. Atividades em grupo desenvolvem a **competência geral 9** pelo exercício da empatia e do diálogo, da colaboração e do acolhimento da perspectiva dos outros. Ao elaborarem uma planilha eletrônica envolvendo dados de índices econômicos atuais e compararem esses dados para obter conclusões, eles desenvolvem a **competência geral 2**, uma vez que exercitam a curiosidade intelectual em reflexões e análises críticas, exploram ideias, fazem conexões, interpretam dados, explicam evidências e sintetizam informações. O uso de planilhas eletrônicas também desenvolve a **competência geral 5** pelo uso da tecnologia digital de forma reflexiva e crítica para comunicação, comparação de dados e observações relativas a índices econômicos.

Competência geral 4

Em diversas atividades, os estudantes trabalham em grupo para explorar situações e têm a oportunidade de se expressar, utilizar a linguagem digital, discutir ideias e produzir textos apresentando as ideias discutidas, as conclusões e as sínteses, desenvolvendo, assim, a **competência geral 4**. Isso ocorre, por exemplo, na atividade da página 32, em que os estudantes elaboram gráficos em grupos utilizando um *software* de planilha eletrônica para comparar aplicações em dois diferentes

regimes (juros simples e juros compostos) e, em seguida, produzem um texto apresentando suas conclusões.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competência específica 1

EM13MAT101

Na atividade proposta na seção **Para explorar** da página 28, os estudantes simulam dois empréstimos de um mesmo valor tomados a diferentes taxas de juros simples e elaboram uma tabela usando planilha eletrônica para analisar mês a mês os juros e os montantes correspondentes a cada empréstimo. Em seguida, redigem um texto comentando como é calculado o montante de uma aplicação a juros simples e como se dá o crescimento desse montante mês a mês.

EM13MAT104

Na atividade 12 proposta na página 24, os estudantes pesquisam, em duplas, o PIB do estado onde moram e o PIB do Brasil nos anos 2010 e 2020. Calculam, então, a variação percentual correspondente em cada caso e escrevem um pequeno texto explicando o PIB do estado naquele período em comparação com o PIB do Brasil no mesmo período.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Competências específicas 2 e 3

EM13MAT302

Na seção **Para explorar** da página 30, os estudantes esboçam no plano cartesiano o gráfico de uma função do 1º grau que representa a variação dos montantes de uma aplicação em função do tempo, considerando os dados apresentados em uma tabela. Em seguida, elaboram um texto explicando como os montantes variam em função do número de meses, abordando a taxa de crescimento da função, e analisam se as grandezas montante e número de meses são diretamente proporcionais.

EM13MAT203 e EM13MAT303

Na seção **Para explorar** da página 32 os estudantes, em grupos e usando uma planilha eletrônica, exploram e comparam os montantes mês a mês correspondentes ao empréstimo de um mesmo capital em duas modalidades diferentes de juros: simples e compostos. Em seguida, produzem um texto com suas conclusões sobre as duas modalidades de regime de capitalização.

EM13MAT315

Em vários exemplos, como os das páginas 17 e 18, os estudantes têm a oportunidade de analisar fluxogramas que correspondem a algoritmos para descrever determinados processos.

Competência específica 4

EM13MAT405

Na atividade 13 da página 20, os estudantes elaboram um algoritmo para indicar o cálculo da porcentagem de um valor com uma calculadora simples, sem usar a tecla de porcentagem.

Resoluções e comentários

Página 11

Abertura

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.

   As respostas são pessoais e dependem do conhecimento prévio dos estudantes. Entretanto, espera-se que informem, em relação à primeira pergunta, que normalmente devemos pagar juros e/ou multa pelo atraso no pagamento.

Página 13

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.

Página 14

Para pensar e discutir

1. Calculamos o percentual conforme a faixa em que se encontra o salário:

$27{,}5\%\ \text{de}\ 5\,000{,}00 = \frac{27{,}5 \cdot 5\,000}{100} = \frac{137\,500}{100} = 1375$

Desse valor obtido, deduzimos (subtraímos) o valor indicado na terceira coluna:

R$ 1.375,00 − R$ 869,36 = R$ 505,64

Portanto, o imposto a pagar é R$ 505,64.

2. Calculamos o percentual conforme a faixa em que se encontra o salário:

$27{,}5\%\ \text{de}\ 10\,000 = \frac{27{,}5 \cdot 10\,000}{100} = \frac{275\,000}{100} = 2750$

Desse valor obtido, deduzimos (subtraímos) o valor indicado na terceira coluna:

R$ 2.750,00 − R$ 869,36 = R$ 1.880,64

Portanto, o imposto a pagar é R$ 1.880,64.

3. Não. Basta observar o imposto a pagar no item 1 e no item 2.

Página 16

Para pensar e discutir

1. Digita-se 420, aperta-se a tecla correspondente à operação "×", digita-se 65 e aperta-se a tecla "%". Em algumas calculadoras, depois de apertar a tecla "%" é necessário ainda apertar a tecla "=".
2. Digita-se 420, aperta-se a tecla "×", digita-se 0,65 e aperta-se a tecla "=".

Para explorar

1. IGPM significa Índice Geral de Preços do Mercado e é utilizado como referência para reajuste de aluguel e como indexador de algumas tarifas, como a de energia elétrica.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

INPC é a sigla de Índice Nacional de Preços ao Consumido. Tem o objetivo de fazer a correção do poder de compra dos salários pela mensuração das variações de preços da cesta de consumo da população assalariada que tem o mais baixo rendimento.

IPCA significa Índice Nacional de Preços ao Consumidor. Amplo e indica a inflação de um conjunto de produtos e serviços comercializados no varejo, referentes ao consumo pessoal das famílias.

2. A resposta a seguir é um exemplo.

Índices do mês de março de 2020 (em %):

IGPM: 1,24

INPC: 0,17

IPCA: 0,07

3. A resposta a seguir é um exemplo.

	A	B	C	D
1	Índice Acumulados em 2019 (em %)			
2	**Mês**	**IGPM**	**INPC**	**IPCA**
3	Janeiro	0,0100	0,3600	0,3200
4	Fevereiro	0,8900	0,9019	0,7514
5	Março	2,1613	1,6789	1,5070
6	Abril	3,1012	2,2890	2,0856
7	Maio	3,5661	2,4424	2,2183
8	Junho	4,3937	2,4526	2,2285
9	Julho	4,8112	2,5551	2,4228
10	Agosto	4,1090	2,6782	2,5354
11	Setembro	4,0986	2,6268	2,4944
12	Outubro	4,8065	2,6679	2,5969
13	Novembro	5,1209	3,2223	3,1202
14	Dezembro	7,3179	4,4816	4,3060

Fonte: INFLAÇÃO. *In*: IBGE. Rio de Janeiro, [20--?]. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/explica/inflacao.php. Acesso em: 19 jun. 2020.

4. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes indiquem, com base nos itens anteriores, qual é a finalidade de cada índice e qual deles é o mais empregado no dia a dia.

Página 17

Para pensar e discutir

1. $\frac{0{,}42}{3{,}50} = 0{,}12$

Portanto, iria obter o número decimal 0,12.

2. Resposta esperada:

$0{,}12 = \frac{0{,}12 \cdot 100}{100} = \frac{12}{100} = 12\%$

Página 18

Para explorar

1. O valor que aparece no visor do *smartphone* é 210.
2. O valor que aparece no visor da calculadora do computador é 210.
3. Resposta pessoal.

O algoritmo poderia ser:

1. Digite o valor 1500,00.
2. Aperte [×].
3. Digite 7.
4. Aperte [%].
5. Aperte [+].
6. Digite o valor 1500,00.
7. Aperte [=].

Páginas 19–20

Atividades

Comentário atividade 1: Esta atividade está relacionada ao salário mínimo. Aproveite para perguntar aos estudantes o que é possível comprar com um salário mínimo atual. A ideia é levá-los a pensar no valor aquisitivo e desenvolverem senso de realidade ao observarem que muitas famílias vivem apenas com um salário mínimo para todas as despesas.

1. a) De 2016 a 2017: R$ 937,00 − R$ 880,00 = = R$ 57,00.

De 2017 a 2018: R$ 954,00 − R$ 937,00 = = R$ 17,00.

De 2018 a 2019: R$ 998,00 − R$ 954,00 = = R$ 44,00.

De 2019 a 2020: R$ 1.045,00 − R$ 954,00 = = R$ 47,00.

Portanto, de 2016 para 2017 o salário mínimo teve o maior aumento, em reais, que foi R$ 57,00.

b) Resolução 1

De 2016 para 2017

Percentual	**Valor (R$)**
100	880
x	937

$880x = 100 \cdot 937$

$x = \frac{93\,700}{880}$

$x \cong 106{,}5$

Logo, de 2016 para 2017 o salário mínimo teve um aumento relativo de aproximadamente 6,5%.

De 2017 para 2018

Percentual	**Valor (R$)**
100	937
x	954

$937x = 100 \cdot 954$

$x = \frac{95\,400}{937}$

$x \cong 101{,}8$

Logo, de 2017 para 2018 o salário mínimo teve um aumento relativo de aproximadamente 1,8%.

De 2018 para 2019

Percentual	**Valor (R$)**
100	954
x	998

$954x = 100 \cdot 998$

$x = \frac{99\,800}{954}$

$x \cong 104{,}6$

Logo, de 2018 para 2019 o salário mínimo teve um aumento relativo de aproximadamente 4,6%.

De 2019 para 2020

Percentual	**Valor (R$)**
100	998
x	1045

$998x = 100 \cdot 1045$

$x = \frac{104\,500}{998}$

$x \cong 104{,}7$

Logo, de 2019 para 2020 o salário mínimo teve um aumento relativo de aproximadamente 4,7%.

Portanto, de 2016 para 2017 o salário mínimo teve o maior aumento relativo, em porcentagem, que foi aproximadamente 6,5%.

b) Resolução 2

De 2016 a 2017: $\frac{937}{880} \cong 1{,}065$. Logo, um aumento relativo de aproximadamente 6,5%.

De 2017 a 2018: $\frac{954}{937} \cong 1{,}018$. Logo, um aumento relativo de aproximadamente 1,8%.

De 2018 a 2019: $\frac{998}{954} \cong 1{,}046$. Logo, um aumento relativo de aproximadamente 4,6%.

De 2019 a 2020: $\frac{1045}{998} \cong 1{,}047$. Logo, um aumento relativo de aproximadamente 4,7%.

Portanto, de 2016 para 2017 o salário mínimo teve o maior aumento relativo, em porcentagem, que foi de aproximadamente 6,5%.

2. a) $\frac{4}{5} = 0{,}800 = 80\%$

b) $\frac{5}{8} = 0{,}6250 = 62{,}5\%$

c) $\frac{3}{20} = 0{,}1500 = 15\%$

d) $\frac{125}{100} = 1{,}2500 = 125\%$

e) $\frac{16}{5} = 3{,}200 = 320\%$

f) $\frac{4}{3} \cong 1{,}3333 = 133{,}33\%$

3. Em cálculos envolvendo porcentagens, a estratégia de fazer os estudantes calcularem primeiro 1% de determinado valor facilita não apenas o cálculo, mas estimula o cálculo mental ou mesmo o cálculo aproximado relacionado a aumentos e descontos.

a) 32% de 4500

1º) calculamos 1% de 4500 dividindo 4500 por 100: $\frac{4\,500}{100} = 45$.

2º) multiplicamos o resultado por 32: $32 \cdot 45 = 1440$.

Portanto, 32% de 4500 é 1440.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

b) 18% de 600

1º) calculamos 1% de 600 dividindo 600 por 100: $\frac{600}{100} = 6$.

2º) multiplicamos o resultado por 18: $18 \cdot 6 = 108$.

Portanto, 18% de 600 é 108.

c) 25% de 1000

1º) calculamos 1% de 1000 dividindo 1000 por 100: $\frac{1000}{100} = 10$.

2º) multiplicamos o resultado por 25: $25 \cdot 10 = 250$.

Portanto, 25% de 1000 é 250.

d) 8% de 2500

1º) calculamos 1% de 2500 dividindo 2500 por 100: $\frac{2500}{100} = 25$.

2º) multiplicamos o resultado por 8: $8 \cdot 25 = 200$.

Portanto, 8% de 2500 é 200.

4. A pesquisa da tabela atual do imposto de renda insere os estudantes em um tema real e os leva a calcular como é feito o pagamento desse imposto. É importante verificar se eles compreendem como de fato se obtém o imposto a ser recolhido: de acordo com a faixa, calcula-se o percentual e, do valor obtido, subtrai-se (observando-se a faixa) a parcela a deduzir.

A resposta depende da tabela pesquisada pelos estudantes na época em que fizerem a atividade. Para exemplificar, a tabela mensal de imposto de renda em dezembro de 2019 era a seguinte:

Base de cálculo	Alíquota	Parcela a deduzir do IRPF
Até R$ 1.903,98	Isento	Isento
De R$ 1.903,99 até R$ 2.826,65	7,5%	R$ 142,80
De R$ 2.826,66 até R$ 3.751,05	15%	R$ 354,80
De R$ 3.751,06 até R$ 4.664,68	22,5%	R$ 636,13
Acima de R$ 4.664,68	27,5%	R$ 869,36

Assim, como exemplo, se utilizássemos essa tabela para calcular o imposto de renda de cada pessoa indicada no enunciado, teríamos:

a) Calculamos o percentual conforme a faixa em que se encontra o salário.

15% de 3500 $= \frac{15 \cdot 3500}{100} - \frac{52500}{100} = 525$

Do valor obtido, deduzimos (subtraímos) o valor indicado na terceira coluna.

R$ 525,00 − R$ 354,80 = R$ 170,20

Portanto, o imposto a pagar é R$ 170,20.

b) O valor R$ 1.800,00 se encontra na faixa isenta. Portanto, a pessoa não paga imposto de renda.

c) Calculamos o percentual conforme a faixa em que se encontra o salário.

27,5% de 9000 $= \frac{27{,}5 \cdot 9000}{100} = \frac{247500}{100} = 2475$

Do valor obtido, deduzimos (subtraímos) o valor indicado na terceira coluna.

R$ 2.475,00 − R$ 869,36 = R$ 1.605,64

Portanto, o imposto a pagar é R$ 1.605,64.

Comentário das atividades 5 a 13: Essas atividades podem ser encaminhadas para resolução individual como forma de verificação da aprendizagem e consolidação dos conteúdos desenvolvidos. Sugerimos a correção coletiva para verificar se há necessidade de, em caso de constatadas dificuldades, encaminhar outras atividades elaboradas por você.

5. a) Multiplicar um valor por 0,70 é o mesmo que calcular 70%, isto é, 100% com decréscimo de 30%.

b) Multiplicar um valor por 1,12 é o mesmo que calcular 112%, isto é, 100% com acréscimo de 12%.

6. a) O valor $ 990,00 se encontra na faixa isenta. Portanto, a pessoa não paga imposto de renda nesse país.

b) Calculamos o percentual conforme a faixa em que se encontra o salário:

10% de 2900 $= \frac{10 \cdot 2900}{100} = \frac{29000}{100} = 290$

Portanto, o imposto a pagar é $ 290,00.

c) Calculamos o percentual conforme a faixa em que se encontra o salário:

20% de 3400 $= \frac{20 \cdot 3400}{100} = \frac{68000}{100} = 680$

Portanto, o imposto a pagar é $ 680,00.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Nesse sistema fictício, se a pessoa ganhar $ 3.000,00, descontará em $ 300,00 e terá, fora outros possíveis descontos, um salário líquido de $ 2.700,00. Agora, se a pessoa ganhar $ 3.001,00, será descontada em $ 600,02 e terá, fora outros possíveis descontos, um salário líquido de $ 2.400,98. Note que, apesar de o segundo salário ser maior que o primeiro, o salário líquido correspondente será menor. Devido a problemas desse tipo, a tabela de imposto de renda é feita com valores a deduzir. Discuta isso com os estudantes.

7. Primeiro, vamos descobrir quanto Manuel gastava em cada caixa de laranja antes do aumento:

$$\frac{\text{Valor total gasto}}{\text{Número total de caixas}} = \frac{\text{R\$ 2.000,00}}{100} = \text{R\$ 20,00}$$

Logo, Manuel gastava, antes do aumento, R$ 20,00 por caixa de laranja.

Cada caixa de laranja teve um aumento de 25%. Vamos calcular 25% de R$ 20,00.

$$25\% \text{ de } 20 = \frac{25 \cdot 20}{100} = \frac{500}{100} = 5$$

A caixa de laranja aumentou R$ 5,00, ou seja, cada caixa de laranja passou a custar R$ 25,00.

Com isso, vamos determinar quantas caixas de laranjas Manuel pode comprar depois do aumento:

$$\frac{\text{Valor total gasto}}{\text{Valor de uma caixa}} = \frac{\text{R\$ 2.000,00}}{\text{R\$ 25,00}} = 80$$

Portanto, Manuel poderá comprar 80 caixas de laranja com a mesma quantia.

8. **a)** Falso.

$$12\% \text{ de } 400 = \frac{12 \cdot 400}{100} = \frac{4\,800}{100} = 48$$

Portanto, 12% de R$ 400,00 é igual a R$ 48,00.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

b) Verdadeiro.

Multiplicar um valor por 0,4 é o mesmo que calcular 40%.

$$0{,}4 = \frac{40}{100} = 40\%$$

c) Verdadeiro.

$$\frac{3}{50} = 0{,}06$$

Portanto, três pessoas correspondem a 6% de um grupo de 50 pessoas.

d) Falso.

$$\frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%$$

Portanto, $\frac{2}{5}$ é igual a 0,4, que corresponde a 40%.

e) Verdadeiro.

Primeiro, vamos saber a quanto corresponde 20% em fração:

$$20\% = 0{,}2 = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Assim, um preço X sofre um desconto de 20%, ou seja, X sofre um desconto de $\frac{1 \cdot X}{5}$.

Então:

$$X - \frac{1 \cdot X}{5} = \frac{5 \cdot X - 1 \cdot X}{5} = \frac{4 \cdot X}{5} = 0{,}8 \cdot X$$

9. **a)** Verdadeiro.

De acordo com o gráfico, temos:
Brasil: 91% de 190 milhões, o que corresponde a 172,9 milhões.
Japão: 99% de 128 milhões, o que corresponde a 126,72 milhões.
Logo, o número de pessoas que sabem ler e escrever no Brasil é **maior** que no Japão.

b) Falso.

De acordo com o gráfico, temos:
Peru: 93% de 29 milhões, o que corresponde a 26,97 milhões.
Brasil: 172,9 milhões (já calculado no item **a**).
Portanto, o número de pessoas que sabem ler e escrever no Peru é **menor** que no Brasil.

c) Falso.

De acordo com o gráfico, temos:
Japão: 1% de 128 milhões, o que corresponde a 1,28 milhão.
Peru: 7% de 29 milhões, o que corresponde a 2,03 milhões; ou 29 milhões − 26,97 milhões = 2,03 milhões.
Portanto, o número de pessoas que não sabem ler e escrever no Japão é **menor** que no Peru.

d) Falso.

De acordo com o gráfico, temos:
Japão: 1,28 milhão (já calculado no item **c**).
Brasil: 9% de 190 milhões, o que corresponde a 17,1 milhões; ou 190 milhões − 172,9 milhões = 17,1 milhões.
Portanto, o número de pessoas que não sabem ler e escrever no Japão é **menor** que no Brasil.

e) Falso.

De acordo com o gráfico, temos:
Peru: 2,03 milhões (já calculado no item **c**).
Brasil: 17,1 milhões (já calculado no item **d**).
Portanto, o número de pessoas que não sabem ler e escrever no Peru é **menor** que no Brasil.
Alternativa **a**.

10. Vamos calcular quantos miligramas (mg) de sódio estão contidos em 1500 mL desse refrigerante.

Volume (mL)	Sódio (mg)
350	35
1500	x

$$x = \frac{1500 \cdot 35}{350} = \frac{52\,500}{350} = 150$$

Logo, 1500 mL de refrigerante contêm 150 mg de sódio.

Vamos calcular a porcentagem de sódio que corresponde a essa quantidade em relação às necessidades diárias.

Sódio (em mg)	Porcentagem
500	100
150	y

$$y = \frac{150 \cdot 100}{500} = \frac{15\,000}{500} = 30\%$$

Portanto, se ingerirmos 1500 mL de refrigerante em um dia, consumiremos 30% da necessidade diária de sódio.

Alternativa **d**.

11. De acordo com o enunciado, temos:

$n - 0{,}2n + (n - 0{,}2n) \cdot 0{,}2 = 120$

$n - 0{,}2n + 0{,}2n - 0{,}04n = 120$

$n - 0{,}04n = 120$

$0{,}96n = 120$

$$n = \frac{120}{0{,}96} = 125$$

Portanto, o valor de n é 125.

12. a) PIB: Produto Interno Bruto.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

b) Resposta pessoal.

Depende da interpretação que cada um fará do gráfico. Espera-se que os estudantes observem, por exemplo, que em 2015 e em 2016 o PIB foi negativo (é interessante incentivá-los a pesquisar os fatos que levaram o Brasil a ter um PIB negativo naquele período). Também em 2009 o PIB foi negativo. Em 2010 o PIB do país foi o maior no período. Essas informações devem fazer parte, de alguma maneira, da frase que irão escrever.

13. a) Resposta pessoal.

Resposta possível: digite 400 na calculadora; aperte [×]; digite 0,32 e depois aperte [=].

b) Resposta pessoal.

Resposta possível: digite 400 na calculadora; aperte [×]; digite 1,12 e depois aperte [=].

Página 21

Para pensar e discutir

1. $100\% - 7\% = 93\%$

2. Basta multiplicar por 0,93.

Para pensar e discutir

1. Exemplo de resolução

Percentual	Valor (R$)
100	300
15	x

$$\frac{100}{15} = \frac{300}{x}$$

$100x = 300 \cdot 15$

$$x = \frac{4\,500}{100} \Rightarrow x = 45$$

Fazendo a soma, podemos obter o valor da bicicleta com aumento de 15%.

$300 + 45 = 345$

Portanto, após o aumento de 15%, o valor da bicicleta passou a ser R$ 345,00.

O estudante deve explicar como calculou esse valor.

2. Exemplo de resolução

Percentual	Valor (R$)
100	345
10	x

$$\frac{100}{10} = \frac{345}{x}$$

$100x = 345 \cdot 10$

$$x = \frac{3\,450}{100} \Rightarrow x = 34{,}50$$

Fazendo a diferença, obtemos o valor da bicicleta com desconto de 10%.

$345 - 34{,}50 = 310{,}50$

Portanto, após o desconto de 10%, o valor da bicicleta passou a ser R$ 310,50.

O estudante deve explicar como calculou esse valor.

3.

Percentual	Valor (R$)
100	300
x	310,50

$$\frac{100}{x} = \frac{300}{310{,}50}$$

$100 \cdot 310{,}50 = 300x$

$$x = \frac{31050}{300} \Rightarrow x = 103{,}5$$

O valor aumentou R$ 10,50. Houve um aumento de 3,5%.

Página 22

Para pensar e discutir

1. Suponhamos que um produto custe R$ 100,00. Primeiro, descontamos 10% desse valor e, depois, 5%.

   $10\%\text{ de }100 = \frac{10 \cdot 100}{100} = 10$

   Ou seja, o produto passa a custar R$ 90,00.

   Agora, vamos descontar 5% desse valor.

   $5\%\text{ de }90 = \frac{5 \cdot 90}{100} = 4{,}5$

   O produto passa custar R$ 85,50. Assim, o produto teve um desconto total de R$ 14,50.

   Agora, suponhamos que o mesmo produto que custa R$ 100,00 sofra um desconto de 15%.

   $15\%\text{ de }100 = \frac{15 \cdot 100}{100} = 15$

   Ou seja, o produto passou a custar R$ 85,00, teve um desconto de R$ 15,00.

   Portanto, dois descontos sucessivos, um de 10% e outro 5%, não correspondem a um único desconto de R$ 15%.

2. Vamos calcular o valor do carro após um desconto de 15% (o carro valerá 85% do valor inicial):

   85% de R$ 25.000,00 = 0,85 · R$ 25.000,00 = = R$ 21.250,00.

   Portanto, após o desconto de 15% o carro vai custar R$ 21.250,00.

3. Como vimos nos cálculos dos dados apresentados na pergunta 1, dois descontos sucessivos de 10% e de 5% sobre um valor inicial de R$ 100,00 correspondem a um desconto R$ 14,50, ou seja, a um só desconto de 14,5%.

   Verifique se ficou claro para os estudantes que, quando multiplicamos o valor do carro por 0,90, o novo valor será 10% menor do que o anterior. Multiplicar por 0,95 significa dar um desconto de 5%. O valor do carro após os dois descontos sucessivos pode ser obtido pela multiplicação de 0,90 por 0,95, isto é, pela multiplicação do valor inicial do carro por 0,855, que significa 85,5% do valor inicial. Logo, houve um desconto de 14,5%.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir

1. Seja C_i o comprimento inicial e C_f o comprimento final. Sabemos que $C_i = 8$ m e $C_f = 11$ m, ou seja, um aumento de 3 m.

   Para saber quanto, percentualmente, será o aumento, calculamos o que o comprimento de 3 m representa em relação ao comprimento de 8 m:

   $P = \frac{3\text{ m}}{8\text{ m}} = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$

   Portanto, haverá aumento de 37,5% no comprimento da piscina.

2. Seja L_i a largura inicial e L_f a largura final. Sabemos que $L_i = 4$ m e $L_f = 5$ m, ou seja, um aumento de 1 m.

   Para saber quanto, percentualmente, será o aumento, calculamos o que a largura de 1 m representa em relação à largura de 4 m:

   $P = \frac{1\text{ m}}{4\text{ m}} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

   Portanto, haverá aumento de 25% na largura da piscina.

3. Resposta pessoal. Entretanto, explique aos estudantes que para obterem a nova medida do comprimento devem multiplicar a medida inicial por 1,375 (aumento de 37,5%). Já para obterem a nova medida da largura, devem multiplicar a medida inicial por 1,25 (aumento de 25%). Como a área é o produto dessas medidas, basta multiplicar 1,375 por 1,25, obtendo 1,71875, isto é, um aumento de 71,875%.

Página 23

Para pensar e discutir

1. Aumento de 7%, pois $X(1 + 0{,}07) = X + 0{,}07X$, isto é, 100% de X mais 7% de X.
2. Diminuição de 7%, pois $X(1 - 0{,}07) = X - 0{,}07X$, isto é, 100% de X menos 7% de X.
3. Aumento da grandeza em i por cento. Diminuição da grandeza em i por cento.

Página 24

Atividades

Comentário das atividades 1 a 8: É necessário que sejam resolvidas individualmente. Os estudantes já desenvolveram diversas habilidades no Ensino Fundamental relacionadas ao cálculo de porcentagem. Eles têm estratégias próprias de resolução que devem ser utilizadas para a consolidação na solução de problemas diversos com porcentagens. Ao final das atividades, é importante fazer a correção coletiva para que todos observem as possíveis diferentes maneiras de resolução, o que amplia a forma de enfrentamento de problemas similares aos trabalhados aqui. Peça a alguns estudantes que expliquem oralmente como resolveram para o compartilhamento de diferentes estratégias.

1. Seja V_i o valor inicial e V_f o valor final. Sabemos que V_i = R$ 89,00 e V_f = R$ 60,52, ou seja, um desconto de R$ 28,48 (R$ 89,00 − R$ 60,52 = R$ 28,48).

   Para saber o percentual do desconto, calculamos o que o valor de R$ 28,48 representa em relação ao valor de R$ 89,00:

$$p = \frac{\text{R\$ } 28{,}48}{\text{R\$ } 89{,}00} = \frac{28{,}48}{89} = 0{,}32 = 32\%$$

Portanto, está sendo anunciado um desconto de 32% nessa promoção.

2. Vamos calcular o valor do carro após o primeiro ano de uso, que chega a desvalorizar aproximadamente 15%, ou seja, sofrer um decréscimo de 15%, passando a valer 85% do valor inicial.

85% de R$ 45.000,00 = 0,85 · R$ 45.000,00 = = R$ 38.250,00

Portanto, após o primeiro ano de uso o carro vai custar R$ 38.250,00.

3. Temos que $\frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$, ou seja, paga-se 75% do valor total, ou tem-se um desconto de 25% em cada produto. Outra maneira é considerar que o desconto é de 1 unidade em 4 unidades, ou seja, $\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$.

4. a) Um aumento de 5% sobre determinado valor X corresponde a multiplicar X por 1,05, e um aumento de 2% sobre o novo valor corresponde multiplicar esse novo valor por 1,02. O valor X após os dois aumentos consecutivos pode ser obtido pela multiplicação de 1,05 por 1,02. Como 1,05 · 1,02 = 1,071, então temos 107,1% do valor X inicial. Portanto, houve aumento de 7,1%.

b) Um desconto de 5% sobre determinado valor X corresponde a multiplicar X por 0,95, e um desconto de 2% sobre o novo valor corresponde a multiplicar esse novo valor por 0,98. O valor X após os dois descontos consecutivos pode ser obtido pela multiplicação de 0,95 por 0,98 (0,95 · 0,98 = 0,931), ou seja, pela multiplicação do valor inicial X por 0,931, que significa 93,1% do valor X inicial.

Portanto, houve um desconto de 6,9% (100% − 93,1% = 6,9%).

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

5. a) (0,2 · V) · 0,4 = 0,08V

b) (0,15 · V) · 0,3 = 0,045V

6. a) Vamos obter o valor depois de um aumento de 4% sobre R$ 400.000,00:

104% de R$ 400.000,00 = 1,04 · R$ 400.000,00 = = R$ 416.000,00

Portanto, a empresa terá R$ 416.000,00 de lucro.

b) Vamos obter o valor depois de um decrescimento de 4% sobre R$ 400.000,00:

96% de R$ 400.000,00 = 0,96 · R$ 400.000,00 = = R$ 384.000,00

Portanto, a empresa terá R$ 384.000,00 de lucro.

7. No item **a** basta multiplicar 400 000 por 1,04 e, no item **b**, basta multiplicar 400 000 por 0,96.

8. a) Vamos calcular o valor do carro no início de 2019, após uma desvalorização de 15% (o carro passou a valer 85% do valor inicial).

85% de R$ 32.000,00 = 0,85 · R$ 32.000,00 = = R$ 27.200,00

Agora vamos calcular o valor do carro no início de 2020, após uma desvalorização de 9% (o carro passou a valer 91% do valor do ano anterior):

91% de R$ 27.200,00 = 0,91 · R$ 27.200,00 = = R$ 24.752,00

Portanto, o carro passou a valer R$ 24.752,00 no início de 2020.

b) 0,85 · 0,91 = 0,7735 = 77,35%

Logo, o carro passou a valer 77,35% do valor inicial, ou seja, teve uma desvalorização de 100% − 77,35% = 22,65%.

9. Seja s o preço da saia, b o preço da blusa e t o preço total das duas peças. Temos que o preço da saia sofreu aumento de 20% e o preço da blusa aumentou 30%. Então:

$s + 0{,}2s = 1{,}2s$

$b + 0{,}3b = 1{,}3b$

$t = s + b$

Comprando as duas peças pelo novo preço, Maria pagaria 24% a mais, ou seja, pagaria um aumento de 124% de t, isto, é 1,24t. Logo:

$1{,}2s + 1{,}3b = 1{,}24t$

Como $t = s + b$, substituímos na equação acima e obtemos:

$1{,}2s + 1{,}3b = 1{,}24(s + b)$

$1{,}2s + 1{,}3b = 1{,}24s + 1{,}24b$

$1{,}3b - 1{,}24b = 1{,}24s - 1{,}2s$

$0{,}06b = 0{,}04s$

$$s = \frac{0{,}04}{0{,}06}b$$

$s = 1{,}5\,b$

Agora vamos determinar quanto mais caro foi o preço da saia em relação ao preço da blusa:

$s - b = 1{,}5b - b = 0{,}5b = 50\%$ de b

Portanto, a saia foi 50% mais cara que a blusa.

Alternativa **e**.

10. Seja x o preço do primeiro eletrodoméstico e y o preço do segundo eletrodoméstico. Então:

$x + y = 3500$ (I)

Temos que o primeiro eletrodoméstico sofreu um desconto de 10% e o segundo eletrodoméstico, um desconto de 8%. Então:

$x - 0{,}1x = 0{,}9x$

$y - 0{,}08y = 0{,}92y$

Comprando os dois eletrodomésticos depois dos descontos, o preço total seria R$ 3.170,00. Logo,

$0{,}9x + 0{,}92y = 3170$ (II)

Isolando y na equação (I), obtemos:

$y = 3500 - x$

Substituindo o valor de y na equação (II), obtemos:

$0{,}9x + 0{,}92(3500 - x) = 3170$

$0{,}9x + 3220 - 0{,}92x = 3170$

$0{,}9x - 0{,}92x = 3170 - 3220$

$-0{,}02x = -50$ (multiplicamos ambos os lados por -1)

$0{,}02x = 50$

$$x = \frac{50}{0{,}02} = 2500$$

Portanto, foi pago R$ 2.500,00 pelo primeiro eletrodoméstico.

Alternativa **b**.

11. Seja x o salário de João e y o valor do plano de saúde. Sabemos que o valor desse plano de saúde equivale a 10% do salário do João e que foi reajustado em 15%, o que proporcionou um aumento de R$ 120,00 nas despesas dele. Assim, calculamos o custo do plano de saúde:

Valor do plano de saúde (R$)	**Percentual**
y	100
120	15

$y \cdot 15 = 120 \cdot 100$

$15y = 12000$

$$y = \frac{12000}{15}$$

$y = 800$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Logo, o plano de saúde custa R$ 800,00, o que sabemos que equivale a 10% do salário do João.

Agora vamos determinar o salário do João:

Salário (R$)	**Percentual**
x	100
800	10

$x \cdot 10 = 800 \cdot 100$

$10x = 80000$

$$x = \frac{80000}{10}$$

$x = 8000$

Portanto, o salário mensal de João é R$ 8.000,00.

Alternativa **e**.

12. A resposta depende do estado onde os estudantes moram.

Esta atividade visa incentivar os estudantes não apenas a pesquisarem, mas a conhecerem um pouco melhor o PIB brasileiro em comparação com o PIB do estado em que vivem. O pequeno texto deve evidenciar se houve crescimento ou decrescimento, além de abordar o significado e o efeito desses fatos em termos econômicos.

13. Inflação em janeiro: 6%, ou seja, para atualizar os valores devemos multiplicá-los por 1,06, que corresponde a um reajuste de 6%.

Inflação em fevereiro: 5%, ou seja, para atualizar os valores devemos multiplicá-los por 1,05, que corresponde a um reajuste de 5%.

Assim, os reajustes sucessivos correspondem a $1{,}06 \cdot 1{,}05 = 1{,}113$, ou seja, 11,3%.

Portanto, a taxa de inflação no bimestre janeiro/fevereiro é de 11,3%.

Alternativa **d**.

14. Resposta pessoal.

Página 25

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal.

2. Temos que o aparelho de TV custa R$ 1.000,00.

Comprando à vista há 10% de desconto, o aparelho de TV passa a custar R$ 900,00.

Comprando a prazo, são duas parcelas iguais e sem desconto: R$ 500,00 no ato da compra e outra de R$ 500,00 após um mês. Assim, C = R$ 900,00 − − R$ 500,00 = R$ 400,00.

Por esses R$ 400,00, você deve pagar R$ 500,00 após um mês, assim temos:

J = R$ 100,00

C = R$ 400,00

$n = 1$, logo:

$J = niC$

$$i = \frac{J}{Cn}$$

$$i = \frac{100}{400}$$

$$i = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$$

Portanto, você pagará uma taxa de 25% nesse mês.

Página 26

a) Resposta pessoal. Comente com os estudantes, após externarem suas respostas, que má educação financeira é comprar sem precisar; não valorizar o dinheiro adquirido por meio do trabalho; não pensar no futuro; empregar o dinheiro indevidamente em produtos que, por exemplo, agridem a natureza, entre outros aspectos.

b) Resposta pessoal. Explique aos estudantes, após externarem suas respostas, que boa educação financeira é comprar quando necessário; utilizar o dinheiro do fruto do trabalho de forma sustentável; gastar com sabedoria, entre outros aspectos.

Página 27

Para pensar e discutir

1. Por um dia de atraso será paga multa de 2% e mais juros de 0,05% ao dia em relação ao valor do boleto.

Valor do boleto: R$ 1.215,00

Valor da multa: 2% de R$ 1.215,00 = $= \frac{2 \cdot R\$\ 1.215,00}{100} = R\$\ 24,30$

Valor dos juros ao dia: 0,05% de R$ 1.215,00 = $= \frac{0,05 \cdot R\$\ 1.215,00}{100} \cong R\$\ 0,61$

Valor total: R$ 1.215,00 + R$ 24,30 + R$ 0,61 = = R$ 1.239,91

Portanto, o valor total é R$ 1.239,91, sendo R$ 24,30 de multa e R$ 0,61 de juros por 1 dia de atraso.

2. Por 28 dias de atraso será paga uma multa de 2% e mais juros de 0,05% ao dia em relação ao valor do boleto.

Valor do boleto: R$ 1.215,00

Valor da multa: R$ 24,30 (calculado na atividade 1)

Valor dos juros por 28 dias: 28 · 0,05% de R$ 1.215,00 = $\frac{28 \cdot 0,05 \cdot R\$\ 1.215,00}{100} = R\$\ 17,01$

Valor total: R$ 1.215,00 + R$ 24,30 + R$ 17,01 = = R$ 1.256,31

Portanto, o valor total é R$ 1.256,31, sendo R$ 24,30 de multa e R$ 17,01 de juros por 28 dias de atraso.

Para pensar e discutir

1. Os juros foram calculados sobre o capital de R$ 10.000,00 (capital inicial).

2. O montante aumenta sempre na mesma taxa de crescimento, isto é, o montante aumentará sempre R$ 100,00, que representa 1% de R$ 10.000,00.

Página 28

Para explorar

1. Resposta possível: os cálculos foram feitos para um empréstimo de R$ 2.000,00.

A pessoa A e a pessoa B fizeram um empréstimo de R$ 2.000,00 cada uma.

Empréstimo da pessoa A

	A	B	C	D	E	F
1	**PERÍODO**	**CAPITAL**	**TAXA**	**CÁLCULO DOS JUROS**	**JUROS**	**MONTANTE**
2	1º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 2.000,00	R$ 24,00	R$ 2.024,00
3	2º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 2.000,00	R$ 24,00	R$ 2.048,00
4	3º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 2.000,00	R$ 24,00	R$ 2.072,00
5	4º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 2.000,00	R$ 24,00	R$ 2.096,00
6	5º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 2.000,00	R$ 24,00	R$ 2.120,00
7	6º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 2.000,00	R$ 24,00	R$ 2.144,00
8	7º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 2.000,00	R$ 24,00	R$ 2.168,00
9	8º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 2.000,00	R$ 24,00	R$ 2.192,00
10	9º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 2.000,00	R$ 24,00	R$ 2.216,00
11	10º mês	R$ 2.000,00	1,2%	R$ 2.000,00	R$ 24,00	R$ 2.240,00

Empréstimo da pessoa B

	A	B	C	D	E	F
1	**PERÍODO**	**CAPITAL**	**TAXA**	**CÁLCULO DOS JUROS**	**JUROS**	**MONTANTE**
2	1º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 2.000,00	R$ 22,00	R$ 2.022,00

(continua)

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

(continuação)

	A	B	C	D	E	F
1	**PERÍODO**	**CAPITAL**	**TAXA**	**CÁLCULO DOS JUROS**	**JUROS**	**MONTANTE**
3	2º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 2.000,00	R$ 22,00	R$ 2.044,00
4	3º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 2.000,00	R$ 22,00	R$ 2.066,00
5	4º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 2.000,00	R$ 22,00	R$ 2.088,00
6	5º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 2.000,00	R$ 22,00	R$ 2.110,00
7	6º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 2.000,00	R$ 22,00	R$ 2.132,00
8	7º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 2.000,00	R$ 22,00	R$ 2.154,00
9	8º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 2.000,00	R$ 22,00	R$ 2.176,00
10	9º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 2.000,00	R$ 22,00	R$ 2.198,00
11	10º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 2.000,00	R$ 22,00	R$ 2.220,00
12	11º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 2.000,00	R$ 22,00	R$ 2.242,00
13	12º mês	R$ 2.000,00	1,1%	R$ 2.000,00	R$ 22,00	R$ 2.264,00

2. Resposta pessoal.

3. Pegaria o empréstimo da pessoa A, pois tem juros menores.

4. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes apresentem no texto, de forma reduzida, o comportamento do crescimento dos montantes na modalidade juros simples, evidenciando que incidem sempre sobre o capital inicial.

Para pensar e discutir

1. Seja $J = niC$, então:

$J = niC \Rightarrow \frac{J}{n} = iC = J_1$

Temos o capital multiplicado pela taxa de juros, ou seja, o valor [illegible] representa o mesmo para cada um dos n períodos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

2. Triplicando a quantidade de períodos de aplicação em juros simples, triplicamos os juros.

Seja $J = niC$, então:

$J_2 = 2n \cdot iC = 2J$

$J_3 = 3n \cdot iC = 3J$

Página 29

Para pensar e discutir

1. De acordo o gráfico, temos que a taxa de crescimento da função afim é 300.

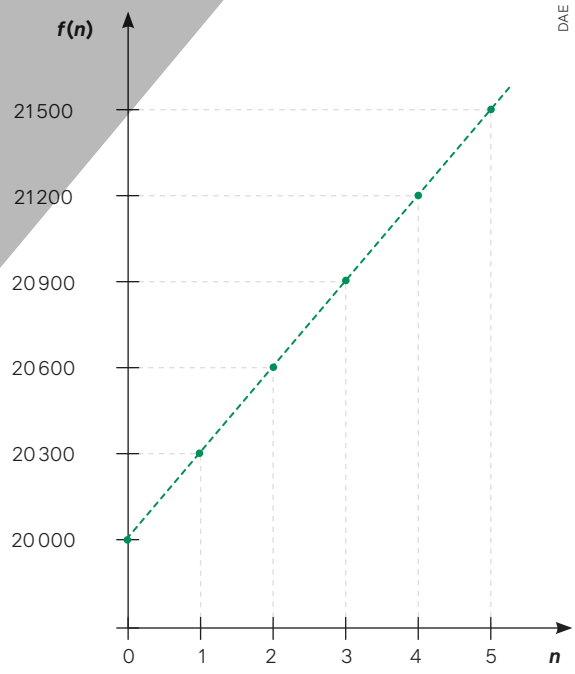
2. A constante de proporcionalidade é 300.

Explique aos estudantes que uma função da forma $y = f(x) = ax$, com a diferente de zero é chamada de função linear. Já uma função da forma $y = f(x) = ax + b$, recebe a denominação de função afim. Dessa forma, uma função linear é um caso particular de função afim.

Página 30

Para explorar

1.



DAE

Explique aos estudantes que fizemos o gráfico com linhas tracejadas apenas para indicar que os pontos correspondentes estão alinhados. O gráfico, neste caso, é apenas a sucessão de pontos isolados, pois n representa uma variável natural.

2. Resposta pessoal. No texto o estudante deve comentar resumidamente, entre outras coisas, que o crescimento é linear e que a taxa de crescimento corresponde ao juro mensal, quando estamos na modalidade de juros simples.

Páginas 30–31

Atividades

Comentário das atividades de 1 a 13: Embora os estudantes consigam elaborar e resolver situações envolvendo o cálculo de montantes na modalidade de juros simples, é fundamental explicar a eles que essa é uma modalidade praticamente inexistente em situações reais. Teria sentido numa economia em que a moeda fosse totalmente estável, o que não ocorre. Aqui trabalhamos com juros simples para ampliar o conhecimento dos estudantes e também fazê-lo perceber diferenças em relação às situações envolvendo juros compostos, tema que ainda será trabalhado nesta unidade. Sugerimos que as atividades de 7 a 12 sejam encaminhadas para resolução individual como forma de verificação da aprendizagem.

1. **a)** $C = \text{R\$ } 32.000{,}00$; $i = 4{,}6\% = 0{,}046$; $n = 1$ e $J = ?$.

$J = niC$

$J = 1 \cdot 0{,}046 \cdot 32\,000$

$J = 1\,472$

Portanto, ele recebeu juros de R$ 1.472,00.

b) $C = \text{R\$ } 32.000{,}00$; $J = \text{R\$ } 1.472{,}00$ e $M = ?$.

$M = C + J$

$M = 32\,000 + 1\,472$

$M = 33\,472$

Portanto, o montante correspondente após 1 ano é R$ 33.472,00.

Embora tenhamos utilizado relações matemáticas tanto para o cálculo dos juros quanto para o montante, os estudantes podem simplesmente calcular o juro correspondente a um ano e adicioná-lo, sem o uso de fórmula, ao capital inicial para obter o montante.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

2. $M = \text{R\$ } 26.500{,}00$; $C = \text{R\$ } 24.000{,}00$; $n = 1$ e $i = ?$.

$M = C + niC$

$26\,500 = 24\,000 + 1 \cdot i \cdot 24\,000$

$26\,500 - 24\,000 = 24\,000i$

$2\,500 = 24\,000i$

$i = \dfrac{2\,500}{24\,000}$

$i \cong 0{,}1042 = 10{,}42\%$

Portanto, a taxa foi de aproximadamente 10,42% a.a.

3. Seja x o capital usado para comprar o terreno. Assim, temos $M = 2x$, $C = x$, $n = 4$ e $i = ?$.

$M = C + niC$

$2x = x + 4 \cdot i \cdot x$

$2x - x = 4xi \Rightarrow x = 4xi$

$i = \dfrac{x}{4x}$

$i = \dfrac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

Logo, a taxa foi de 25% a.a.

Portanto, no período de 4 anos a taxa foi de 100%.

4. Sabemos que:

$C = C$

$M = 3C$

$i = 8\% = 0{,}08$

$M = C + niC$

$3C = C + n \cdot 0{,}08 \cdot C$

$3C - C = 0{,}08Cn \Rightarrow 2C = 0{,}08Cn$

$n = \dfrac{2C}{0{,}08C} = \dfrac{2}{0{,}08} = 25$

Portanto, o capital irá triplicar em 25 anos.

5. Sabemos que:

$C = C$

$M = 2C$

$i = 0{,}8\% = 0{,}008$

$M = C + niC$

$2C = C + n \cdot 0{,}008 \cdot C$

$2C - C = 0{,}008Cn \Rightarrow C = 0{,}008Cn$

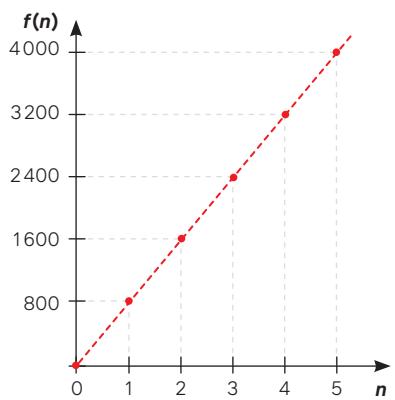
$n = \dfrac{C}{0{,}008C} = \dfrac{1}{0{,}008} = 125$

Portanto, o capital irá duplicar em 125 meses.

6. **a)** $J = f(n) = n \cdot 0{,}1 \cdot 8\,000 = 800n$

b)

	A	B
1	**n**	$\boldsymbol{J = f(n) = 800n}$
2	0	$J = f(0) = 800 \cdot 0 = 0$
3	1	$J = f(1) = 800 \cdot 1 = 800$
4	2	$J = f(2) = 800 \cdot 2 = 1600$
5	3	$J = f(3) = 800 \cdot 3 = 2400$
6	4	$J = f(4) = 800 \cdot 4 = 3200$
7	5	$J = f(5) = 800 \cdot 5 = 4000$

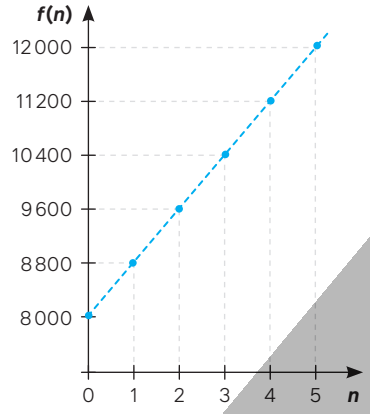


DAE

c) $M = f(n) = 8000 + 800n$

d)

	A	B
1	**n**	$\boldsymbol{M = f(n) = 8000 + 800n}$
2	0	$M = f(0) = 8000 + 800 \cdot 0 = 8000$
3	1	$M = f(1) = 8000 + 800 \cdot 1 = 8800$
4	2	$M = f(2) = 8000 + 800 \cdot 2 = 9600$
5	3	$M = f(3) = 8000 + 800 \cdot 3 = 10400$
6	4	$M = f(4) = 8000 + 800 \cdot 4 = 11200$
7	5	$M = f(5) = 8000 + 800 \cdot 5 = 12000$



DAE

7. Seja p o valor do aparelho celular. Comprando à vista, é dado 10% de desconto, ou seja, o aparelho celular passa a custar $0{,}9p$. Comprando a prazo, será pago em duas parcelas iguais e sem desconto, ou seja, $\frac{p}{2}$ no ato da compra e $\frac{p}{2}$ após um mês. Assim:

$C = 0{,}9p - \frac{p}{2} = \frac{2}{5}p$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Por esses $\frac{2}{5}p$, a pessoa deverá pagar $\frac{p}{2}$ após um mês. Assim, temos $J = 0{,}1p$; $C = \frac{2}{5}p$; $n = 1$ e $i = ?$. Logo:

$J = niC$

$i = \frac{J}{Cn}$

$i = \frac{0{,}1p}{\frac{2}{5}p \cdot 1}$

$i = \frac{\frac{1}{10}p}{\frac{2}{5}p}$

$i = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

Portanto, será paga uma taxa de 25% a.m.

Alternativa **e**.

8. Vamos determinar o capital aplicado por Sandra na compra de um título público. Temos que $M = $ = R$ 10.000,00; $i = 10\% = 0{,}1$; $n = 1$ e $C = ?$. Então:

$M = C + niC$

$10000 = C + 1 \cdot 0{,}1 \cdot C$

$10000 = C + 0{,}1C$

$10000 = 1{,}1C$

$C = \frac{10000}{1{,}1} \cong 9090{,}91$

Logo, Sandra fez uma aplicação de R$ 9.090,91.

Como já sabemos o valor do capital aplicado, vamos determinar os juros auferidos na aplicação.

$J = M - C$

$J = 10000 - 9090{,}91 \Rightarrow J = 909{,}09$

Portanto, podemos concluir que os juros auferidos foram de R$ 909,09.

Alternativa **d**.

9. Calculamos os juros que Bruno vai pagar a Edson, sabendo que $C =$ R$ 10.000,00, $i = 5\% = 0{,}05$ e $n = 1$.

$J = niC$

$J = 1 \cdot 0{,}05 \cdot 10000 \Rightarrow J = 500$

Logo, Bruno pagará a Edson R$ 500,00 de juros.

Calculamos os juros que Bruno vai pagar a Carlos, sabendo que $C =$ R$ 10.000,00, $i = 4\% = 0{,}04$ e $n = 1$.

$J = niC$

$J = 1 \cdot 0{,}04 \cdot 10000 \Rightarrow J = 400$

Logo, Bruno pagará a Carlos R$ 400,00 de juros.

Calculamos os juros que correspondem à valorização da casa, sabendo que $C =$ R$ 50.000,00, $i = 3\% = 0{,}03$ e $n = 1$.

$J = niC$

$J = 1 \cdot 0{,}03 \cdot 50000 \Rightarrow J = 1500$

Logo, a casa teve uma valorização de R$ 1.500,00, ou seja, a venda dela deu lucro de R$ 1.500,00.

Mas Bruno pagou a Edson e a Carlos pelo empréstimo. Assim, vamos determinar o lucro de Bruno.

R$ 1.500,00 − R$ 500,00 − R$ 400,00 = R$ 600,00

Portanto, Bruno obteve um lucro de R$ 600,00.

Alternativa **c**.

10. O imóvel comprado em São Paulo valorizou 10% e temos $C = x$, $i = 10\% = 0{,}1$, $n = 1$ e $M = $ = R$ 495.000,00.

$M = C + niC$

$495000 = x + 1 \cdot 0{,}1 \cdot x \Rightarrow 495000 = 1{,}1x$

$x = \frac{495000}{1{,}1} = 450000$

Portanto, o valor de x é R$ 450.000,00.

O imóvel comprado em Porto Alegre desvalorizou 10% e temos $C = y$, $i = -10\% = -0{,}1$, $n = 1$ e $M =$ R$ 495.000,00.

$M = C + niC$

$495\,000 = y + 1 \cdot (-0{,}1) \cdot y$

$495\,000 = y - 0{,}1y \Rightarrow 495\,000 = 0{,}9y$

$$y = \frac{495\,000}{0{,}9} = 550\,000$$

Portanto, o valor de y é R$ 550.000,00.

Alternativa **b**.

11. O carro à vista custa R$ 20.000,00. Júnior optou por dar uma entrada de R$ 2.000,00 e financiou o restante, R$ 18.000,00 a uma taxa de 10% ao ano, durante 3 anos, divididos em 36 parcelas iguais. Vamos determinar o valor das parcelas.

$M = C + niC$

$M = 18\,000 + 3 \cdot 0{,}1 \cdot 18\,000$

$M = 18\,000 + 5\,400 \Rightarrow M = 23\,400$

Agora dividimos o montante por 36 (número de parcelas):

$$p = \frac{M}{36} = \frac{23\,400}{36} = 650$$

Portanto, R$ 650,00 é o valor da parcela.

Alternativa **e**.

12. Temos $C =$ R$ 500,00; $n = 5$; $M =$ R$ 600,00 e $i = ?$.

$M = C + niC$

$600 = 500 + 5 \cdot i \cdot 500$

$600 - 500 = 2\,500i$

$$i = \frac{100}{2\,500} = \frac{1}{25} = 0{,}04 = 4\%$$

Portanto, a taxa aplicada foi de 4% a.m.

Alternativa **d.**

13. Resposta pessoal.

Esse tipo de questão possibilita aos estudantes pensarem a respeito de valores próximos aos da realidade e os leva a analisarem os juros (percentuais). Ao final, é importante perceberem se a taxa de juros cobrada é adequada, no contexto de cada um, tendo como referência, por exemplo, índices de aplicações financeiras que podem pesquisar.

Página 31

Para pensar e discutir

1. Não, pois o montante é calculado com taxa de juros compostos, isto é, juros sobre juros.

2. Não. A taxa de 1% é calculada sobre o montante correspondente à dívida.

3. Temos:

$C =$ R$ 40.000,00; $i = 1\% = 0{,}01$; $n = 5$

$M = C + niC$

$M = 40\,000 + 5 \cdot 0{,}01 \cdot 40\,000$

$M = 40\,000 + 2\,000 \Rightarrow M = 42\,000$

Portanto, o montante a juros simples seria de R$ 42.000,00.

Página 32

Para explorar

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1.

Planilha com a modalidade juros simples

	A	B	C	D	E
1	PERÍODO	CAPITAL	TAXA	JUROS SIMPLES	MONTANTE
2	1	R$ 50.000,00	2%	R$ 1.000,00	R$ 51.000,00
3	2	R$ 50.000,00	2%	R$ 1.000,00	R$ 52.000,00
4	3	R$ 50.000,00	2%	R$ 1.000,00	R$ 53.000,00
5	4	R$ 50.000,00	2%	R$ 1.000,00	R$ 54.000,00
6	5	R$ 50.000,00	2%	R$ 1.000,00	R$ 55.000,00
7	6	R$ 50.000,00	2%	R$ 1.000,00	R$ 56.000,00
8	7	R$ 50.000,00	2%	R$ 1.000,00	R$ 57.000,00
9	8	R$ 50.000,00	2%	R$ 1.000,00	R$ 58.000,00
10	9	R$ 50.000,00	2%	R$ 1.000,00	R$ 59.000,00
11	10	R$ 50.000,00	2%	R$ 1.000,00	R$ 60.000,00

Planilha com a modalidade de juros compostos

	A	B	C	D	E
1	PERÍODO	CAPITAL	TAXA	JUROS SIMPLES	MONTANTE
2	1	R$ 50.000,00	2%	R$ 1.000,00	R$ 51.000,00
3	2	R$ 51.000,00	2%	R$ 1.020,00	R$ 52.020,00
4	3	R$ 52.020,00	2%	R$ 1.040,40	R$ 53.060,40
5	4	R$ 53.060,40	2%	R$ 1.061,21	R$ 54.121,61
6	5	R$ 54.121,61	2%	R$ 1.082,43	R$ 55.204,04
7	6	R$ 55.204,04	2%	R$ 1.104,08	R$ 56.308,12
8	7	R$ 56.308,12	2%	R$ 1.126,16	R$ 57.434,28
9	8	R$ 57.434,28	2%	R$ 1.148,69	R$ 58.582,97
10	9	R$ 58.582,97	2%	R$ 1.171,66	R$ 59.754,63
11	10	R$ 59.754,63	2%	R$ 1.195,09	R$ 60.949,72

2. Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal. No texto, é importante verificar se os estudantes evidenciam a diferença no crescimento dos montantes nas duas modalidades, observando que em uma a taxa de crescimento é constante (juros simples) enquanto na outra isso não ocorre. Eles devem observar que na modalidade de juros simples os montantes mês a mês aumentam R$ 1.000,00, enquanto na modalidade de juros compostos, em cada mês o montante é o do mês anterior multiplicado por 1,02.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 33

Para pensar e discutir

1. Sim. É importante os estudantes fazerem a verificação.

2. Numa calculadora científica (acessível em aplicativos de celulares) encontre a tecla x^y. Digite inicialmente 1,005, aperte a tecla x^y, depois digite 6 e, por último, aperte a tecla $=$.

Para pensar e discutir

1. Basta digitar 1,310796 e apertar duas vezes consecutivas a tecla de raiz quadrada.

2. Utilizando a tecla $\sqrt[y]{x}$ Para isso, digite 1,310796, aperte a tecla $\sqrt[y]{x}$ digite 4 e depois aperte a tecla $=$.

Página 34

Atividades

Antes de iniciar as atividades propostas, é recomendável observar se os exemplos inseridos na teoria foram devidamente discutidos nas seções **Para pensar e discutir**. Encaminhe então as atividades de 1 a 3 para serem feitas individualmente, em sala de aula, como forma de verificação da aprendizagem. O uso de calculadoras nessas atividades é um facilitador.

1. a) Temos $C = \text{R\$ } 20.000,00$; $i = 10\% = 0,1$; $n = 4$ e $M_4 = ?$.

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_4 = 20\,000 \cdot (1 + 0,1)^4$

$M_4 = 20\,000 \cdot (1,1)^4$

$M_4 = 20\,000 \cdot 1,4641$

$M_4 = 29\,282$

Portanto, R$ 29.282,00 é o montante dessa aplicação após 4 anos.

b) $J = M - C$

$J = 29\,282,00 - 20\,000$

$J = 9\,282$

Portanto, R$ 9.282,00 é o rendimento dessa aplicação após 4 anos.

c) $P = \dfrac{J}{C}$

$P = \dfrac{9\,282}{20\,000} = 0,4641 = 46,41\%$

Portanto, o rendimento obtido representa 46,41% de ganho em relação ao capital aplicado.

2. a) Temos $C = \text{R\$ } 100.000,00$; $i = 14\% = 0,14$; $n = 5$ e $M_5 = ?$.

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$
$M_5 = 100\,000 \cdot (1 + 0{,}14)^5$
$M_5 = 100\,000 \cdot (1{,}14)^5$
$M_5 \cong 192\,541{,}46$
Portanto, R$ 192.541,46 é o montante dessa aplicação após 5 anos.

b) Primeiro vamos determinar os juros obtidos pela aplicação:
$J = M - C$
$J = 192\,541{,}46 - 100\,000$
$J = 92\,541{,}46$
Logo, R$ 92.541,46 é o rendimento da aplicação após 5 anos.
Agora vamos determinar o percentual de valorização desse terreno.

$$p = \frac{J}{C}$$

$$p = \frac{92\,541{,}46}{100\,000} \cong 0{,}9254 = 92{,}54\%$$

Portanto, o rendimento obtido representa aproximadamente 92,54% de ganho em relação ao capital aplicado.

3. a) Temos $i = 1{,}2\% = 0{,}012$; $C =$ R$ 1.500,00; $n = 10$ e $M_{10} = ?$.
$M_n = C \cdot (1 + i)^n$
$M_{10} = 1\,500 \cdot (1 + 0{,}012)^{10}$
$M_{10} = 1\,500 \cdot (1{,}012)^{10}$
$M_{10} \cong 1\,690{,}04$
Portanto, o montante dessa aplicação após 10 meses é de aproximadamente R$ 1.690,04.

b) Primeiro vamos determinar os juros obtidos pela aplicação:
$J = M - C$
$J = 1\,690{,}04 - 1\,500$
$J = 190{,}04$
Logo, R$ 190,04 é o rendimento dessa aplicação após 10 meses.
Agora vamos determinar quantos por cento o capital investido aumentou.

$$P = \frac{J}{C}$$

$$P = \frac{190{,}04}{1\,500} \cong 0{,}1267 = 12{,}67\%$$

Portanto, o rendimento obtido representa aproximadamente 12,67% de ganho em relação ao capital aplicado.

4. Resposta pessoal. O objetivo desta atividade é levar os estudantes a compararem investimentos. Comente que há investimentos de alto risco e outros mais conservadores. As questões auxiliam o desenvolvimento de habilidades relacionadas à Educação Financeira.

Comentário das atividades de 5 a 7: Encaminhe as atividades para serem resolvidas em duplas, pois os estudantes trocarão ideias sobre procedimentos e estratégias de cálculo no uso da calculadora. Apresentamos a seguir procedimentos de como essas atividades podem ser resolvidas, entretanto, espera-se que os estudantes utilizem estratégias próprias; incentive-os a compartilharem seus métodos com os colegas.

5. a) Temos $C =$ R$ 5.000,00; $M =$ R$ 5.306,04; $n = 3$ e $i = ?$.
$M_n = C \cdot (1 + i)^n$
$5\,306{,}04 = 5\,000 \cdot (1 + i)^3$

$$\frac{5\,306{,}04}{5\,000} = (1 + i)^3$$

$1{,}061208 = (1 + i)^3$

$$\sqrt[3]{1{,}6061208} = 1 + i$$

$1{,}02 = 1 + i$
$i = 1{,}02 - 1 = 0{,}02 = 2\%$
Portanto, o valor da taxa é de 2% ao mês.

b) Temos $i = 2\% = 0{,}02$; $C =$ R$ 5000,00; $n = 12$ e $M_{12} = ?$.
$M_n = C \cdot (1 + i)^n$
$M_{12} = 5\,000 \cdot (1 + 0{,}02)^{12}$
$M_{12} = 5\,000 \cdot (1{,}02)^{12}$
$M_{12} \cong 6\,341{,}21$
Portanto, o montante dessa dívida após 1 ano é aproximadamente R$ 6.341,21, caso não seja paga.

c) Primeiro vamos determinar os juros obtidos pela dívida:
$J = M - C$
$J = 6\,341{,}21 - 5\,000 \Rightarrow J = 1\,341{,}21$
Logo, os juros da dívida após 12 meses são de R$ 1.341,21.
Agora vamos determinar o percentual em relação ao valor inicial da dívida.

$$P = \frac{J}{C}$$

$$P = \frac{1341{,}21}{5\,000} \cong 0{,}27 = 27\%$$

Portanto, a dívida aumentou aproximadamente 27% em 12 meses.

6. Vamos calcular qual banco vai cobrar mais juros.
Banco I: $C =$ R$ 400.000,00; $i = 3\% = 0{,}03$; $n = 16$ e $M_{12} = ?$.
$M_n = C \cdot (1 + i)^n$
$M_{16} = 400\,000 \cdot (1 + 0{,}03)^{16}$
$M_{16} = 400\,000 \cdot (1{,}03)^{16}$
$M_{16} \cong 641\,882{,}58$
Agora vamos determinar os juros obtidos por esse empréstimo.
$J = M - C = 641\,882{,}58 - 400\,000 = 241\,882{,}58$
Logo, no banco I o montante é de aproximadamente R$ 641.882,58 e os juros são de R$ 241.882,58.
Banco II: $C =$ R$ 400.000,00; $i = 4\% = 0{,}04$; $n = 12$ e $M = ?$.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_{12} = 400\,000 \cdot (1 + 0{,}04)^{12}$

$M_{12} = 400\,000 \cdot (1{,}04)^{12}$

$M_{12} \cong 640\,412{,}89$

Agora vamos determinar os juros obtidos por esse empréstimo.

$J = M - C = 640\,412{,}89 - 400\,000 = 240\,412{,}89$

Logo, no banco II o montante é de aproximadamente R$ 640.412,89 e os juros são de R$ 240.412,89.

Portanto, Luciana deve escolher o banco II.

7. Seja C o valor da fatura do cartão de crédito. Vamos determinar os juros da dívida, sabendo que o percentual é $P = 33{,}1\% = 0{,}331$.

$P = \frac{J}{C}$

$0{,}331 = \frac{J}{C}$

$J = 0{,}331C$

Agora vamos determinar o montante dessa dívida.

$M = C + J$

$M = C + 0{,}331C = 1{,}331C$

Por fim, vamos determinar a taxa de juros cobrada em 3 meses.

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$1{,}331C = C \cdot (1 + i)^3$

$\frac{1{,}331C}{C} = (1 + i)^3$

$1{,}331 = (1 + i)^3$

$\sqrt[3]{1{,}331} = 1 + i$

$1{,}1 = 1 + i$

$i = 1{,}1 - 1 = 0{,}1 = 10\%$

Portanto, 10% ao mês é a taxa de juros mensais cobrada.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Opção II:

	A	B	C	D	E	F
1	**PERÍODO**	**CAPITAL INVESTIDO**	**TAXA**	**JUROS COMPOSTO**	**MONTANTE**	**TOTAL**
2	0	R$ 4.500,00	0,5%	–	–	R$ 4.500,00
3	1	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 22,50	R$ 4.522,50	R$ 9.022,50
4	2	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 45,11	R$ 9.022,50	R$ 13.567,61
5	3	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 67,84	R$ 13.567,61	R$ 18.135,45
6	4	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 90,68	R$ 18.135,45	R$ 22.726,13
7	5	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 113,63	R$ 22.726,13	R$ 27.339,76
8	6	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 136,70	R$ 27.339,76	R$ 31.976,46

(continua)

8. Resposta possível:

Considerando a taxa do cartão de crédito de 7,75% ao mês, temos $C = \text{R\$ } 5.000{,}00$; $i = 7{,}75\% = 0{,}0775$; $n = 3$ e $M_3 = ?$.

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_3 = 5\,000 \cdot (1 + 0{,}0775)^3$

$M_3 = 5\,000 \cdot (1{,}0775)^3$

$M_3 \cong 6\,254{,}92$

Portanto, se a dívida não for paga em 3 meses após o vencimento, considerando essa taxa de juros mensal, o montante será de R$ 6.254,92.

Esta atividade é importante porque alerta os estudantes para o perigo do pagamento da fatura do cartão de crédito fora do prazo. Sugira a eles que elaborem situações de não pagamento do cartão de crédito com outros valores e outras quantidades de meses para verificarem o crescimento acentuado da dívida diante de uma taxa elevada de juros.

9. **Opção I:** $C = \text{R\$ } 750.000{,}00$; $i = 0{,}5\% = 0{,}005$; $n = 12$ e $M_{12} = ?$.

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_{12} = 750\,000 \cdot (1 + 0{,}005)^{12}$

$M_{12} = 750\,000 \cdot (1{,}005)^{12}$

$M_{12} \cong 796\,258{,}36$

Agora vamos determinar os juros obtidos nessa aplicação.

$J = M - C = 796\,258{,}36 - 750\,000 = 46.258{,}36$

EVENTO	VALORES
Total investido	R$ 750.000,00
Total ganho em juros	R$ 46.258,36
TOTAL	R$ 796.258,36

(continuação)

	A	B	C	D	E	F
1	PERÍODO	CAPITAL INVESTIDO	TAXA	JUROS COMPOSTO	MONTANTE	TOTAL
9	7	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 159,88	R$ 31.976,46	R$ 36.636,34
10	8	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 183,18	R$ 36.636,34	R$ 41.319,52
11	9	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 206,60	R$ 41.319,52	R$ 46.026,12
12	10	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 230,13	R$ 46.026,12	R$ 50.756,25
13	11	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 253,78	R$ 50.756,25	R$ 55.510,03
14	12	R$ 4.500,00	0,5%	R$ 277,55	R$ 55.510,03	R$ 60.287,58
15	Total investido	R$ 58.500,00	Total ganho em juros	R$ 1.787,58		

EVENTO	VALORES
Total investido	R$ 58.500,00
Total ganho em juros	R$ 1.787,58
TOTAL	R$ 60.287,58

Espera-se que os estudantes percebam que alugar a casa é a melhor decisão a ser tomada, pois o rendimento total é maior. Também nesse caso eles podem simular situações similares para fazer comparações.

10. Temos $C = \text{R\$ } 3.000{,}00$; $i = 3\% = 0{,}03$; $n = 8$ e $M = ?$.

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_8 = 3000 \cdot (1 + 0{,}03)^8$

$M_8 = 3000 \cdot (1{,}03)^8$

$M_8 = 3000 \cdot 1{,}27$

$M_8 = 3810$

Portanto, o montante a ser devolvido será R$ 3.810,00.

Alternativa **e**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 36

Para pensar e discutir

1. Temos $i_1 = 2\% = 0{,}02$; $i_2 = 3\% = 0{,}03$; $i_3 = 1\% = 0{,}01$ e $i_4 = 1{,}5\% = 0{,}015$. Então:

$M_4 = C \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \cdot (1 + i_4)$

$M_4 = C \cdot (1 + 0{,}02) \cdot (1 + 0{,}03) \cdot (1 + 0{,}01) \cdot (1 + 0{,}015)$

$M_4 = C \cdot (1{,}02) \cdot (1{,}03) \cdot (1{,}01) \cdot (1{,}015)$

$M_4 = C \cdot (1 + 0{,}02) \cdot (1 + 0{,}03) \cdot (1 + 0{,}01) \cdot (1 + 0{,}015)$

$M_4 \cong C \cdot 1{,}077 = C + 0{,}077C = C + 7{,}7\%C$

Portanto, aumentos sucessivos de 2%, 3%, 1% e 1,5% correspondem a um único aumento de 7,7%.

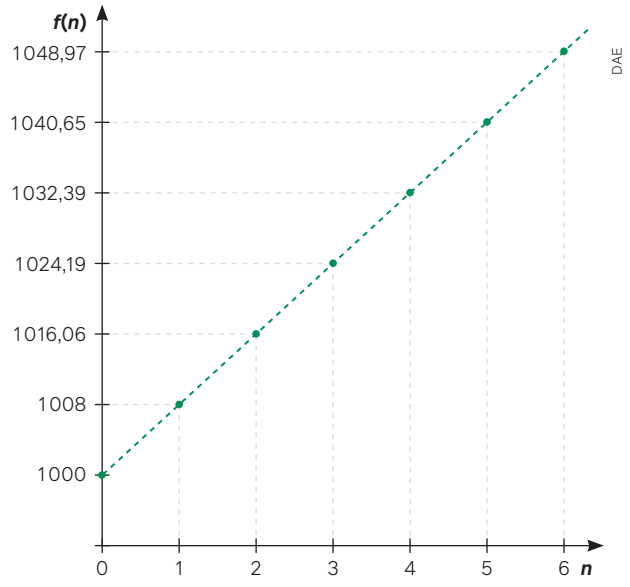
2. Aproximadamente 1,91%, pois $1{,}007 \cdot 1{,}012 = 1{,}0191 = 1 + 0{,}0191$.

Aproveite para explicar mais detalhadamente esse procedimento aos estudantes: ao multiplicar determinado valor por 1,007 o valor é "atualizado" com um acréscimo de 0,7%. Da mesma forma, ao multiplicar o resultado por 1,012 o valor é novamente "atualizado" com um acréscimo de 12%. Dessa maneira, a multiplicação $1{,}007 \cdot 1{,}012$ representa os dois aumentos sucessivos.

Página 37

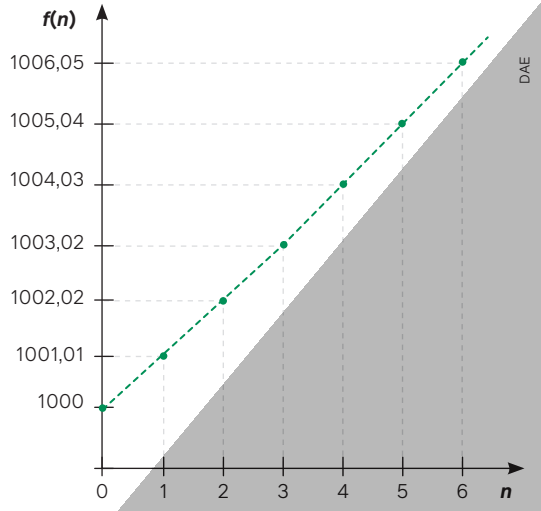
Para explorar

1.



2.

	A	B
1	n	$M = f(n) = 1000 + 1{,}008 \cdot n$
2	0	1000,0
3	1	1001,01
4	2	1002,02
5	3	1003,02
6	4	1004,03
7	5	1005,04
8	6	1006,05



3. Resposta pessoal.

Espera-se que os estudantes percebam que na modalidade de juros simples o montante cresce linearmente, e, na modalidade de juros compostos o crescimento é exponencial.

Esta atividade compõe parte da avaliação do estudo da unidade.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 38

Para pensar e discutir

1. A taxa mensal equivalente é de aproximadamente 0,95%.

$(1 + i)^{12} = 1{,}12$

$1 + i = \sqrt[12]{1{,}12}$

$1 + i \cong 1{,}0095$

$i \cong 0{,}0095 = 0{,}95\%$

Logo, 12% a.a. corresponde a aproximadamente 0,95% a.m.

2. A taxa é de aproximadamente 12,68% a.a. Para calcular, basta fazer $(0 + 0{,}01)^{12}$ obtendo o valor 1,1268.

Multiplicar um número por 1,1268 é aumentar esse número em 12,68%.

Atividades

1. Temos $i_1 = 4{,}31\%$; $i_2 = 3{,}75\%$; $i_3 = 2{,}95\%$ e $i_4 = 6{,}29\%$. Então:

$i = (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \cdot (1 + i_4)$

$i = (1 + 0{,}0431) \cdot (1 + 0{,}0375) \cdot (1 + 0{,}0295) \cdot (1 + 0{,}0629)$

$i = 1{,}0431 \cdot 1{,}0375 \cdot 1{,}0295 \cdot 1{,}0629$

$i \cong 1{,}1842 = 1 + 0{,}1842$

Portanto, a taxa da inflação acumulada é aproximadamente 18,42%.

Aqui é importante reforçar para os estudantes que bastaria fazer a multiplicação:

$i = 1{,}0431 \cdot 1{,}0375 \cdot 1{,}0295 \cdot 1{,}0629$.

2. Resposta pessoal. Exemplo:

IPC de outubro de 2019 a março de 2020:

Mês/Ano	Índice do mês (em %)	Índice acumulado no período (em %)
out./19	0,16	0,16
nov./19	0,68	0,84
dez./19	0,94	1,78
jan./20	0,29	2,07
fev./20	0,11	2,18
mar./20	0,1	2,28

Fonte: FERNANDO. Índice de preços ao consumidor - IPC. *Portal Brasil*, [s. *l.*], c2020. https://www.portalbrasil.net/ipc/. Acesso em: 19 jun. 2020.

Oriente os estudantes para que comparem as pesquisas que fizeram e incentive-os a verificar o real significado desse índice (o que ele mede, o que altera na vida das pessoas economicamente). Você pode propor que pesquisem o assunto e escrevam um pequeno texto explicando a relação do IPC com a vida das pessoas.

O IPC mede a variação de preços para o consumidor com base nos gastos de quem ganha de um a 20 salários mínimos.

3. Maria dispõe de um capital C = R$ 855,00. Vamos analisar as opções e verificar qual oferece maior vantagem financeira.

Opção 1

5% de R$ 900,00 = $0{,}05 \cdot 900 = 45$

Preço do computador à vista:

P = R$ 900,00 − R$ 45,00 = R$ 855,00

$C - P$ = R$ 855,00 − R$ 855,00 = 0

Logo, Maria tem o dinheiro para comprar o computador à vista e não sobrará dinheiro se optar pela opção 1.

Opção 2

Temos $C = R\$\ 855{,}00$; $i = 1\%$ a.m.; $n = 4$ e $M = ?$. Então:

$M_4 = C \cdot (1 + i)^4 = 855 \cdot (1 + 0{,}01)^4 = 855 \cdot 1{,}01^4 \cong$
$\cong 889{,}72$

Preço do computador a prazo: $P = R\$\ 900{,}00$

$M_4 = R\$\ 889{,}72 - R\$\ 900{,}00 = -R\$\ 10{,}28$

Logo, Maria precisará desembolsar mais R$ 10,28 para comprar o computador com a opção 2.

Opção 3

Valor da prestação: $V_p = R\$\ 225{,}00$.

Temos $C_1 = R\$\ 855{,}00$; $i = 1\%$ a.m.; $n = 1$ e $M_1 = ?$.

$M_1 = C_1 \cdot (1 + i)^1 = 855 \cdot (1 + 0{,}01)^1 = 855 \cdot 1{,}01 =$
$= 863{,}55$

$M_1 - V_p = R\$\ 863{,}55 - R\$\ 225{,}00 = R\$\ 638{,}55$

Temos que o novo capital investido corresponde ao montante que sobrou do mês anterior, ou seja, $C_2 = R\$\ 638{,}55$. Temos também $i = 1\%$ a.m.; $n = 1$ e $M_2 = ?$.

$M_2 = C_2 \cdot (1 + i)^1 = 638{,}55 \cdot (1 + 0{,}01)^1 =$
$= 638{,}55 \cdot 1{,}01 \cong 644{,}94$

$M_2 - V_p = R\$\ 644{,}94 - R\$\ 225{,}00 = R\$\ 419{,}94$

Temos $C_3 = R\$\ 419{,}94$; $i = 1\%$ a.m.; $n = 1$ e $M_3 = ?$.

$M_3 = C_3 \cdot (1 + i)^1 = 419{,}94 \cdot (1 + 0{,}01)^1 = 419{,}9 \cdot 1{,}01 \cong$
$\cong 424{,}14$

$M_3 - V_p = R\$\ 424{,}14 - R\$\ 225{,}00 = R\$\ 199{,}14$

Temos $C_4 = R\$\ 199{,}14$; $i = 1\%$ a.m.; $n = 1$ e $M_4 = ?$.

$M_4 = C_4 \cdot (1 + i)^1 = 199{,}14 \cdot (1 + 0{,}01)^1 = 199{,}14 \cdot 1{,}01 \cong$
$\cong 201{,}13$

$M_4 - V_p = R\$\ 201{,}13 - R\$\ 225{,}00 = -R\$\ 23{,}87$

Logo, Maria precisará desembolsar mais R$ 23,87 para comprar o computador com a opção 3.

Opção 4

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Temos $C = R\$\ 855{,}00$; $i = 2\%$ a.m.; $n = 3$ e $M = ?$.

$M_3 = C \cdot (1 + i)^3 = 855 \cdot (1 + 0{,}02)^3 = 855 \cdot 1{,}02^3 \cong$
$\cong 907{,}33$

Preço do computador a prazo: $P = R\$\ 900{,}00$

$M_3 = R\$\ 907{,}33 - R\$\ 900{,}00 = R\$\ 7{,}33$

Logo, Maria terá lucro de R$ 7,33 com a opção 4.

Portanto, Maria terá maior vantagem financeira na opção 4.

Alternativa **c**.

4. $1{,}08 = (1 + i)^{12}$

$\sqrt[12]{1{,}08} = 1 + i$

$1{,}00643 \cong 1 + i$

$i = 1{,}00643 - 1$

$i = 0{,}00643 = 0{,}643\%$

Portanto, a taxa é de aproximadamente 0,643% ao mês.

5. $(1 + i)^6 = 1{,}05$

$1 + i = \sqrt[6]{1{,}05}$

$1 + i \cong 1{,}00816$

$i = 1{,}00816 - 1$

$i = 0{,}00816 = 0{,}816\%$

Portanto, a taxa é de aproximadamente 0,816% ao mês.

6. Temos $C = R\$\ 45.000{,}00$; $i_1 = 1\% = 0{,}01$;
$i_2 = 2\% = 0{,}02$; $n = n_1 = n_2 = 6$; $M = ?$.

$M = C \cdot (1 + i_1)n \cdot (1 + i_2)n$

$M = 45\,000 \cdot (1 + 0{,}01)^6 \cdot (1 + 0{,}02)^6$

$M \cong 53\,795$

Portanto, o montante será de aproximadamente R$ 53.795,00.

7. Investimento A

$(1 + 0{,}03)^{12} = 1{,}03^{12} \cong 1{,}426 = 1 + 0{,}426$

Portanto, o investimento A tem rentabilidade anual de aproximadamente 42,6%.

Investimento B

$(1 + 0{,}36)^1 = 1{,}36 = 1 + 0{,}36$

Portanto, o investimento B tem rentabilidade anual de 36%.

Investimento C

$(1 + 0{,}18)^2 = 1{,}18^2 = 1{,}3924 = 1 + 0{,}3924$

Portanto, o investimento C tem rentabilidade anual de 39,24%.

A pessoa deve escolher o investimento A, pois a rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.

Alternativa **c**.

Página 39

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal.

Os estudantes devem pesquisar para responder a essas três questões. É importante destinar um bom tempo para a discussão das respostas que apresentarão. O debate pode ser feito em pequenos grupos. A atividade contribui efetivamente para a Educação Financeira dos jovens.

Página 40

Para pensar e discutir

O objetivo dessas questões é verificar se os estudantes compreenderam a situação exemplificada. Caso não tenham entendido, elabore outra situação similar e peça a eles que a analisem.

1. Basta dividir 900 por $1{,}04^1$.

2. Basta dividir 900 por $1{,}04^2$.
3. Basta dividir 900 por $1{,}04^3$.

Página 41

Para explorar

1. **1º mês:** R$ 650,00 representa o valor da 1ª parcela com juros de 3%, isto é, representa o montante de um valor V_1 após 1 mês a juros compostos. Cálculo de V_1:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$650 = V_1 \cdot (1 + 0{,}03)^1$

$650 = V_1 \cdot 1{,}03^1$

$V_1 = \dfrac{650}{1{,}03^1}$

2º mês: R$ 650,00 representa o valor da 2ª parcela com juros de 3%, isto é, representa o montante de um valor V_2 após 2 meses a juros compostos. Cálculo de V_2:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$650 = V_2 \cdot (1 + 0{,}03)^2$

$650 = V_2 \cdot 1{,}03^2$

$V_2 = \dfrac{650}{1{,}03^2}$

3º mês: R$ 650,00 representa o valor da 3ª parcela com juros de 3%, isto é, representa o montante de um valor V_3 após 3 meses a juros compostos. Cálculo de V_3:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$650 = V_3 \cdot (1 + 0{,}03)^3$

$650 = V_3 \cdot 1{,}03^3$

$V_3 = \dfrac{650}{1{,}03^3}$

4º mês: R$ 650,00 representa o valor da 4ª parcela com juros de 3%, isto é, representa o montante de um valor V_4 após 4 meses a juros compostos. Cálculo de V_4:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$650 = V_4 \cdot (1 + 0{,}03)^4$

$650 = V_4 \cdot 1{,}03^4$

$V_4 = \dfrac{650}{1{,}03^4}$

5º mês: R$ 650,00 representa o valor da 5ª parcela com juros de 3%, isto é, representa o montante de um valor V_5 após 5 meses a juros compostos. Cálculo de V_5:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$650 = V_5 \cdot (1 + 0{,}03)^5$

$650 = V_5 \cdot 1{,}03^1$

$V_5 = \dfrac{650}{1{,}03^5}$

O valor à vista, nas condições apresentadas, é dado por:

$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5$

$V = \dfrac{650}{1{,}03^1} + \dfrac{650}{1{,}03^2} + \dfrac{650}{1{,}03^3} + \dfrac{650}{1{,}03^4} + \dfrac{650}{1{,}03^5}$

$V \cong 631{,}07 + 612{,}69 + 594{,}84 + 577{,}52 + 560{,}70$

$V = 2\,976{,}82$

Portanto, o valor à vista desse computador é R$ 2.976,82.

2. Com auxílio de uma planilha eletrônica determinaremos o valor de cada parcela na compra de um automóvel.

	A	B	C	D	E
1	1º mês	1,5%	1	0,985	
2	2º mês	1,5%	2	0,971	
3	3º mês	1,5%	3	0,956	
4	4º mês	1,5%	4	0,942	
5	5º mês	1,5%	5	0,928	
6	6º mês	1,5%	6	0,915	
7	7º mês	1,5%	7	0,901	
8	8º mês	1,5%	8	0,888	
9	9º mês	1,5%	9	0,875	
10	10º mês	1,5%	10	0,862	
11	11º mês	1,5%	11	0,849	
12	12º mês	1,5%	12	0,836	
13	13º mês	1,5%	13	0,824	
14	14º mês	1,5%	14	0,812	
15	15º mês	1,5%	15	0,800	
16	16º mês	1,5%	16	0,788	
17	17º mês	1,5%	17	0,776	
18	18º mês	1,5%	18	0,765	
19	19º mês	1,5%	19	0,754	
20	20º mês	1,5%	20	0,742	
21	21º mês	1,5%	21	0,731	
22	22º mês	1,5%	22	0,721	
23	23º mês	1,5%	23	0,710	
24	24º mês	1,5%	24	0,700	
			TOTAL	20,030	

E	F	G
	Valor do carro a vista	Valor da parcela
	R$ 25.000,00	R$ 1.248,10

Portanto, serão 24 parcelas iguais de R$ 1.248,10.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 42

Atividades

Comentário das atividades de 1 a 8: Em algumas dessas atividades, nos próprios enunciados há a sugestão de encaminhamento em duplas. Entendemos que nas demais essa estratégia também pode ser utilizada, pois o assunto não é imediato, além de exigir cálculos com uso da calculadora. Os estudantes refletirão em situações relacionadas à vida adulta como compras, empréstimos e financiamentos. São noções que precisam de tempo para assimilação. Nesse sentido, programe-se para dar um tempo adequado para a execução dessas resoluções e outras que os próprios estudantes ou você podem elaborar.

1. $V_1 = 500$ (primeira parcela à vista)

1º mês: R$ 500 representa o valor da 1ª parcela com juros de 7%, isto é, representa o montante de um valor V_1 após 1 mês a juros compostos. Cálculo de V_1:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$500 = V_1 \cdot (1 + 0{,}07)^1$

$500 = V_1 \cdot 1{,}07^1$

$V_1 = \dfrac{500}{1{,}07^1}$

2º mês: R$ 500,00 representa o valor da 2ª parcela com juros de 7%, isto é, representa o montante de um valor V_2 após 2 meses a juros compostos. Cálculo de V_2:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$500 = V_2 \cdot (1 + 0{,}07)^2$

$500 = V_2 \cdot 1{,}07^2$

$V_2 = \dfrac{500}{1{,}07^2}$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

3º mês: R$ 500,00 representa o valor da 3ª parcela com juros de 7%, isto é, representa o montante de um valor V_3 após 3 meses a juros compostos. Cálculo de V_3:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$500 = V_3 \cdot (1 + 0{,}07)^3$

$500 = V_3 \cdot 1{,}07^3$

$V_3 = \dfrac{500}{1{,}07^3}$

O valor à vista, de acordo com as condições apresentadas, é dado por:

$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$

$V = 500 + \dfrac{500}{1{,}07^1} + \dfrac{500}{1{,}07^2} + \dfrac{500}{1{,}07^3}$

$V \cong 500 + 467{,}29 + 436{,}72 + 408{,}15 = 1812{,}16$

Portanto, o valor à vista desse produto é aproximadamente R$ 1.812,16.

2. Resposta pessoal. Ao elaborar e resolver situações como esta, os estudantes pensam além dos valores numéricos, analisam também a coerência dos juros atualmente aplicados. A troca das atividades entre colegas lhes dá a oportunidade de observar procedimentos e entendimentos diferentes nos cálculos para a resolução.

3. **1º mês:** R$ 500 representa o valor da 1ª parcela com juros de 7%, isto é, representa o montante de um valor V_1 após 1 mês a juros compostos. Cálculo de V_1:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$500 = V_1 \cdot (1 + 0{,}07)^1$

$500 = V_1 \cdot 1{,}07^1$

$V_1 = \dfrac{500}{1{,}07^1}$

2º mês: R$ 500,00 representa o valor da 2ª parcela com juros de 7%, isto é, representa o montante de um valor V_2 após 2 meses a juros compostos. Cálculo de V_2:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$500 = V_2 \cdot (1 + 0{,}07)^2$

$500 = V_2 \cdot 1{,}07^2$

$V_2 = \dfrac{500}{1{,}07^2}$

3º mês: R$ 500,00 representa o valor da 3ª parcela com juros de 7%, isto é, representa o montante de um valor V_3 após 3 meses a juros compostos. Cálculo de V_3:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$500 = V_3 \cdot (1 + 0{,}07)^3$

$500 = V_3 \cdot 1{,}07^3$

$V_3 = \dfrac{500}{1{,}07^3}$

4º mês: R$ 500,00 representa o valor da 4ª parcela com juros de 7%, isto é, representa o montante de um valor V_4 após 4 meses a juros compostos. Cálculo de V_4:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$500 = V_4 \cdot (1 + 0{,}07)^4$

$500 = V_4 \cdot 1{,}07^4$

$V_4 = \dfrac{500}{1{,}07^4}$

Cálculo do valor à vista:

$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$

$V = \dfrac{500}{1{,}07^1} + \dfrac{500}{1{,}07^2} + \dfrac{500}{1{,}07^3} + \dfrac{500}{1{,}07^4}$

$V \cong 467{,}29 + 436{,}72 + 408{,}15 + 381{,}45 = 1693{,}61$

Portanto, o valor à vista desse produto é aproximadamente R$ 1.693,61.

4. Resposta pessoal.

As atividades de 1 a 4 devem consolidar o aprendizado do cálculo do valor à vista de um produto com base nos valores das parcelas. Por isso, reserve um bom tempo para a resolução delas.

5. **1º mês:** R$ 202,00 representa o valor da 1ª parcela com juros de 1%, isto é, representa o montante de um valor V_1 após 1 mês a juros compostos. Cálculo de V_1:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$202 = V_1 \cdot (1 + 0{,}01)^1$

$202 = V_1 \cdot 1{,}01^1$

$V_1 = \dfrac{202}{1{,}01^1}$

2º mês: R$ 204,02 representa o valor da 2ª parcela com juros de 1%, isto é, representa o montante de um valor V_2 após 2 meses a juros compostos. Cálculo de V_2:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$204{,}02 = V_2 \cdot (1 + 0{,}01)^2$

$204{,}02 = V_2 \cdot 1{,}01^2$

$V_2 = \dfrac{204{,}02}{1{,}01^2}$

O valor à vista, nas condições apresentadas, é dado por:

$V = V_1 + V_2$

$V = \dfrac{202}{1{,}01^1} + \dfrac{204{,}02}{1{,}01^2}$

$V = 200 + 200 = 400$

Portanto, o valor à vista que deve constar na nota fiscal é R$ 400,00.

Alternativa **b**.

6. Arthur dispõe de um capital C = R$ 55.000,00. Vamos analisar as opções e verificar qual oferece maior vantagem a Arthur.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Opção 1: Arthur paga à vista os R$ 55.000,00. Logo, não terá lucro nem prejuízo com essa opção.

Opção 2: Arthur dá uma entrada de R$ 30.000,00, aplica R$ 25.000,00 e paga uma prestação p no valor de R$ 26.000,00 com o montante da aplicação. Então, temos C = R$ 25.000,00; $i = 10\% = 0{,}1$; $n = 1$ e $M_1 = ?$.

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_1 = 25\,000 \cdot (1 + 0{,}1)^1 = 25\,000 \cdot 1{,}1 = 27\,500$

$M_1 - p$ = R$ 27.500,00 − R$ 26.000,00 = = R$ 1.500,00

Então, Arthur paga a prestação de R$ 26.000,00 e restará R$ 1.500,00, que será aplicado por mais 6 meses. Temos C = R$ 1.500,00; $i = 10\% = 0{,}1$; $n = 1$ e $M_1 = ?$.

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_1 = 1500 \cdot (1 + 0{,}1)^1 = 1500 \cdot 1{,}1 = 1650$

Logo, Arthur terá um lucro de R$ 1.650,00.

Opção 3: Arthur dá uma entrada de R$ 20.000,00, aplica R$ 35.000,00 e paga uma prestação p_1 no valor de R$ 20.000,00 com o montante da aplicação. Então, temos inicialmente C = R$ 35.000,00; $i = 10\% = 0{,}1$; $n = 1$ e $M_1 = ?$.

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_1 = 35\,000 \cdot (1 + 0{,}1)^1 = 35\,000 \cdot 1{,}1 = 38\,500$

$M_1 - p_1$ = R$ 38.500,00 − R$ 20.000,00 = = R$ 18.500,00

Então, Arthur paga a prestação de R$ 20.000,00 e resta R$ 18.500,00, que será aplicado por mais 6 meses para depois pagar outra prestação p_2 no valor de R$ 18.000,00 com o montante da aplicação. Temos C = R$ 18.500,00; $i = 10\% = 0{,}1$; $n = 1$ e $M_1 = ?$.

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_1 = 18\,500 \cdot (1 + 0{,}1)^1 = 18\,500 \cdot 1{,}1 = 20\,350$

$M_1 - p_2$ = R$ 20.350,00 − R$ 18.000,00 = = R$ 2.350,00

Assim, Arthur paga a prestação de R$ 18.000,00, e resta R$ 2.350,00. Logo, Arthur terá lucro de R$ 2.350,00.

Opção 4: Arthur dá uma entrada de R$ 15.000,00, aplica R$ 40.000,00 por 2 semestres, ou seja, um ano, pagando depois uma prestação p no valor de R$ 60.000,00 com o montante da aplicação. Temos C = R$ 40.000,00; $i = 10\% = 0{,}1$; $n = 2$ e $M_2 = ?$.

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_2 = 40\,000 \cdot (1 + 0{,}1)^2 = 40\,000 \cdot 1{,}1^2 =$

$= 40\,000 \cdot 1{,}21 = 48\,400$

$M_2 - p$ = R$ 48.400,00 − R$ 39.000,00 = = R$ 9.400,00

Assim, Arthur pagará a prestação de R$ 39.000,00 e restará R$ 9.400,00. Logo, Arthur terá lucro de R$ 9.400.

Opção 5: Arthur aplica os R$ 55.000,00 por 2 semestres, ou seja, um ano, e depois paga uma prestação p no valor de R$ 60.000,00 com o montante da aplicação. Temos C = R$ 55.000,00; $i = 10\% = 0{,}1$; $n = 2$ e $M_2 = ?$.

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M_2 = 55\,000 \cdot (1 + 0{,}1)^2 = 55\,000 \cdot 1{,}1^2 = 55\,000 \cdot$

$\cdot 1{,}21 = 66\,550$

$M_2 - p$ = R$ 66.550,00 − R$ 60.000,00 = = R$ 6.550,00.

Assim, Arthur pagará a prestação de R$ 60.000,00 e restará R$ 6.550,00. Logo, Arthur terá lucro de R$ 6.550,00.

Portanto, para Arthur é mais vantajoso financeiramente escolher a opção 4.

Alternativa **d**.

7. Temos que o aparelho de TV custa R$ 1.000,00. Comprando à vista, há 4% de desconto, ou seja, o aparelho passa a custar R$ 1.000,00 − R$ 40,00 = = R$ 960,00.

Comprando a prazo, o pagamento é feito em duas parcelas iguais e sem desconto, R$ 500,00 no ato da compra e outra parcela de R$ 500,00 após um mês. Assim:

$C = \text{R\$ } 960{,}00 - \text{R\$ } 500{,}00 = \text{R\$ } 460{,}00$

Por esses R$ 460,00, a pessoa deve pagar R$ 500,00 após um mês. Assim, temos $J = \text{R\$ } 40{,}00$; $C = \text{R\$ } 460{,}00$; $n = 1$ e $i = ?$.

$J = niC$

$i = \dfrac{J}{Cn}$

$i = \dfrac{40}{460} \cong 0{,}087 = 8{,}7\%$

Portanto, o comprador pagará uma taxa de aproximadamente 8,7% a.m.

Alternativa **a**.

8. Nos quatro primeiros meses, a taxa foi de 1% ao mês.

$M_1 = C \cdot (1 + 0{,}01)^4$

Nos quatro meses seguintes, a taxa foi de 2% ao mês.

$M_2 = C \cdot (1 + 0{,}01)^4 \cdot (1 + 0{,}02)^4$

$C \cdot [(1 + 0{,}01) \cdot (1 + 0{,}02)]^4 = 65.536$

$$C = \frac{2^{16}}{\left[(1 + 0{,}01) \cdot (1 + 0{,}02)\right]^4} =$$

$$= \left[\frac{4}{\sqrt{1{,}01 \cdot 1{,}02}}\right]^8 = \left[\frac{4}{1{,}015}\right]^8 \cong 3{,}94^8$$

O valor mais aproximado é 3,968.

Alternativa **e**.

Páginas 43-45

Atividades finais

A atividade é iniciada por uma questão de retomar rapidamente algumas ideias desenvolvidas ao longo da unidade. As respostas dessa questão, o estudante reflete sobre a parte teórica estudada. Você pode acrescentar outras perguntas com o mesmo objetivo, que representem uma síntese dos tópicos principais.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Já a maioria das demais questões foi extraída de instituições diversas e representam formas diferenciadas de avaliação. Elas não estão apresentadas em ordem crescente de grau de dificuldade. A ideia é que os estudantes façam uma autoavaliação e aprofundem o conhecimento do assunto.

1. a) Multiplicar um número por 0,012 significa calcular 1,2% desse número.

b) Multiplicar um número por 1,012 significa calcular 101,2% desse número.

c) Dois aumentos consecutivos de 2% e 6% correspondem a um só aumento de 8,12%, pois $1{,}02 \cdot 1{,}06 = 1{,}0812$, que significa 108,12% do valor inicial.

d) Dois descontos consecutivos de 2% e 6% correspondem a um só desconto de 7,88%, pois $0{,}98 \cdot 0{,}94 = 0{,}9212$, que significa 92,12% do valor inicial ou um desconto de 7,88%.

e) Se determinado valor aumentou de R$ 10,00 para R$ 12,00, ocorreu uma variação de 20%, pois $\frac{10}{12} = 1{,}2 = 1 + 0{,}2$, ou seja, um aumento de 20%.

f) O montante é a soma do capital com os juros.

g) Regime de juros simples.

h) Regime de juros simples.

i) $M = C(1 + i)^n$

j) Nos juros simples, o crescimento é linear; nos juros compostos, é exponencial.

2. Considerando x e y, respectivamente, o número de meninos e meninas da turma, temos:

$\dfrac{2}{x - 2} = 0{,}08$

$2 = (x - 2) \cdot 0{,}08$

$2 = 0{,}08x - 0{,}16$

$2{,}16 = 0{,}08x$

$x = \dfrac{2{,}16}{0{,}08} = 27$

Logo, na turma há 27 meninos.

$\dfrac{1}{y - 3} = 0{,}05$

$1 = (y - 3) \cdot 0{,}05$

$1 = 0{,}05y - 0{,}15$

$1{,}15 = 0{,}05y$

$y = \dfrac{1{,}15}{0{,}05} = 23$

Logo, na turma há 23 meninas.

Cálculo do percentual do número de meninos nos dias em que a turma está completa:

$P = \dfrac{27}{27 + 23}$

$P = \dfrac{27}{50} = 0{,}54 = 54\%$

Portanto, há 54% de meninos nos dias em que a turma está completa.

Alternativa **c**.

3. De acordo com o enunciado, o custo com o transporte será $\frac{1}{5}$ do valor atual do objeto, ou seja, $\frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$ do valor do objeto.

Sabemos que 100% representa o valor total do objeto. Descontando os 20% do transporte, restam $100\% - 20\% = 80\%$.

Portanto, a pessoa deve oferecer uma recompensa de até 80% do valor do objeto.

Alternativa **e**.

4. Seja x o valor do produto com desconto e f o valor do frete para cada loja.

Loja 1: Temos que 20% de desconto equivale a R$ 720,00 e sabemos que $f = 70$.

Vamos determinar o valor do produto:

Valor (R$)	**Percentual**
720	20
x	80

$20x = 80 \cdot 720$

$20x = 57\,600$

$x = \dfrac{57\,600}{20} = 2\,880$

Logo, o valor do produto com desconto é R$ 2.880,00.

$x + f$ = R$ 2.880,00 + R$ 70,00 = R$ 2.950,00

Portanto, R$ 2.950,00 é o preço total na loja 1.

Loja 2: Temos que 20% de desconto equivale a R$ 740,00 e sabemos que $f = 40$.

Vamos determinar o valor do produto:

Valor (R$)	**Percentual**
740	20
x	80

$20x = 80 \cdot 740$

$20x = 59\,200$

$x = \dfrac{59\,200}{20} = 2\,960$

Logo, o valor do produto com desconto é de R$ 2.960,00.

$x + f$ = R$ 2.960,00 + R$ 50,00 = R$ 3.010,00

Portanto, R$ 3.010,00 é o preço total na loja 2.

Loja 3: Temos que 20% de desconto equivale a R$ 760,00 e sabemos que $f = 80$.

Vamos determinar o valor do produto:

Valor (R$)	**Percentual**
760	20
x	80

$20x = 80 \cdot 760$

$20x = 60\,800$

$x = \dfrac{60\,800}{20} = 3\,040$

Logo, o valor do produto com desconto é de R$ 3.040,00.

$x + f$ = R$ 3.040,00 + R$ 80,00 = R$ 3.120,00

Portanto, R$ 3.120,00 é o preço total na loja 3.

Loja 4: Temos que 15% de desconto equivale a R$ 710,00 e sabemos que $f = 10$.

Vamos determinar o valor do produto:

Valor (R$)	**Percentual**
710	15
x	85

$15x = 85 \cdot 710$

$15x = 60\,350$

$x = \dfrac{60\,350}{15} \cong 4\,023{,}33$

Logo, o valor do produto com desconto é de R$ 4.023,33.

$x + f$ = R$ 4.023,33 + R$ 10,00 = R$ 4.033,33

Portanto, R$ 4.033,33 é o preço total na loja 4.

Loja 5: Temos que 15% de desconto equivale a R$ 690,00 e sabemos que $f = 0$.

Vamos determinar o valor do produto:

Valor (R$)	**Percentual**
690	15
x	85

$15x = 85 \cdot 690$

$15x = 58\,650$

$x = \dfrac{58\,650}{15} = 3\,910$

Portanto, R$ 3.910,00 é o preço total na loja 5.

Logo, o produto foi comprado na loja 1.

Alternativa **a**.

5. Cálculo do percentual atual de vitórias de João:

$\dfrac{10}{25} = 0{,}4 = 40\%$

Vamos considerar que n represente o número de vitórias consecutivas para que o percentual de João aumente em pelo menos 12%.

$\dfrac{10 + n}{25 + n} \geqslant 0{,}40 + 0{,}12$

Como $25 + n > 0$ podemos "passar" para o lado direito da desigualdade, multiplicando por 0,52.

$10 + n \geqslant (25 + n) \cdot 0{,}52$

$10 + n \geqslant 13 + 0{,}52n$

$n - 0{,}52n \geqslant 13 - 10$

$0{,}48n \geqslant 3$

$n \geqslant \dfrac{3}{0{,}48}$

$n \geqslant 6{,}25$

Portanto, o número mínimo de vitórias é 7.

Alternativa **e**.

6. $1000 \cdot \left(1 - \dfrac{20}{100}\right)^5 = 1000 \cdot (0{,}80)^5 = 1000 \cdot$

$\cdot\, 0{,}32768 = 327{,}68$

Portanto, depois de 5 minutos o volume será aproximadamente 327 L.

Alternativa **b**.

7. O rendimento médio mensal teve dois aumentos consecutivos, em 2010 e o projetado para 2020, de 7,2% e 10%, o que corresponde a um só aumento de 17,92%, pois $1{,}072 \cdot 1{,}1 = 1{,}1792$. Calculamos o

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

aumento em 2020:

$1{,}792 \cdot R\$\ 1.250{,}00 = R\$\ 224{,}00$

Então, calculamos o rendimento médio mensal em 2020:

$R\$\ 1.250{,}00 + R\$\ 224{,}00 = R\$\ 1.474{,}00$

Portanto, o rendimento médio mensal será de R$ 1.474,00.

Alternativa **e**.

Proponha aos estudantes que pesquisem qual foi o rendimento médio mensal dos trabalhadores brasileiros em 2020, de acordo com o IBGE. Eles também podem pesquisar estimativas para as próximas décadas.

8. Sendo x o número de desempregados no segundo trimestre de 2018, em milhões, temos:

$x \cdot (1 - 0{,}04) = 12 \Rightarrow x \cdot 0{,}96 = 12$

$x = \dfrac{12}{0{,}96}$

$x = 12{,}5$

Portanto, o número de desempregados no segundo trimestre de 2018 foi de 12,5 milhões de pessoas.

Alternativa **d**.

9. Calculamos o PIB em cada ano, considerando o PIB de 2015 com um valor x.

$PIB_{2015} = x$

$PIB_{2016} = 1{,}02 \cdot x = 1{,}02x$

$PIB_{2017} = 0{,}95 \cdot 1{,}02x = 0{,}969x$

$PIB_{2018} = 1{,}03 \cdot 0{,}969x = 0{,}99807x$

Cálculo da variação percentual:

$P = \dfrac{PIB_{2018} - PIB_{2015}}{PIB_{2015}}$

$V = \dfrac{0{,}99807x - x}{x}$

$V = -0{,}00193 \cong -0{,}002 = -0{,}2\%$

Portanto, a variação do PIB teve um decrescimento de aproximadamente 0,2%.

Alternativa **a**.

10. Cálculo da despesa com ligações para celular:

$200 - 40 = 160$

Cálculo do percentual de redução:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

$P = \dfrac{40 - 160}{160}$

$P = \dfrac{-120}{160}$

$P = -0{,}75 = -75\%$

Portanto, a redução percentual com gastos em ligações para celulares nessa loja deverá ser de 75%.

Alternativa **e**.

11. Sendo C o custo original da refeição, temos:

$p = 1{,}10 \cdot (1{,}10 \cdot C)$

$p = 1{,}21 \cdot C$

$C = \dfrac{p}{1{,}21}$

Alternativa **b**.

12. Vamos calcular o aumento percentual na produção de petróleo de cada país citado.

Arábia Saudita: $\dfrac{13{,}2}{12{,}3} \cong 1{,}073 = 1 + 0{,}073$ − aumento de aproximadamente 7,3%.

EUA: $\dfrac{11{,}6}{8{,}1} \cong 1{,}432 = 1 + 0{,}432$ − aumento de aproximadamente 43,20%.

Rússia: $\frac{10,6}{10,2} \cong 1,309 = 1 + 0,309$ – aumento de aproximadamente 30,09%.

Iraque: $\frac{7,6}{2,5} = 3,04 = 1 + 2,04$ – aumento de 204%.

Canadá: $\frac{5,5}{3,3} \cong 1,6667 = 1 + 0,6667$ – aumento de aproximadamente 66,67%.

Brasil: $\frac{4,5}{2} = 2,25 = 1 + 1,25$ – aumento de 125%.

China: $\frac{4,5}{4,1} \cong 1,0976 = 1 + 0,0976$ – aumento de aproximadamente 9,76%.

Irã: $\frac{3,4}{3,8} \cong 0,8947 = 1 - 0,1053$ – diminuição de aproximadamente 10,53%.

Kuwait: $\frac{3,4}{3} \cong 1,1333 = 1 + 0,1333$ – aumento de aproximadamente 13,33%.

Portanto, o Brasil foi o segundo país com maior aumento percentual na produção de petróleo.

Alternativa **b**.

13. Sendo C o capital inicial, M o montante, i a taxa e n o tempo, temos:

$M_n = C \cdot (1 + in)$

$3C = C \cdot (1 + 0,03 \cdot n)$

$3 = 1 + 0,03n$

$2 = 0,03n$

$n = \frac{2}{0,03} \cong 66,67$

66,67 meses = 5 anos, 6 meses e 20 dias

Portanto, o montante será o triplo do valor inicial no final de 5 anos, 6 meses e 20 dias.

Alternativa **d**.

14. Vamos calcular o percentual do número de unidades vendidas desse produto do primeiro para o segundo semestre.

Produto I: $\frac{600}{350} \cong 1,7143 = 1 + 0,7143$

Logo, o produto I teve um aumento de aproximadamente 71,43% nas vendas.

Produto II: $\frac{1100}{1000} = 1,1 = 1 + 0,1$

Logo, o produto II teve um aumento de 10% nas vendas.

Produto III: $\frac{4\,000}{4\,000} = 1 + 0,0$

Logo, o produto III não teve aumento nas vendas.

Produto IV: $\frac{1200}{850} \cong 1,4118 = 1 + 0,4118$

Logo, o produto IV teve um aumento de aproximadamente 41,18%.

Produto V: $\frac{2\,600}{2\,000} = 1,3 = 1 + 0,3$

Logo, o produto V teve um aumento de 30%.

Portanto, o produto I teve a ação de *marketing* mais bem-sucedida.

Alternativa **a**.

15. Vamos calcular o preço inicial do orçamento.

R$ 10.000,00 + R$ 40.000,00 + 40 · R$ 2.500,00 = R$ 150.000,00

Logo, o orçamento original é de R$ 150.000,00.

A construtora apresentou um novo orçamento, reduzindo 10% do original. Então:

10% de 150 000 = 0,1 · 150 000 = 15 000

150 000 – 15 000 = 135 000

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Assim, o novo orçamento é de R$ 135.000,00.

Vamos determinar o percentual de desconto que a construtora deverá conceder nos custos fixos:

$0{,}5 \cdot 10\,000 + x \cdot 40\,000 + 1{,}25 \cdot (40 \cdot 2\,500) = 135\,000$

$5\,000 + 40\,000x + 125\,000 = 135\,000$

$40\,000x = 135\,000 - 125\,000 - 5\,000$

$40\,000x = 5\,000$

$x = \dfrac{5\,000}{40\,000}$

$x = \dfrac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\%$

Portanto, o valor dos custos fixos corresponde a 12,5% do valor inicial, ou seja, houve um desconto de 87,5%.

Alternativa **d**.

16. Cálculo da variação percentual de 2014 para 2016:

$p = \dfrac{11{,}8 - 6{,}7}{6{,}7}$

$p = \dfrac{5{,}1}{6{,}7} \cong 0{,}76 = 76\%$

Portanto, o aumento da média anual de desempregados de 2014 para 2016 está mais próximo de 76%.

Alternativa **b**.

17. Cálculo da média diária de consumo de sal:

$\dfrac{450\text{ g}}{30} = 15\text{ g}$

Variação percentual em relação ao valor recomendado de 6 g diárias:

$P = \dfrac{15 - 6}{6}$

$P = \dfrac{9}{6} = 1{,}5 = 150\%$

Portanto, o consumo diário excede ao consumo máximo recomendado diariamente em 150%.

Alternativa **a**.

18. Temos $C = \text{R\$ } 8.000{,}00$; $i = 16\% = 0{,}16$; $M = \text{R\$ } 8.320{,}00$ e $n = ?$. Utilizando a relação do montante para juros simples, obtemos:

$M_n = C \cdot (1 + in)$

$8\,320 = 8\,000 \cdot (1 + 0{,}16n)$

$8\,320 = 8\,000 + 1\,280n$

$320 = 1\,280n$

$n = \dfrac{320}{1\,280}$

$n = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$

0,25 anos = 3 meses

Portanto, levará 3 meses para pagar o montante de R$ 8.320,00.

Alternativa **b**.

19. Utilizando a relação para o cálculo do montante a juros compostos e considerando que o custo é o capital inicial e o lucro é o montante, temos:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$1\,200 = C \cdot (1 + 0{,}02)^3$

$1\,200 = C \cdot 1{,}02^3$

$1200 \cong C \cdot 1{,}0612$

$C = \dfrac{1200}{1{,}0612} = 1130{,}80$

Portanto, a venda à vista deve ser de aproximadamente R$ 1.130,80.

Alternativa **b**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

UNIDADE 2 Função exponencial e função logarítmica

Objetivos

- Analisar como operações matemáticas se comportam em diferentes conjuntos numéricos.
- Conhecer os logaritmos e entender como aplicá-los em diversas situações.
- Modelar situações de crescimento e decrescimento utilizando funções exponenciais e logarítmicas.
- Resolver problemas modelados por funções exponenciais e logarítmicas.

Justificativa

A compreensão de fenômenos cujas grandezas variam de forma exponencial ou logarítmica permite modelar e resolver problemas em vários contextos, sejam eles da área científica, sejam da vida cotidiana, como em situações financeiras.

Competências e habilidades da BNCC trabalhadas nesta unidade

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

Competências gerais

Competência geral 1

O eixo condutor do estudo da função logarítmica é a História da Matemática, mobilizando a **competência geral 1**. O assunto se inicia na página 69, com a leitura de um texto por meio do qual os estudantes tomam conhecimento de que os logaritmos foram criados pelo matemático, físico, teólogo e astrônomo escocês John Napier (1550-1617), no século XVII, para simplificar cálculos muito grandes. Essa era uma demanda de diversas áreas do conhecimento, como Astronomia, Física e Navegação. Durante o estudo dos logaritmos e suas propriedades, a História da Matemática é retomada.

Competências gerais 2, 4 e 9

Na página 57, é proposta uma atividade para que os estudantes, em duplas ou em trios, investiguem as potências obtidas de acordo com o valor da base e os valores dos respectivos expoentes. À medida que variam os expoentes, eles discutem os resultados encontrados quando a base é negativa, nula, está entre 0 e 1, é unitária ou é maior que 1. Depois, considerando os resultados obtidos, eles devem produzir um pequeno texto relacionando o crescimento exponencial às diversas bases investigadas. Desenvolvem, assim, a **competência geral 2** ao exercitar a curiosidade intelectual por meio da investigação, da reflexão, da análise crítica, da imaginação e da criatividade, para investigar causas e elaborar e testar hipóteses. Desenvolvem também a **competência geral 4** ao se comunicar e discutir ideias, utilizando a linguagem matemática para se expressar e partilhar informações. Além disso, mobilizam a **competência geral 9** ao trabalhar em grupos, exercitando a empatia, o diálogo e a cooperação. A troca de ideias promove o respeito por si próprio e pelo outro, por meio do diálogo e da convivência, além da valorização da diversidade.

Competências gerais 2 e 5

Nas atividades de investigação sobre os gráficos das funções logarítmicas, propostas na páginas 76 e 77, os estudantes desenvolvem as **competências gerais 2 e 5** ao elaborar hipóteses sobre o

comportamento de funções, dadas algumas condições, registrar suas hipóteses e, em seguida, comprová-las ou refutá-las analisando os respectivos gráficos construídos com o auxílio de *softwares* de geometria dinâmica.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competência específica 1
EM13MAT101

Na página 65, os estudantes analisam os gráficos de duas funções. Um dos gráficos representa o crescimento de bactérias em função do tempo e o outro, a variação da área coberta por uma população de algas em função do tempo. Eles analisam como a definição de domínio e contradomínio pode interferir na leitura do gráfico.

Competência específica 3
EM13MAT304

Nas atividades propostas na página 82, os estudantes resolvem problemas relacionados ao rendimento da poupança com auxílio de [illegible] acordo com as representações algébrica e gráfica da função exponencial correspondente.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

EM13MAT305

Ao longo da unidade, são propostos problemas em diversos contextos para serem resolvidos usando funções logarítmicas. Por exemplo, na atividade 2 da página 79, os estudantes resolvem problemas envolvendo a escala Richter, que mede a magnitude de um terremoto.

Competência específica 4
EM13MAT403

Nas atividades propostas na página 75, os estudantes representam dados de uma situação-problema em uma tabela e em um plano cartesiano para comparar as funções exponencial e logarítmica e identificar o crescimento da função logarítmica.

Resoluções e comentários

Comentário para o bloco de questões:

Nestas atividades iniciais, a ideia é deixar que os estudantes investiguem a situação apresentada e percebam que o raciocínio proporcional não se aplica à variação de grandezas, cujo aumento é dado pelo produto por uma razão constante. Assim é possível introduzir o conceito de crescimento exponencial, diferenciando-o de crescimento linear.

Com o desenvolvimento da unidade, os estudantes perceberão que a função exponencial não é sempre crescente, mas esse é um tópico que não precisa ser trabalhado nesta abordagem inicial.

Página 47

Abertura

1. 1ª semana: $10\,000 \cdot 1{,}5 = 15\,000$

2ª semana: $15\,000 \cdot 1{,}5 = 22\,500$

3ª semana: $22\,500 \cdot 1{,}5 = 33\,750$

Portanto, a população daqui a três semanas será de 33 750 indivíduos.

2. Caso os estudantes não façam os cálculos, pode ser que sugiram 10 semanas, demonstrando uma relação linear. Eles podem verificar esse valor multiplicando 10 000 por 1,5 quantas vezes forem necessárias. Em 6 semanas a população será de aproximadamente 113 906 indivíduos.

Para saber a resposta exata, seria preciso utilizar logaritmos, que será estudado na unidade. Segue o cálculo usando logaritmos:

$10\,000 \cdot (1{,}5)^x = 100\,000$

$1{,}5^x = \dfrac{100\,000}{10\,000} = 10$

$x = \log_{1,5} 10 = \dfrac{\log 10}{\log 1{,}5} \cong \dfrac{1}{0{,}18} \cong 5{,}6$

Portanto, em aproximadamente 5,6 semanas a população de indivíduos será de 100 mil.

Páginas 48-49

Para explorar

Comentário para as questões 1 a 4:

Ao realizar o experimento, os estudantes devem perceber que uma medida pouco significativa, como a espessura da folha de papel, logo se torna significativa por causa do crescimento exponencial. Ao realizar as questões 2 e 3, é possível que o resultado da atividade 2 seja muito maior que o da atividade 3 em razão da dificuldade de pressionar as dobras para que não haja espaço entre dois pedaços de papel. Oriente-os para que as pressionem ao máximo, garantindo um resultado mais acurado.

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.
3. Resposta pessoal, mas espera-se que o resultado seja um décimo de uma potência de 2, como 1,6 mm ou 3,2 mm.
4. Resposta pessoal, mas espera-se que a resposta seja sim, confirmando que os resultados das questões 2 e 3 são compatíveis.

Comentário para as questões 5 e 6:

Ao responder às questões 5 e 6, os estudantes devem começar a se familiarizar com a ideia do crescimento exponencial. Além disso, inicia-se aqui um vislumbre sobre a necessidade de conhecer uma operação inversa à potenciação, a qual, mais adiante, será sanada por meio do estudo dos logaritmos.

5. Seja x a espessura da folha de papel higiênico dobrada 12 vezes por Britney. Temos:

   $x \cdot 2^{12} = 40$

   $x = \frac{40}{4\,096}$

   $x \cong 0{,}01$ cm $= 0{,}1$ mm

   Portanto, a espessura da folha de papel higiênico era aproximadamente 0,01 cm ou 0,1 mm.

6. Seja y a altura do bloco de papel higiênico dobrado 30 vezes. Sendo 0,1 mm a espessura da folha de papel higiênico, obtemos:

   $0{,}1 \cdot 2^{30} = y$

   $y = 0{,}1 \cdot 1\,073\,741\,824$

   $y = 107\,374\,182{,}4$ mm $\cong 1\,073$ km

   Portanto, a altura do bloco de papel higiênico seria aproximadamente 107 374 182,4 mm ou 1 073 km.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 49

Para pensar e discutir

Comentário para as questões 1 a 3:

Com estas atividades, espera-se avançar o estudo em direção à representação algébrica das funções exponenciais. Os estudantes devem perceber que o crescimento exponencial é representado por expressões do tipo a^n. Além disso, devem retomar o que já sabem sobre gráficos de funções: cada ponto do gráfico representa um par ordenado que satisfaz a lei da função. Sendo assim, funções de domínios discretos não podem ter gráficos contínuos. Para relembrar esses conceitos, explore com eles o tópico sobre funções que está na **Caixa de ferramentas**, propondo discussões sobre os conceitos apresentados.

Eles devem se lembrar que uma função é uma relação entre duas variáveis e que pode ser representada tanto algebricamente por uma expressão como geometricamente por um gráfico. Em ambos os casos, a função só pode ser bem definida se o domínio e o contradomínio forem expressos.

1. $59\,049 \cdot 3 \cdot 3 = 59\,049 \cdot 9 = 531\,441$

   Portanto, após passar mais duas horas, 531 441 novos indivíduos receberão a notícia.

2. Após n horas: 3^n.
3. Não. Representar esse gráfico de forma contínua seria presumir quantidades contínuas de indivíduos, por exemplo, 30,4 pessoas.

Páginas 50-51

Para explorar

1. Converse com os estudantes para que levantem hipóteses sobre as afirmações. Auxilie-os na compreensão de que basta um contraexemplo para demonstrar a falsidade de uma afirmação. Se não é possível encontrar esse contraexemplo, é preciso argumentar a favor da veracidade da afirmação.

   Buscar contraexemplos não é uma tarefa fácil, mas pode ser facilitada quando observamos valores fundamentais da teoria dos números, como 0, 1 e -1. A separação dos números entre pares e ímpares ou entre positivos e negativos também ajuda nessa busca. Testar essas hipóteses é essencial para despertar nos estudantes o perfil investigativo, levando-os à vivência da Matemática como realmente é: uma ciência desenvolvida a partir da curiosidade humana e formalizada por estruturas e modelos padronizados que auxiliam na satisfação dessas curiosidades. Veja a seguir as resoluções.

   a) Verdadeira, pois $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1$ é sempre 1.

   b) Falsa. $(-1)^n = -1$ se n for ímpar.

   Se n for par, $(-1)^n = 1$.

   c) Falsa.

   Essa operação só é válida se n não for nulo.

2. Da questão 1 em diante, é preciso dizer aos estudantes que demonstrar a veracidade de uma afirmação (como uma propriedade) depende de uma articulação lógica e correta de uma sequência de afirmações gerais. No caso desses exercícios, a demonstração pode ser deduzida dos conceitos já conhecidos sobre potenciação. De qualquer modo, é essencial que eles notem que generalizar com base em exemplos é uma prática ótima para a criação de hipóteses, mas não serve para demonstrar propriedades gerais.

Em toda essa sequência de exercícios, é essencial que uma primeira versão das demonstrações venha dos próprios estudantes, permitindo que desenvolvam suas habilidades e competências matemáticas com autonomia, e que essas estratégias pessoais sejam respeitadas. Veja a seguir as resoluções.

a) Possível explicação:

$$\left(a^m\right)^n = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ fatores}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ fatores}}}_{n \text{ repetições}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \,\cdot\, n \text{ fatores}} = a^{m \cdot n}$$

b) Possível explicação:

$$a^m : a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ fatores}} : \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}} = \underbrace{\left(a : a\right) \cdot \left(a : a\right) \cdot \left(a : a\right) \cdot \ldots \cdot \left(a : a\right)}_{n \text{ fatores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \,-\, n \text{ fatores}} =$$

$$= 1^n \cdot a^{m-n} = a^{m-n}$$

Comentário para as questões 3 e 4:

Nestas últimas questões do bloco, passamos da demonstração de propriedades para a busca de novas definições. É importante que os estudantes percebam que definir a^{-1} como $\frac{1}{a}$ é importante para que as propriedades permaneçam válidas para potências de expoente negativo. Há aqui uma importante característica da Matemática em jogo: a de que os objetos matemáticos são construídos e definidos axiomaticamente, mas novos objetos devem necessariamente manter válidas as propriedades e as articulações dos objetos definidos anteriormente. Assim, os estudantes devem ser levados primeiro a calcular as divisões (na atividade 3), depois aplicar a propriedade (mesmo que não tenha sido demonstrada para expoentes negativos), e então fazer conjecturas sobre como definir potências de expoente negativo. Se a definição for boa, ela deve ser aplicável na atividade 4. Mais adiante a definição será apresentada formalmente.

3. a) Exemplo de resposta:

Sendo $m = 2$ e $n = 3$, então:

$2^2 : 2^3 = 2^{(2-3)} = 2^{-1}$

b) Considerando a escolha de $m = 2$ e $n = 3$, do item **a**, o expoente é -1.

O resultado deve ser verificado com os valores de m e n escolhidos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

c) Exemplos de resposta:

Para $m = 1$ e $n = 3$:

$2^1 : 2^3 = 2 : 8 = 0{,}25$ ou $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{2^2}$

$2^{(m-n)} = 2^{(1-3)} = 2^{-2}$

Para $m = 8$ e $n = 12$:

$2^8 : 2^{12} = 256 : 4\,096 = 0{,}0625$ ou $\frac{1}{16}$ ou $\frac{1}{2^4}$

$2^{(m-n)} = 2^{(8-12)} = 2^{-4}$

Ao comparar 2^{-2} com $\frac{1}{4}$ e 2^{-4} com $\frac{1}{16}$, espera-se que os estudantes percebam que $a^{-n} = 1 : a^n = \frac{1}{a^n}$

4. a) Resposta possível.

Espera-se que os estudantes percebam que

$a^{-n} = a^{(0-n)} = a^0 : a^n = 1 : a^n = \frac{1}{a^n}$

b) $5^{-2} = 1 : 5^2 = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04$

Página 52

Para explorar

Comentário para as questões 1 a 3:

Seguindo o processo investigativo sobre as propriedades, este bloco de questões propõe que os estudantes reflitam e cheguem à conclusão de que possuem um conjunto de definições que possibilita o cálculo de qualquer potência de expoente racional. Além disso, é essencial que verifiquem se as propriedades que demonstraram como válidas para os naturais permanecem válidas para os racionais. Para isso, leve-os a fazer os cálculos propostos com e sem o uso das propriedades. Ao chegar ao mesmo resultado pelos dois caminhos, eles devem levantar a hipótese da validade das propriedades, que será demonstrada adiante.

O texto logo após as atividades apresenta uma demonstração. Se houver interesse da turma, pode ser enriquecedor propor que eles demonstrem outras propriedades, incluindo racionais negativos.

1. Resposta pessoal.

Espera-se que os estudantes percebam que as definições contemplam todos os números racionais.

2. Respostas pessoais. Espera-se que a igualdade seja verificada.

Exemplo de valores: $m = -\frac{1}{2}$, $n = -\frac{3}{5}$ e $a = 2$.

a) $2^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{2^3}} = \sqrt[10]{\frac{1}{2^5}} \cdot \sqrt[10]{\frac{1}{2^6}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{2^6}} = \sqrt[10]{\frac{1}{2^{5+6}}} = \sqrt[10]{2^{-11}}$

$2^{\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)} = 2^{-\frac{5}{10}-\frac{6}{10}} = 2^{-\frac{11}{10}} = \sqrt[10]{2^{-11}}$

A igualdade é verificada.

b) $\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt[5]{\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^3}}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}} = \sqrt[5]{2^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[5]{\sqrt{2^3}} = \sqrt[10]{2^3}$

$2^{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)} = 2^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{2^3}$

A igualdade é verificada.

c) $2^{-\frac{1}{2}} : 2^{-\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt[5]{\frac{1}{2^3}} = \sqrt[10]{\frac{1}{2^5}} : \sqrt[10]{\frac{1}{2^6}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2^5} : \frac{1}{2^6}} = \sqrt[10]{\frac{1}{2^{5-6}}} = \sqrt[10]{2}$

$2^{\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{3}{5}\right)} = 2^{-\frac{5}{10}+\frac{6}{10}} = 2^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{2}$

A igualdade é verificada.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

3. Resposta pessoal.

Pode-se supor que as propriedades são válidas e, sendo a um número real positivo, a validade está garantida para quaisquer valores reais de m e n. Nesse caso, é importante orientar os estudantes para que levantem hipóteses e verifiquem diversos valores de m e n antes de tirar conclusões. Com o que foi exposto até aqui, eles só podem concluir a aplicação das propriedades para m e n racionais. Ainda assim, devem saber que o exercício apenas auxilia a criação de hipóteses e que as demonstrações formais estão descritas na sequência.

Página 53

Para pensar e discutir

Comentário para as questões 1 a 3:

Nestas questões, verifique se os estudantes conseguem aplicar as definições estudadas e utilizá-las para calcular potências de expoente racional com uso de calculadora. Pode ser interessante mostrar que calculadoras científicas têm a tecla [x^y], que permite calcular diretamente $3^{\frac{1}{6}}$, digitando [3], [x^y], [(], [1], [:], [6], [)], [=]. O mesmo pode ser feito para $3^{\frac{21}{2}}$. Sem utilizar essa tecla, é possível usar a tecla de raiz quadrada para calcular a raiz de 3^{21}, mas no caso de $3^{\frac{1}{6}}$ seria preciso ter uma tecla de raiz enésima ou pelo menos uma de raiz quadrada e outra de raiz cúbica. Discutir essas limitações e possibilidades das ferramentas eletrônicas ajudará os estudantes a fazer escolhas com mais autonomia. Para os mais engajados na tecnologia e em linguagens de programação, recomende fazer os cálculos utilizando fórmulas em planilhas eletrônicas, que permitem digitar qualquer expressão.

Nas resoluções a seguir, alguns estudantes podem preferir usar a regra de três para a conversão de unidades. Essa é uma prática saudável caso eles se sintam mais seguro utilizando-a, mas convencê-los a trabalhar com o raciocínio proporcional aplicando a multiplicação ou a divisão diretamente pode ser de grande ajuda no desenvolvimento de habilidades cognitivas mais complexas e de estratégias de cálculo mais ágeis.

1. $10 \text{ min} = 10 : 60 \text{ h} = \frac{1}{6} \text{ h}$

Portanto, podemos representar 10 minutos como $\frac{1}{6}$ de hora.

2. $10{,}5 = \frac{105}{10} = \frac{21}{2}$

Então, $\frac{21}{2}$ é a maneira fracionária de representar o número 10,5.

3. $3^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{3} \cong 1{,}200937 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{\frac{21}{2}} = \sqrt[2]{3^{21}} \cong 102\,275{,}87$

Comentário para as questões 4 e 5:

Essas questões podem gerar discussões amplas. Se for possível, organize os estudantes em grupos e proponha outras questões para orientar um debate. Na questão 4, pode ser interessante trazer para a discussão índices que tratam pessoas como variáveis contínuas, como taxas de natalidade. Espera-se que percebam que, embora não seja possível definir o que significa 1,2 pessoa, é possível entender esse número no contexto como uma forma de compreender a dimensão ou a ordem de grandeza da variável estudada.

O conceito de ordem de grandeza não será estudado neste volume, mas é importante que os estudantes tenham contato com essas ideias, mesmo de forma intuitiva.

Ao responder à questão 5, eles podem usar essas ideias para redefinir o conceito de potenciação, passando da ideia mais simples de "multiplicação com fatores iguais" para a ideia mais complexa de "operação que gera o crescimento exponencial". Mais adiante, ao estudar as funções exponenciais, verão como essa operação é representada em um conjunto contínuo e que de acordo com a base é possível definir também o conceito de "decrescimento exponencial".

4. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes digam que não é possível contar pessoas com valores decimais. No estudo das funções exponenciais voltaremos a esse tópico.

5. Resposta pessoal. Os estudantes podem trazer definições como "uma operação que aumenta a base exponencialmente" ou "uma operação que indica a multiplicação da base por si mesma uma quantidade de vezes que pode ou não ser inteira, incluindo a possibilidade de multiplicar a base por uma parte de si mesma".

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 54

Para explorar

Comentário para o bloco de questões:

Com esta atividade, os estudantes devem saltar das potências de expoente racional para as potências de expoente real. Esse salto na Matemática nunca é simples, pois depende da compreensão de questões bastante abstratas, incluindo as ideias de continuidade, de limite e de valor infinitesimal. Uma vez que os números irracionais existem como limites de sequências de racionais e as potências de expoente racional também já estão definidas, é possível determinar a existência das potências de expoente irracional com as mesmas propriedades.

Colocar os estudantes em contato com essas ideias é essencial para a compreensão do universo dos números reais, mesmo que eles não se aprofundem nesses conceitos. O uso da tabela deve levá-los a conjecturar a hipótese de que, aproximando cada vez mais o valor da raiz de 2 por números racionais, podemos aproximar também o valor de 2 elevado à raiz de 2.

A partir dessa primeira generalização, fica mais simples apresentar a existência das potências de expoente real com todas as suas propriedades.

1. Resposta pessoal. Em geral são 8 casas decimais.

2. Resposta pessoal. Em geral, a calculadora trunca o resultado após 8 casas e arredonda o processo, mesmo que seja repetido inúmeras vezes.

3. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que é possível.

Preenchendo a tabela com 13 casas decimais, com apoio de uma planilha eletrônica, o valor aproximado de $\sqrt{2}$ estabiliza na sétima linha, mas $2^{\sqrt{2}}$ estabiliza já na sexta linha.

n	$a_n \cong \sqrt{2}$	$2^{a_n} \cong 2^{\sqrt{2}}$
1	$a_1 = 1$	$2^1 = 2$
2	$a_2 = \left(\frac{a_1^2 + 2}{2 \cdot a_1}\right) = \left(\frac{1^2 + 2}{2 \cdot 1}\right) = 1{,}5$	$2^5 \cong 2{,}82847125$
3	$a_3 = \left(\frac{a_2^2 + 2}{2 \cdot a_2}\right) = \left(\frac{1{,}5^2 + 2}{2 \cdot 1{,}5}\right) = 1{,}41666\ldots$	$2^{1{,}4166\ldots} \cong 2{,}669679708$
4	$a_4 = \left(\frac{a_3^2 + 2}{2 \cdot a_3}\right) = \left(\frac{1{,}41666\ldots^2 + 2}{2 \cdot 1{,}41666\ldots}\right) = 1{,}4142156862745\ldots$	$2^{1{,}4142156862745\ldots} \cong 2{,}665148066$
5	$a_5 = \left(\frac{a_4^2 + 2}{2 \cdot a_4}\right) = 1{,}4142135623747\ldots$	$2^{1{,}4142135623747\ldots} \cong 2{,}665144143$
6	$a_6 = \left(\frac{a_5^2 + 2}{2 \cdot a_5}\right) = 1{,}4142135623731\ldots$	$2^{1{,}4142135623731} \cong 2{,}665144143$
7	$a_7 = \left(\frac{a_6^2 + 2}{2 \cdot a_6}\right) = 1{,}4142135623731\ldots$	$2^{1{,}414325623731} \cong 2{,}665144143$

Página 55

Para pensar e discutir

Comentário para o bloco de questões:

Este bloco de questões deve transpor a situação estudada anteriormente para um modelo de aplicação. Sendo o tempo uma grandeza contínua, fica mais simples justificar a existência de potências de expoente irracional.

1. $3{,}5 = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$

$2^{3,5} = 2^{\frac{7}{2}} = \sqrt{2^7} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

Portanto, $8\sqrt{2}$ m² é a área atingida pelo fogo após 3,5 minutos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

2. Temos: 30 seg = 0,5 min = $\frac{1}{2}$ min

$$2^{-0,5} = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, a área atingida pelo fogo 30 segundos antes de o incêndio ocupar 1 m² é $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m².

3. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que é a área atingida após $\sqrt{2}$ minutos e que esse valor pode ser obtido por aproximações das potências racionais de 2.

Página 56

Para pensar e discutir

Comentário para o bloco de questões:

Seguindo o processo investigativo, os estudantes podem utilizar essas questões para concretizar suas explanações acerca da definição da potenciação. Ao observar que as potências de expoente racional e irracional podem ser calculadas mantendo não só as mesmas propriedades como também uma relação de ordem, torna-se possível concluir uma ideia que eles já devem ter conjecturado de que o crescimento exponencial pode ser contínuo.

1. Temos:

$1{,}5 = 1 + 0{,}5 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$3^{1,5} = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3} \cong 5{,}20$

2. $\sqrt{3} \cong 1{,}73$ e $3^{\sqrt{3}} \cong 6{,}705$

   a) $1{,}5 < 1{,}73 \Rightarrow 1{,}5 < \sqrt{3}$

   Portanto, $\sqrt{3}$ é maior que 1,5.

   b) $5{,}20 < 6{,}705 \Rightarrow 3^{1,5} < 3^{\sqrt{3}}$

   Portanto, $3^{\sqrt{3}}$ é maior que $3^{1,5}$.

3. Resposta pessoal. Com base nos resultados, pode-se supor que a potenciação com expoentes irracionais mantém uma relação de ordem com a potenciação de expoentes racionais, ou seja, o crescimento exponencial pode ser contínuo.

Página 56

Para pensar e discutir

Comentário para o bloco de questões:

Conhecer as restrições das definições e das propriedades relacionadas a uma operação em determinado conjunto numérico é essencial para evitar erros de cálculo e conclusões absurdas. Ignorar essas restrições pode gerar contradições, como a seguinte:

"Todo número elevado a zero é igual a 1;
logo, $(1 \cdot 0)^0 = 1$;
logo, $(1)^0 \cdot (0)^0 = 1$.
Como zero elevado a qualquer número é zero, temos $(1)^0 \cdot (0)^0 = 1 \cdot 0 = 0$;
logo, $0 = 1$."

Mostre aos estudantes outras conclusões como essa e peça que encontrem o erro na argumentação lógica. O erro está justamente no fato de que as restrições foram ignoradas. Assim, este bloco de questões propõe a eles que não só conheçam as restrições como as relacionem com definições mais gerais acerca das operações em cada conjunto.

1. $a \neq 0$, pois 0^0 não está definido em nenhum conjunto numérico.
2. $m \neq 0$, pois 0^0 não está definido em nenhum conjunto numérico.
3. Se $a = 0$ e $m < 0$, 0^m não tem significado, pois não existe a divisão por zero. Portanto, dada a condição $a \neq 0$, garantimos a existência da definição para qualquer valor real de m.
4. $a > 0$, pois não existe raiz de número negativo no conjunto dos números reais; n inteiro, pois não existe raiz de índice racional; e $n > 1$ pois não existe raiz de índice negativo, nulo ou unitário.
5. A condição $a > 0$ é necessária para garantir uniformidade nas propriedades. Note que a radiciação de bases negativas só está definida para raízes de índice par. Assim, se admitirmos que a base a pode ser negativa, as potências de expoente racional só estarão definidas quando o numerador da fração for par. Podemos então dizer que, sendo a um número qualquer, as propriedades são válidas para expoentes inteiros. Já quando definimos as propriedades para qualquer expoente racional ou irracional, devemos impor que a base seja positiva. Isso será mais bem compreendido na atividade seguinte.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 57

Para explorar

Comentário para o bloco de questões:

Ao analisar o comportamento da potência de acordo com a variação da base, os estudantes, além de compreender melhor as restrições dadas nas definições vistas anteriormente, podem dar um passo em direção à compreensão do comportamento crescente ou decrescente da função exponencial. Para isso, é essencial que as conjecturas feitas por eles sejam discutidas e compartilhadas, garantindo que consigam argumentar a favor de suas hipóteses ou se convencer contrariamente a elas.

1. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que isso acontece, pois, de acordo com a definição anterior, a deve ser maior que zero para que as propriedades sejam sempre válidas.
2. **a)** Resposta possível: Se $0 < a < 1$, as potências decrescem exponencialmente conforme se aumenta o expoente. Em outro momento, os estudantes verão que esses valores pertencem ao gráfico de uma função exponencial decrescente.
   b) Resposta possível: Se $a = 1$, as potências são sempre iguais a 1 para qualquer expoente e não há crescimento ou decrescimento. Esses valores pertencem ao gráfico de uma função constante e não de uma função exponencial.
   c) Resposta possível: Se $a > 1$, as potências crescem exponencialmente conforme se aumenta o expoente. Em outro momento, os estudantes verão que esses valores pertencem ao gráfico de uma função exponencial crescente.
3. Possíveis explicações:

a) $a^m \cdot b^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ fatores}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{m \text{ fatores}} = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{m \text{ fatores}} = (a \cdot b)^m$

b) $a^m : b^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ fatores}} : \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{m \text{ fatores}} = \underbrace{(a : b) \cdot (a : b) \cdot (a : b) \cdot \ldots \cdot (a : b)}_{m \text{ fatores}} = (a : b)^m$

Página 58

Para retomar

Resposta pessoal. Os estudantes devem notar que é possível escrever essa função de forma contínua; mas seria preciso criar significado para os valores não inteiros, entendendo números, por exemplo, 1,2 pessoa, como estimativas de dados estatísticos e não como resultados concretos da função.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 58

Para explorar

Comentário para o bloco de questões:

A proposta para estas atividades é levar os estudantes a relacionar o crescimento exponencial com a representação algébrica da função exponencial. A partir dessa relação, eles podem analisar a função que modela a situação para estudar seu comportamento e fazer inferências que reflitam na prática.

Na questão 4, organize um debate para que os grupos compartilhem suas respostas. Os estudantes devem reconhecer a partir disso uma importante aplicação das funções: a de criar modelos algébricos e gráficos que permitam um estudo mais aprofundado de situações reais.

1. Resposta pessoal. Como o número de pessoas impactadas varia de acordo com o tempo, criando uma relação de dependência bem definida, é possível modelar a situação por meio de uma função.
2. $D = CD = \mathbb{N}$
3. $q: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
   $q(t) = 3^t$
4. Respostas pessoais. Com o uso da função, é possível antever a velocidade com que as notícias falsas se espalham e tomar decisões sobre como diminuir esse crescimento, por exemplo, reduzindo o valor da base; ou seja, diminuindo o número de pessoas impactadas por dia a partir da exposição da falsidade da notícia.

Página 59

Para pensar e discutir

Comentário para o bloco de questões:

A proposta para estas atividades é relacionar as definições das propriedades estudadas sobre a potenciação com a definição dada agora da função exponencial, aplicando as propriedades para caracterizar a função.

1. Resposta possível. Temos que a não pode ser negativo, pois, pela definição de potência, a sempre será maior que zero; se $a = 0$ ou $a = 1$, as funções 0^x e 1^x seriam funções constantes.
2. $f(1) = a^1 = a$, para todo a.
3. $f(m + n) = a^{m+n} = a^m \cdot a^n = f(m) \cdot f(n)$

Páginas 59-60

Para explorar

Comentário para o bloco de questões:

A proposta para estas atividades é levar os estudantes a investigar uma aplicação da definição da função exponencial. Ao responder à questão 4, observe se eles compreendem a velocidade de crescimento da função exponencial. Caso algum estudante responda, por exemplo, "na 10ª posição", isso deve significar que ainda há a aplicação do raciocínio proporcional na análise do crescimento exponencial.

1.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

2. $f(n) = 2^n$
3. 2 horas = 120 minutos = 6 · 20 minutos

   $D = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ e $Im = \{1; 2; 4; 8; 16; 32; 64\}$
4. Metade da placa será ocupada por metade de 2^{20} bactérias.

   $2^{20} : 2 = 2^{20-1} = 2^{19}$.

   Logo, essa situação será atingida na 19ª observação.

Página 61

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir

Comentário para o bloco de questões:

Neste bloco de questões, os estudantes são convidados a analisar uma situação real que aparenta um crescimento exponencial, para então buscar a função que a modela. Ao encontrar o valor da base a da função exponencial, torna-se possível fazer inferências e comparações entre o modelo e a situação real. Ao responder à atividade 4, os estudantes podem supor que a função definida não modela a situação, sendo preciso rever o valor de a. A partir daí pode ser que eles busquem um novo valor para a, mas nesse caso outros valores da função não serão atingidos. Uma proposta melhor seria supor quais acontecimentos podem ter levado a situação real a não se comportar como o modelo.

1. $f(56) = 10\,000 \Rightarrow a^{56} = 10\,000 \Rightarrow a = \sqrt[56]{10\,000} = \sqrt[56]{10^4} = \sqrt[14]{10}$ ou $10^{\frac{1}{14}}$

   $f(x) = 10^{\frac{x}{14}}$
2. Para que a função represente exatamente o número de mortes (e não uma inferência estatística), a imagem será dada por números naturais maiores que 0. Para que isso aconteça, o domínio deve ser formado pelos múltiplos positivos de 14.
3. $f(70) = 10^{\frac{70}{14}} = 10^5 = 100\,000$

   Portanto, no dia 1º de abril seriam registradas 100 000 mortes.
4. Respostas pessoais. Os estudantes podem achar que a função não serve para modelar o problema ou que serve para analisar o problema por comparação.

Páginas 61-62

Para explorar

Comentário para o bloco de questões:

Nestas atividades, os estudantes vão aprofundar a análise da relação entre uma situação real e um modelo, buscando diferentes valores para a base a e estudando suas interferências no modelo.

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = a^t$, com $a > 0$ e $a \neq 1$

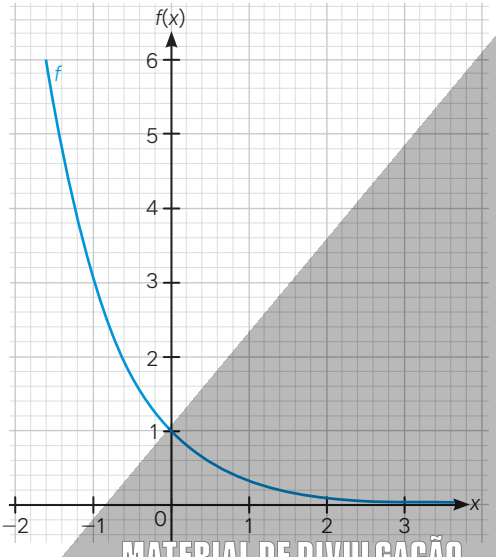
Como o tempo e a área são variáveis contínuas, o domínio e o contradomínio são reais.

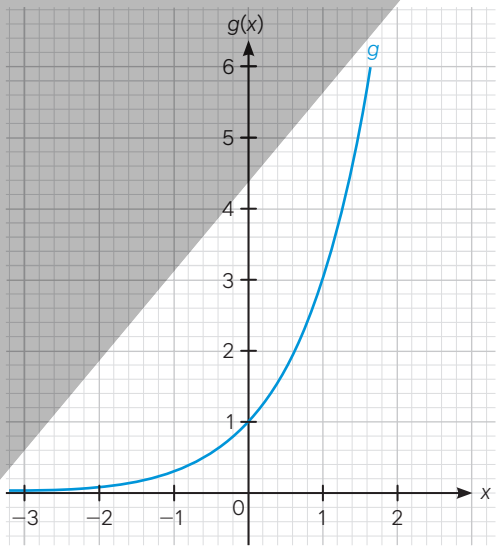
2. O parâmetro não pode ser negativo, caso contrário a função não estaria definida em $\mathbb{R}$.

O parâmetro não pode ser zero, caso contrário a função não estaria definida para $x = 0$ e, mesmo restringindo o domínio, não seria uma função exponencial, mas uma função constante.

O parâmetro não pode ser 1, caso contrário a função não seria uma função exponencial, e sim uma função constante.

3. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $\quad$ $g(x) = 3^x$





Gráficos: Tarcísio Garbellini

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

a) $f(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$ e $g(0) = 3^0 = 1$

b) Em ambas, a imagem é $\mathbb{R}_+$ (reais positivos).

c) É preciso considerar 40 segundos como $\frac{2}{3}$ de um minuto.

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1^2}{3^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \cong 0{,}052$$

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9} \cong 2{,}080$$

4. A função f é decrescente e a função g é crescente.

5. Pelo que estudamos no crescimento exponencial, se $0 < a < 1$, então $m < n \Rightarrow a^m > a^n$. Por outro lado, se $a > 1$, então $m < n \Rightarrow a^m < a^n$. Logo, para valores de a entre zero e 1 a função é decrescente e para valores maiores que 1 a função é crescente.

6. **a)** Significa que, a cada minuto, a área queimada é o triplo da área anterior.

b) Porque a área aumenta em função do tempo e a função f é decrescente.

c) Resposta pessoal. Uma opção é elaborar uma função que representa a área que não foi queimada. O valor $\frac{1}{3}$ significaria que a cada minuto perde-se $\frac{1}{3}$ da área original. Note que, nesse caso, a área original teria que ser infinita. Caso contrário, o domínio não poderia ser real.

7. Resposta pessoal. Os estudantes podem dizer que, em ambas, o domínio é real, as curvas são exponenciais, as imagens são dadas por $\mathbb{R}_+$, o ponto (0; 1) pertence ao gráfico e os gráficos não possuem limite superior.

Página 63

Atividades

Comentário para o bloco de questões:
Estas atividades de aplicação podem ser utilizadas para a verificação de aprendizagem.

1. $f(-1{,}5) = \left(\frac{9}{4}\right)^{-1{,}5} = \left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{4^3}{9^3}} = \sqrt{\frac{64}{729}} = \frac{8}{27}$

$f(-1) = \left(\frac{9}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{4}{9}\right)^{1} = \frac{4}{9}$

$f(-0{,}5) = \left(\frac{9}{4}\right)^{-0{,}5} = \left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

$f(0) = \left(\frac{9}{4}\right)^{0} = 1$

$f(0{,}5) = \left(\frac{9}{4}\right)^{0{,}5} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

$f(1) = \left(\frac{9}{4}\right)^{1} = \frac{9}{4}$

$f(1{,}5) = \left(\frac{9}{4}\right)^{1{,}5} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^{3}} = \sqrt{\frac{9^3}{4^3}} = \sqrt{\frac{729}{64}} = \frac{27}{8}$

Portanto, $\left\{\frac{8}{27}; \frac{4}{9}; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}; \frac{9}{4}; \frac{27}{8}\right\}$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

2. a) O valor inicial do celular é R$ 1.000,00 e após um ano de uso há uma redução de 40%, ou seja, o valor passa a ser 60% do inicial.
60% de 1000 = 0,6 · 1000 = 600; R$ 600,00
Portanto, após um ano de uso o valor do celular é R$ 600,00.

b) Depois de dois anos de uso o valor do celular passa a ser 36% (60% de 60% = 36%) do valor inicial.
36% de 1000 = 0,36 · 1000 = 360; R$ 360,00
Portanto, após dois anos de uso o valor do celular é R$ 360,00.

c) $f(1) = \frac{600}{1000} = 0{,}6 = 60\%$

d) $f(2) = \frac{360}{1000} = 0{,}36 = 36\%$

e) $60\% = \frac{60}{100} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

Então, $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$

3. $f(x) = a^x \Rightarrow f(10) = 50 \Rightarrow a^{10} = 50 \Rightarrow a = \sqrt[10]{50}$

Página 63

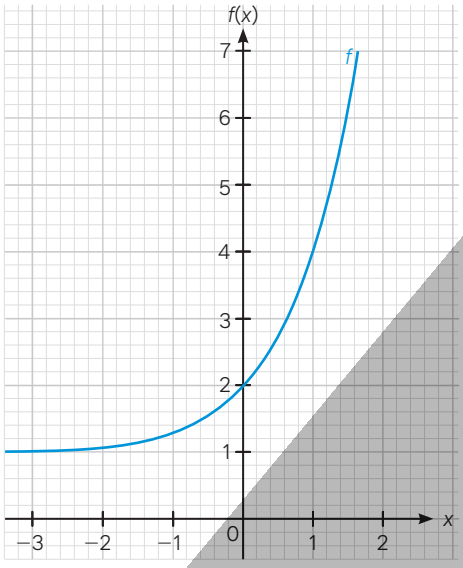
Para pensar e discutir

Comentário para o bloco de questões:

Nestas atividades, os estudantes terão contato com outras funções que também modelam situações de crescimento exponencial, sendo convidados a analisar diversas interferências que podem ocorrer na lei da função e em seu gráfico. É essencial que eles façam as atividades com autonomia, criando hipóteses, para só depois ter contato com o conhecimento formal de transformações no gráfico.

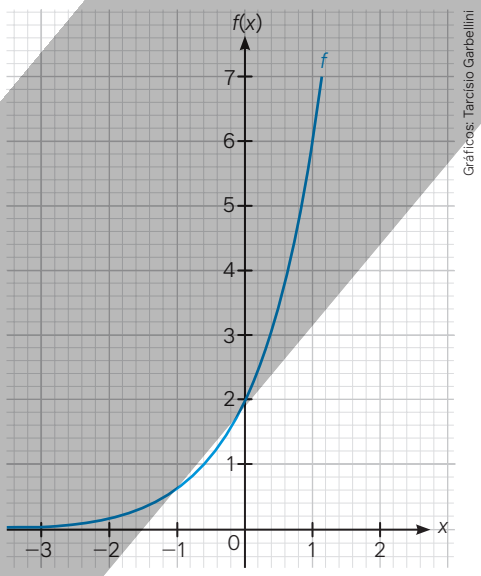
1. a) Pode-se somar 1 à lei da função ou multiplicá-la por 2: $f(x) = 3^x + 1$ ou $f(x) = 2 \cdot 3^x$.

b) $f(x) = 3^x + 1$



No caso de somar 1 à lei da função, o gráfico será transladado de uma unidade no sentido vertical para cima. O conjunto imagem será $]1, +\infty[$.

$f(x) = 2 \cdot 3^x$



Gráficos: Tarcísio Garbellini

No caso de multiplicá-la por 2, a curvatura será levemente alterada, mas o conjunto imagem permanecerá o mesmo.

c) No caso de somar 1 à lei da função, estamos afirmando que a população começa com 2 indivíduos, mas um deles não [illegible] multiplicá-la por 2, estamos afirmando que a população começa com 2 indivíduos e ambos se reproduzem.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

2. Gráfico da função $m(x) = 2^{x-1}$:

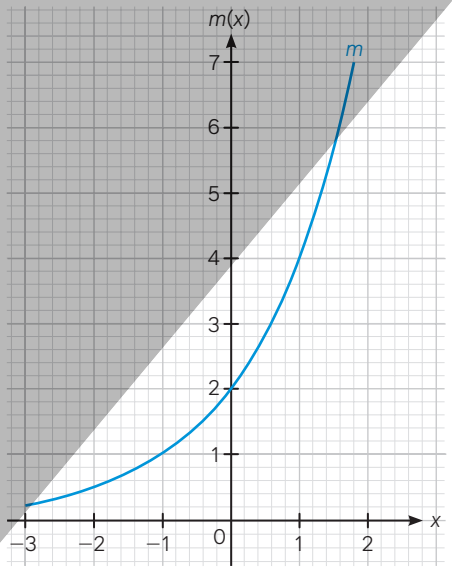
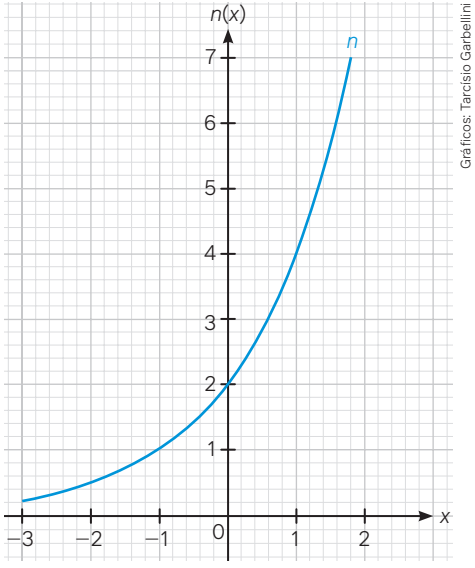


Gráfico da função $n(x) = 2 \cdot 2^x$:



Gráficos: Tarcísio Garbellini

Gráfico da função $p(x) = 3 \cdot 2^x$:

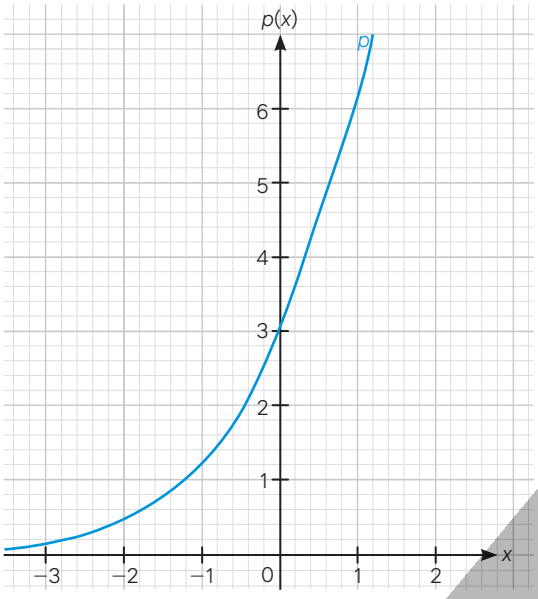
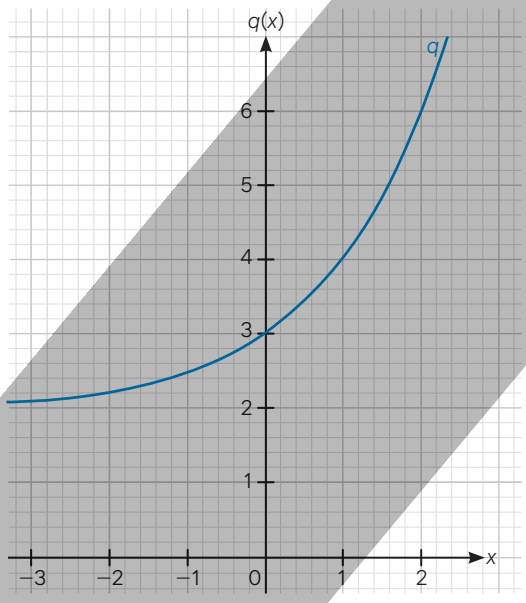


Gráfico da função $q(x) = 2 + 2^x$:



Gráficos: Tarcísio Garbellini

a) A função n, pois $2 \cdot 2^x = 2^{x+1}$.

b) A função p tem um crescimento mais acentuado do que a função m, e a função q tem um crescimento igual ao da função m, mas seu gráfico é transladado em 2 unidades no sentido vertical para cima.

3. a) $f(x) = 1 + 0{,}5 \cdot 2^x$

$f(0) = 1 + 0{,}5 \cdot 2^0 = 1 + 0{,}5 \cdot 1 = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$

A função f é crescente e corta o eixo das ordenadas no ponto (0; 1,5).

b) $f(x) = 5\,000 \cdot 0{,}99^x$

$f(0) = 5\,000 \cdot 0{,}99^0 = 5\,000 \cdot 1 = 5\,000$

A função f é decrescente e corta o eixo das ordenadas no ponto (0; 5 000).

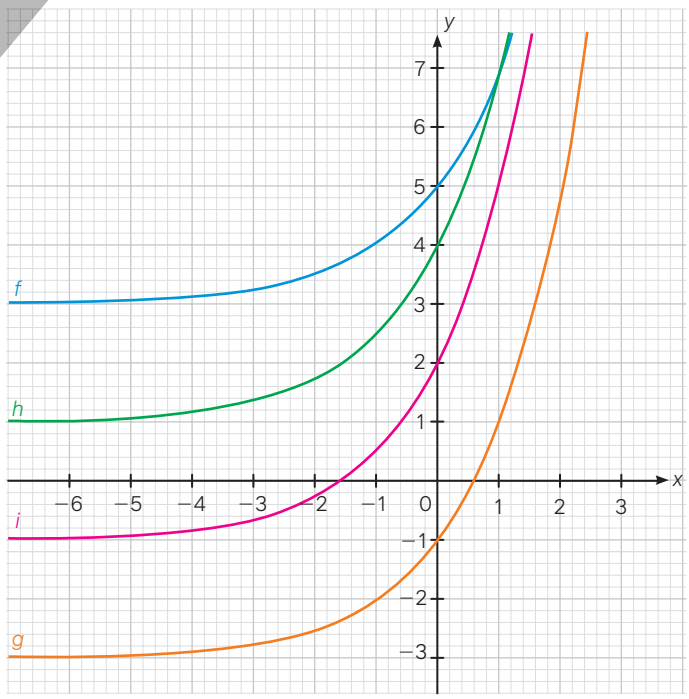
Página 64

Para explorar

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Os estudantes devem ter a oportunidade de testar diversas funções, analisando a influência dos diferentes parâmetros. Esta é uma das grandes vantagens do uso da tecnologia: permite alterar com rapidez diversos detalhes dos modelos estudados, possibilitando aos estudantes observar resultados corretos sem ter que construí-los, exercitando suas habilidades de análise, avaliação, criação de hipóteses e argumentação.

Possíveis gráficos de funções: $f(x) = 2 \cdot 2^x + 3$, $g(x) = 2 \cdot 2^x - 3$, $h(x) = 3 \cdot 2^x + 1$ e $i(x) = 3 \cdot 2^x - 1$.



Tarcísio Garbellini

Página 65

Para pensar e discutir

Comentário para o bloco de questões:

Com as atividades de aplicação deste bloco, é possível verificar se os estudantes já conseguem relacionar a inclusão de novos parâmetros na função com sua representação tanto no gráfico quanto no modelo representado por ela.

1. Porque o tempo está em minutos e os valores da função dobram a cada 18 minutos. Logo, a cada minuto os valores são multiplicados por $\sqrt[18]{2}$.
2. A expressão precisaria multiplicar o denominador 18 por 60. No gráfico, a curva pareceria crescer mais lentamente.

Páginas 66-67

Para explorar

Comentário para o bloco de questões:

Para finalizar o estudo das funções exponenciais e introduzir o estudo dos logaritmos, estas atividades retomam uma situação estudada anteriormente, na qual os estudantes devem aplicar o conhecimento desenvolvido até aqui. Pode ser de grande valia neste momento fazer uma reflexão e propor uma autoavaliação, para que eles possam medir seus avanços em relação ao domínio do conteúdo.

1. $f(65) = 10^{\frac{65}{14}} \cong 43\,940$
   Note que o resultado deve ser um número natural.
   $43\,940 - 25\,000 = 18\,940$
   Logo, 18 940 mortes evitadas.
2. Nesse caso, a função representa uma tendência e não o número exato de mortes.
3. Fazendo $f(x) = 10^{\frac{x}{14}} = 50\,000$, é preciso descobrir a qual expoente devemos elevar a base de modo a obter 50 000.

Páginas 67-68

Para pensar e discutir

Comentário para o bloco de questões:

Ao ter o primeiro contato com os logaritmos, os estudantes precisam se apropriar da linguagem e do significado dessa nova operação, para que ela se torne tão fluente quanto a adição ou a multiplicação. Para isso, é essencial que relacionem esse novo conhecimento com outros já construídos.

Partindo dessa proposta, este bloco de questões busca relacionar a definição apresentada para os logaritmos com aquilo que já conhecem sobre a função exponencial, estabelecendo relações entre as definições e suas condições de existência e entre as propriedades dos logaritmos e a resolução de questões dadas no contexto da função exponencial.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1. **a)** Porque, sendo $\log_b a = c$ tal que $b^c = a$, sabemos pelas condições da função exponencial que $b > 0$ e $b \neq 1$. Além disso, pela imagem da função exponencial, sabemos que $a > 0$.

   b) Pela definição, $\log_a a$ é o expoente ao qual elevamos a para obter a potência de a. Esse expoente é 1, pois $a^1 = a$.

   Além disso, $\log_a 1$ é o expoente ao qual elevamos a para obter a potência 1. Esse expoente é 0, pois $a^0 = 1$.
2. $x = \log_{10} 50\,000^{14}$
3. $x = \log_{10} 50\,000^{14} \cong 65{,}79$
   Portanto, $x \cong 66$.
4. Segundo o gráfico, o valor de 50 000 foi atingido no 70º dia e não no 66º. Isso representa, de acordo com o parâmetro II, um atraso de 4 dias.

Página 68

Atividades

Comentário para o bloco de questões:

As atividades de aplicação deste bloco podem ser utilizadas para verificar a aprendizagem dos estudantes, reunindo exercícios sobre todas as formas da função exponencial e a resolução de alguns logaritmos simples.

1. a) $\log_2 8 = x \Leftrightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$

b) $\log_{10} 10\,000 = x \Leftrightarrow 10^x = 10\,000 \Leftrightarrow 10^x = 10^4 \Leftrightarrow x = 4$

c) $\log_3 9 = x \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$

2. a) $3^x = 15 \Leftrightarrow x = \log_3 15$ **b)** $22^x = 11^2 \Leftrightarrow x = \log_{22} 11^2$ **c)** $5^x = \pi + 1 \Leftrightarrow x = \log_5 (\pi + 1)$

3. a) $\log 2 \cong 0{,}30103$ **b)** $\log 30 \cong 1{,}47712$ **c)** $\log 500 \cong 2{,}69897$

4. a) $f(x) = 5^{x-1} + 1 = 5^x \cdot 5^{-1} + 1 = \frac{5^x}{5} + 1 = \frac{1}{5} \cdot 5^x + 1 = 0{,}2 \cdot 5^x + 1$

b) $f(x) = 4 \cdot 0{,}3^{x+1} = 4 \cdot 0{,}3^x \cdot 0{,}3^1 = 1{,}2 \cdot 0{,}3^x + 0$

c) $f(x) = (2^{x+1})^2 = 2^{2x+2} = (2^2)^{x+1} = 4^{x+1} = 4^x \cdot 4^1 = 4 \cdot 4^x + 0$

d) $f(x) = 20^{\frac{x}{2}} + 3 = \sqrt{20^x} + 3 = \left(\sqrt{20}\right)^x + 3 = \left(\sqrt{4 \cdot 5}\right)^x + 3 = \left(2\sqrt{5}\right)^x + 3 = 1 \cdot \left(2\sqrt{5}\right)^x + 3$

Página 70

Para pensar e discutir

Há várias formas de comparar as funções e os gráficos para relacioná-los. Analisando as funções do exercício 4 da página 68 é possível notar que as funções dos itens **a** e **b**, cujas leis de formação são respectivamente $f(x) = 0{,}2 \cdot 5^x + 1$ e $f(x) = 1{,}2 \cdot 0{,}3^x$, passam pelo ponto (0; 1,2). Entretanto, a função (a) é crescente e a função (b) é decrescente. Logo, os gráficos que se associam a elas são, respectivamente, os dos itens (a) e (b).

Já as funções dos itens (c) e (d) da página 68, cujas leis são respectivamente $f(x) = (2)^x + 3$ e $f(x) = 4 \cdot 4^x$, passam pelo ponto (0; 4) e são crescentes, como mostram os gráficos restantes. Entretanto a função do item (c) do exercício 4 tem imagem maior que 3 enquanto a do item (d) tem imagem maior que zero. Logo, os gráficos que se associam a elas são também os gráficos (c) e (d).

Conhecendo as propriedades das potências é possível fazer análises como essas. De acordo com o texto, esses cálculos que permitem a transformação de produtos em somas auxiliam no cálculo de multiplicações astronômicas, justamente pelo uso dos logaritmos.

Página 71

Para explorar

Comentário para o bloco de questões:

Nestas atividades os estudantes irão realizar um processo investigativo com base em um texto que relata parte da História da Matemática. A proposta é que, organizados em grupos, abstraiam do texto a justificativa para o uso dos logaritmos e apliquem na prática, ampliando a compreensão acerca da importância dessa operação. Em seguida, eles são convidados a generalizar o que observaram. Nesse ponto é essencial ressaltar que a generalização é uma hipótese que precisa ser confirmada por uma demonstração formal. Assim, quando todos os grupos terminarem os processos investigativos, convide-os a compartilhar com os colegas e verifique se a turma consegue demonstrar a validade das propriedades de forma autônoma.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1. Exemplo de resposta: $4 \cdot 3 = 12$.

Conforme a tabela dada, temos $\log 3 = 0{,}477$ e $\log 4 = 0{,}602$. Então:

$\log 3 + \log 4 = 0{,}477 + 0{,}602 = 1{,}079$

Também temos $\log 12 = 1{,}079$.

Conclusão: $\log 12 = \log (3 \cdot 4) = \log 3 + \log 4$.

Espera-se que os estudantes percebam que o logaritmo do produto de dois números reais positivos é igual à soma dos logaritmos desses números.

2. Exemplo de resposta: $6 : 3 = 2$.

Conforme a tabela dada, temos $\log 6 = 0{,}778$ e $\log 3 = 0{,}477$. Então:

$\log 6 - \log 3 = 0{,}778 - 0{,}477 = 0{,}301$

Também temos $\log 2 = 0{,}301$.

Conclusão: $\log 2 = \log (6 : 3) = \log 6 - \log 3$.

Espera-se que os estudantes percebam que o logaritmo do quociente de dois números reais positivos é igual à diferença entre os logaritmos desses números.

3. Exemplo de resposta: $2^3 = 8$.
   $\log 2 = 0{,}301$
   $\log 2^3 = \log (2 \cdot 2 \cdot 2) = \log 2 + \log 2 + \log 2 = 3 \cdot \cdot \log 2 = 3 \cdot 0{,}301 = 0{,}903$
   $\log 8 = 0{,}903$
   Conclusão: $\log 8 = \log 2^3 = 3 \cdot \log 2$.
   Espera-se que os estudantes percebam que o logaritmo da potência de base real positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

4. Resposta pessoal. Os estudantes devem relacionar as propriedades dos logaritmos com as propriedades da potenciação. Por exemplo, podem concluir que $\log (b \cdot c) = \log b + \log c$, porque $\log b$ é um expoente da base 10 e b é a potência, e $\log c$ é outro expoente da base 10 e c é a potência. Ao somar os logs, estamos somando os expoentes, o que significa, pela propriedade da potenciação, que estamos multiplicando as potências b e c. Obtemos, assim, $\log (b \cdot c)$, que é o expoente da base 10 quando $b \cdot c$ é a potência.

Página 72

Para pensar e discutir

Comentário para o bloco de questões:

Nestas atividades, os estudantes vão realizar um processo investigativo sobre a base *e*. A proposta é apresentar para eles esse número, explicando que, como o π, esse é um dos principais números irracionais.

1. Resposta pessoal.
   Para este item, utilizando uma calculadora científica, obtivemos $e \approx 2{,}718281828$.

n	Expressão de a_n	Valor de a_n
1	$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1$	2
10	$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10}$	2,59374246...
100	$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}$	2,70481283...
1 000	$\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000}$	2,71692393...
10 000	$\left(1 + \frac{1}{10\,000}\right)^{10\,000}$	2,71814593...
100 000	$\left(1 + \frac{1}{100\,000}\right)^{100\,000}$	2,71826824...
1 000 000	$\left(1 + \frac{1}{1\,000\,000}\right)^{1\,000\,000}$	2,71828047...
10 000 000	$\left(1 + \frac{1}{10\,000\,000}\right)^{10\,000\,000}$	2,71828169...
100 000 000	$\left(1 + \frac{1}{100\,000\,000}\right)^{100\,000\,000}$	2,71828180...

2. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que o número *e* é irracional, uma vez que sempre é possível determinar uma nova casa decimal sem que exista um período.

Página 75

Para pensar e discutir

Resposta pessoal. Utilize essa atividade como diagnóstico antes de seguir em frente. Oriente os estudantes a fazer pesquisas na internet ou utilizar os próprios exemplos do livro para criar essas situações. Eles podem partir de diversos exemplos: crescimento populacional, propagação de notícias, propagação de vírus ou outras doenças, amortização de valores, propagação de fenômenos naturais, como incêndios ou manchas de óleo na água, juros compostos etc. Acompanhe o desenvolvimento dos exemplos para garantir que eles definam todos os elementos necessários para a criação do modelo: valor inicial da função ($f(0)$), valor da base da potência, conjunto domínio, conjunto imagem e possíveis parâmetros que transformem o gráfico da função. Por fim, veja se os problemas criados têm solução e se cada estudante consegue resolver o problema proposto pelo colega, utilizando eventualmente os logaritmos na resolução. Seguindo esses passos será possível determinar se os objetivos da unidade foram atingidos até aqui.

Página 75

Para explorar

Comentário para a questão 1, item *a*:

Os estudantes devem perceber de forma intuitiva os valores de *y* que representam o número de dobras na folha. Ao relacionar *x* e *y*, espera-se que percebam que $x = 2^y$.

1. **a)**

x	1	2	4	8
y	0	1	2	3

x	16	32	64	128
y	4	5	6	7

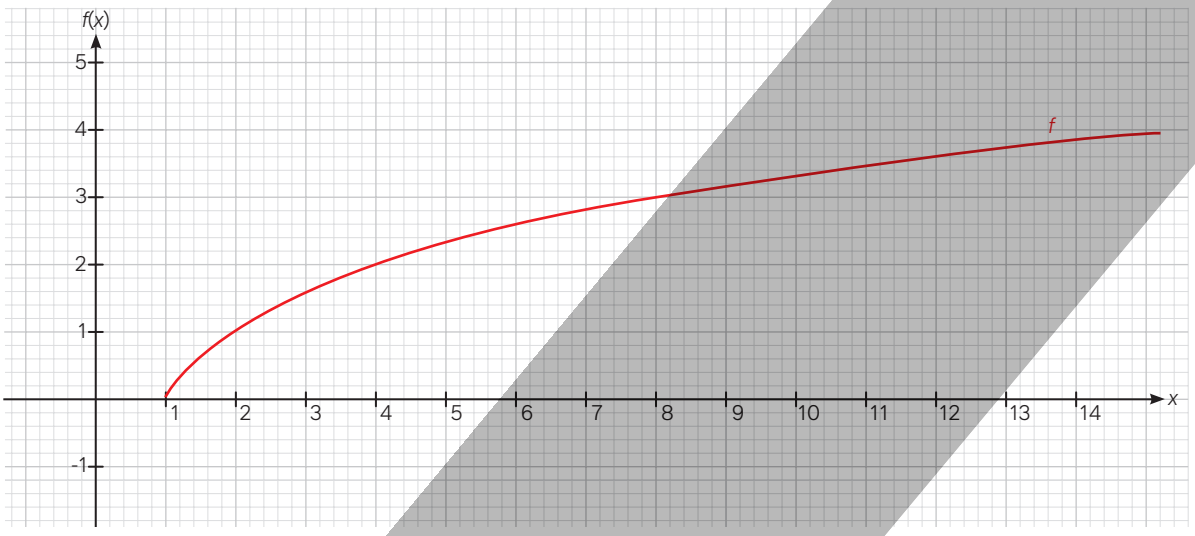
Comentário para os itens *b*, *c* e *d*:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Com base nas observações do item *a*, os estudantes devem perceber que, se $x = 2^y$, então $y = \log_2 x$. Ao analisar o crescimento dessa função, pode ser interessante perguntar se eles entendem por que o gráfico se comporta dessa maneira. De modo geral, pode-se dizer que, como a potência cresce exponencialmente conforme a base aumenta, o logaritmo (y) cresce linearmente conforme o logaritmo (x) cresce exponencialmente.

b) $y = f(x) = \log_2 x$

c)



Tarcísio Garbellini

d) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que os valores da função logarítmica $f(x)$ crescem lentamente conforme aumentamos o valor de x.

Página 76

Para explorar

Comentário para o bloco de questões:

Uma vez assimiladas as propriedades da função exponencial, os estudantes podem investigar e chegar sozinhos a diversas conclusões sobre a função logarítmica, partindo apenas da definição de função inversa. A proposta desta atividade é levá-los a concluir a condição de existência dessa função, seu domínio e contradomínio máximos e sua monotonicidade. Com base nessa investigação, eles podem perceber também a propriedade de simetria entre os gráficos de uma função e de sua inversa.

1. $f^{-1}(x) = \log_a x$; $D = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}$.

2. $f^{-1}(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

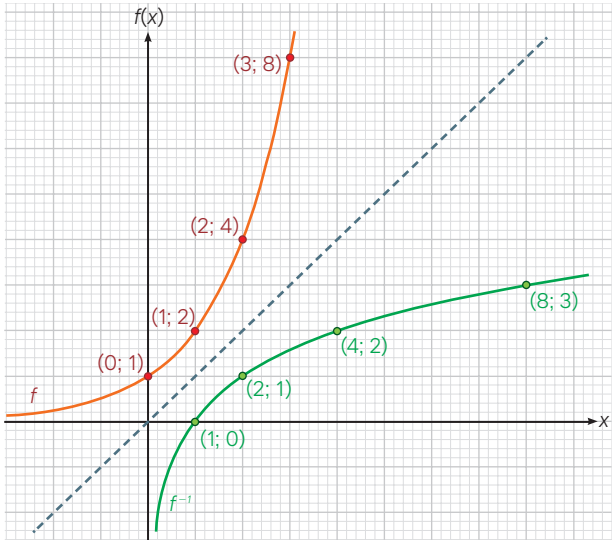
MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

3. Se $0 < a < 1$, a função logarítmica é decrescente. Ou seja, se $m > n$, então $f(m) < f(n)$.
Se $a > 1$, a função logarítmica é crescente. Ou seja, se $m > n$, então, $f(m) > f(n)$.

4. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que os gráficos são espelhados em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

x	$f(x) = 2^x$
0	1
1	2
2	4
3	8

x	$f^{-1}(x) = \log_2 x$
1	0
2	1
4	2
8	3



Tarcísio Garbellini

Páginas 76-77

Para pensar e discutir

Comentário para o bloco de questões:

Após o processo investigativo das características da função logarítmica, é preciso formalizar alguns pontos. Essa formalização deve partir da própria investigação feita anteriormente. Assim, ao refletir sobre cada uma das questões deste bloco, os estudantes devem, aos poucos, familiarizar-se com os conceitos acerca do gráfico dessa função. Pode ser interessante, depois da realização dos exercícios, propor que escrevam as demonstrações das propriedades indicadas no boxe de conceito logo a seguir.

1. a) Resposta possível: Sejam a e b números reais positivos com $a \neq 1$; se o logaritmo de b na base a é x, então a elevado a x é igual a b e, pela definição de potência, a deve ser positivo.

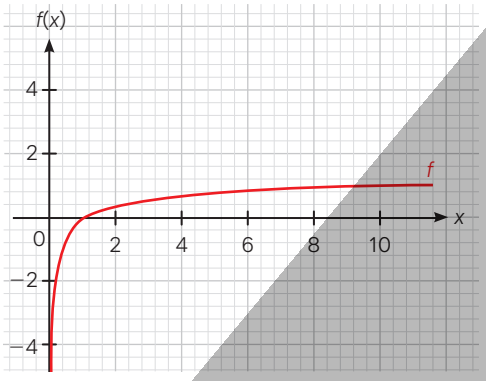
b) Resposta possível: Porque a imagem da função exponencial é o domínio da sua inversa.

c) Resposta possível: Segue da definição de logaritmos:

Se $a = 0$, então $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$

Se $a = 1$, então $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$

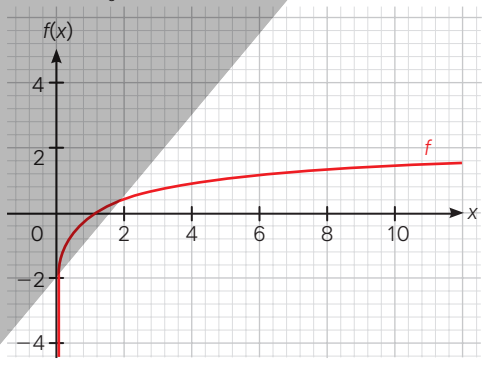
2. a) $f(x) = \log x$



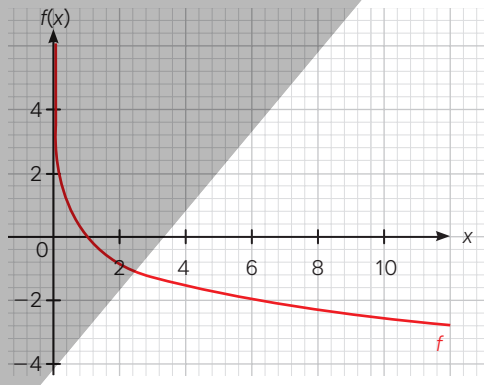
b) $f(x) = \log_{0,1} x$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

c) $f(x) = \log_5 x$

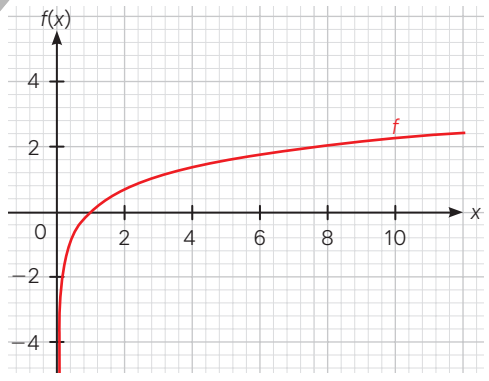


d) $\log_{\frac{1}{e}} x$



Gráficos: Tarcísio Garbellini

e) $f(x) = \ln x$



3. a) Resposta pessoal.

b) Resposta possível: Se a base está entre 0 e 1, a função é decrescente.

c) Resposta possível: Se a base é maior que 1, a função é crescente.

4. a) O gráfico deve ser transladado em uma unidade na vertical para cima.

b) A curva do gráfico será alterada (o crescimento será mais rápido).

c) A curva do gráfico será alterada (o crescimento será mais rápido, ainda mais que na função h).

5. a) $g(x) = 1 + \log x = \log 10 + \log x = \log (10x)$

b) $h(x) = 2 \cdot \log x = \log (x^2)$

c) $\log_2 x = \dfrac{\log x}{\log 2} = \dfrac{1}{\log 2} \cdot \log x = \log x^{\frac{1}{\log 2}}$

6. $f(b \cdot c) \overset{\text{Definição}}{=} \log_a (b \cdot c) \overset{\text{Propriedade do logaritmo}}{=} \log_a b + \log_a c \overset{\text{Definição}}{=} f(b) + f(c)$

Página 77

Atividades

Comentário para o bloco de questões (considerando a exclusão da atividade 1):

Nas atividades de aplicação e verificação de aprendizagem deste bloco, os estudantes poderão verificar se assimilaram os conceitos e as propriedades necessários para avançar na unidade.

1. $\log_{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1}{5}\right) = x \Leftrightarrow \sqrt{5}^x = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow 5^{\frac{x}{2}} = 5^{-1} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = -1 \Leftrightarrow x = -2$

2. 1ª demonstração:

$\log_{a^n} a^m = \dfrac{\log a^m}{\log a^n} = \dfrac{m \cdot \log a}{n \cdot \log a} = \dfrac{m}{n}$

2ª demonstração:

$\log_{a^n} a^m = x \Leftrightarrow (a^n)^x = a^m \Leftrightarrow a^{nx} = a^m \Leftrightarrow nx = m \Leftrightarrow x = \dfrac{m}{n}$.

Portanto, $\log_{a^n} a^m = \dfrac{m}{n}$.

3. $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

4. $\log 5 - 3 \cdot \log 2 + 1{,}5 \cdot \log 9 = \log 5 - \log 2^3 + \dfrac{3}{2} \cdot \log 9 = \log \dfrac{5}{8} + \log 9^{\frac{3}{2}} = \log \left(\dfrac{5}{8} \cdot \sqrt{729}\right) =$

$= \log \dfrac{5 \cdot 27}{8} = \log \dfrac{135}{8}$

5. $\log 0{,}25 = \log \dfrac{1}{4} = \log \dfrac{1}{2^2} = \log 2^{-2} = -2 \cdot \log 2 \cong -2 \cdot 0{,}3 = -0{,}6$

Página 79

Atividades

Comentário para o bloco de questões:

Nestas atividades de aplicação e verificação de aprendizagem, os estudantes serão convidados a resolver questões práticas de aplicação dos conceitos estudados.

1. Em 1986, tínhamos:

Transistores	Área (cm²)
100 000	0,25
x	1

$x \cdot 0{,}25 = 100\,000 \Rightarrow x = \dfrac{100\,000}{0{,}25} = 400\,000$

Logo, em 1 cm² cabiam 400 000 transistores.

Vamos determinar quantas vezes os transistores dobraram para chegar a 100 bilhões.

$100\,000\,000\,000 = 400\,000 \cdot 2^y \Rightarrow 10^6 = 2^2 \cdot 2^y \Rightarrow 10^6 = 2^{2+y}$

$\log 10^6 = \log 2^{2+y} \Rightarrow 6 \cdot \log 10 = (2 + y) \cdot \log 2 \Rightarrow 6 = (2 + y) \cdot 0{,}3 \Rightarrow y = 18$

Logo, para chegar a 100 bilhões, os transistores dobraram 18 vezes desde 1986. Como eles dobram a cada 2 anos, isso ocorreu após 36 anos.

$1986 + 36 = 2022$

Portanto, em 2022 a empresa atingiu a densidade de 100 bilhões de transistores. Alternativa **c**.

2. Em 2011, temos:

$$M = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E_1}{E_0} \Leftrightarrow 9 = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E_1}{E_0} \Leftrightarrow \log \frac{E_1}{E_0} = \frac{27}{2} \text{ (I)}$$

Em 2013, temos:

$$M = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E_2}{E_0} \Leftrightarrow 7 = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E_2}{E_0} \Leftrightarrow \log \frac{E_2}{E_0} = \frac{21}{2} \text{ (II)}$$

Subtraindo (II) de (I), obtemos:

$$\log \frac{E_1}{E_0} - \log \frac{E_2}{E_0} = \frac{27}{2} - \frac{21}{2}$$

$$\log \frac{\frac{E_1}{E_0}}{\frac{E_2}{E_0}} = 3$$

$$\log \frac{E_1}{E_2} = 3$$

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^3$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

$E_1 = 10^3 \cdot E_2$

Portanto, a relação é $E_1 = 10^3 \cdot E_2$.

Alternativa **c**.

Página 82

Para explorar

Comentário para o bloco de questões (considerando a exclusão da atividade 1):

As atividades deste bloco relacionam-se diretamente com a unidade anterior. A ideia é levar os estudantes a estabelecer relações entre os conhecimentos adquiridos a cada momento com outros conhecimentos que possuem, seja dentro da Matemática, seja em outras áreas. Além disso, o contexto da educação financeira é tema transversal da BNCC e deve ser abordado sempre que possível, buscando trazer para a escola o cotidiano dos estudantes e fazer com que eles levem para o cotidiano aquilo que estudam na escola. Por isso, este bloco de questões deve ser trabalhado de forma dialogada, garantindo que os estudantes tenham espaço para colocar suas dúvidas e reflexões.

1. Como a taxa Selic se manteve em torno de 4,5%, ou seja, está abaixo de 8,5%, temos que a poupança rende 70% do valor da taxa básica mais a TR (0%). Assim:

$0{,}7 \cdot 0{,}045 = 0{,}0315 = 3{,}15\%$

Logo, a taxa de juro da poupança é 3,15% a.a.

Agora vamos calcular $M(2)$:

$M(2) = 10 \cdot (1 + 0{,}0315)^2 = 10 \cdot (1{,}0315)^2 \cong 10 \cdot 1{,}064 = 10{,}64$

Portanto, $M(2) \cong 10{,}64$ (aproximadamente R$ 10.640,00).

2. $M(0) = 10 \cdot (1 + 0{,}0315)^0 = 10 \cdot 1 = 10$

Logo, $M(0) = 10$.

Portanto, o 0 significa o tempo presente e o 10 significa o capital de R$ 10.000,00.

3. $Im = [10\,000; +\infty[$

4. Vamos calcular $M(13)$:

$M(13) = 10 \cdot (1 + 0{,}0315)^{13} = 10 \cdot (1{,}0315)^{13} \cong 10 \cdot 1{,}49658 = 14{,}9658$

Vamos calcular $M(14)$:

$M(14) = 10 \cdot (1 + 0{,}0315)^{14} = 10 \cdot (1{,}0315)^{14} \cong 10 \cdot 1{,}54372 = 15{,}43722$

Portanto, após 13 anos o montante é de aproximadamente R$ 14.965,80 e após 14 anos, de aproximadamente R$ 15.437,22.

5. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que não é um número inteiro (pois acontecerá entre 13 e 14 anos) e que é necessário usar logaritmos para resolver a equação obtida: $15\,000 = 10 \cdot (1{,}0315)^x$.

Páginas 82-83

Para explorar

Comentário para o bloco de questões:

Neste bloco de questões, os estudantes vão se familiarizar com as técnicas de resolução de equações exponenciais. É essencial que utilizem seus conhecimentos prévios, como as técnicas de manipulação algébrica para isolar a incógnita. A retomada dessas técnicas deve ser feita por meio das atividades 1 e 2. Utilize essas atividades como diagnóstico e reforce as técnicas que a turma tiver menos domínio.

Na atividade 3, é proposta uma investigação sobre como isolar o expoente em uma equação na qual o termo com a incógnita já está isolado. É essencial fazer uma discussão com os estudantes para que reflitam e formalizem suas conclusões a partir das investigações feitas na atividade. Espera-se que eles percebam estratégias comuns, como a utilização das definições de potência para inverter frações trocando o sinal do expoente ou transformar raízes em potências de expoente fracionário. Além disso, eles devem perceber quando é possível obter bases iguais e assim igualar os expoentes e quando é preciso utilizar logaritmo.

Na atividade 4, eles poderão aplicar o que absorveram da investigação feita na atividade 3.

1. Resposta pessoal. Sugestão de passos para resolver a equação $7 - 3^{x-1} = 2 \cdot 3^x$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

$7 = 2 \cdot 3^x + 3^{x-1}$	Reunir os termos que não são independentes no mesmo membro.
$7 = 2 \cdot 3^x + 3^x \cdot 3^{-1}$	Utilizar as propriedades das potências para desmembrar expoentes mantendo todos os termos em x, como 3^x.
$7 = 3^x \cdot \left(2 + \frac{1}{3}\right)$	Utilizar a definição da potência de expoente negativo para escrever 3^{-1} como $\frac{1}{3}$ e colocar o termo 3^x em evidência.
$7 = 3^x \cdot \frac{7}{3}$	Somar os coeficientes de 3^x usando regras de soma de frações.
$7 \cdot \frac{3}{7} = 3^x$	Isolar o termo 3^x dividindo os dois membros por $\frac{7}{3}$.
$3^1 = 3^x \Leftrightarrow x = 1$	Utilizar a bijeção da função exponencial para concluir que potências iguais e bases iguais devem ter o mesmo expoente, concluindo que $x = 1$.

2. **a)** $3^x = 4 \Leftrightarrow x = \log_3 4$

b) $3{,}1 \cdot 11^x = 31$

$$11^x = \frac{31}{3{,}1}$$

$11^x = 10 \Leftrightarrow x = \log_{11} 10$

c) $5^x + 5^{x+1} = 12$

$5^x + 5^x \cdot 5^1 = 12$

$5^x \cdot (1 + 5) = 12$

$5^x \cdot 6 = 12$

$5^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_5 2$

3. Resposta pessoal.

a) $a = 2; c = 8 \Rightarrow 2^b = 8 \Rightarrow 2^b = 2^3 \Rightarrow b = 3$

b) $a = 1; c = 1 \Rightarrow 1^b = 1$ ($c = b$ é um número real qualquer)

c) $a = 2; c = 1 \Rightarrow 2^b = 1 \Rightarrow b = 0$ (para todo a diferente de 0 ou 1)

d) $a = 2; c = 3 \Rightarrow 2^b = 3 \Rightarrow b = \log_2 3 \cong 1{,}58496$

e) $a = 0{,}5; c = 4 \Rightarrow 0{,}5^b = 4 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^b = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{-b} = 2^2 \Rightarrow b = -2$

f) $a = 0{,}333...; c = 4 \Rightarrow 0{,}333...^b = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^b = 4 \Rightarrow b = \log_{\frac{1}{3}} 4 \cong 1{,}2618$

g) $a = 0{,}5; c = \sqrt{125} \Rightarrow 5^b = \sqrt{125} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5^b = \sqrt{5^3} = 5^{\frac{3}{2}} \Rightarrow b = \frac{3}{2} = 1{,}5$

Página 83

Para pensar e discutir

Comentário para o bloco de questões:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Neste bloco de questões os estudantes vão aprofundar a resolução de equações, relacionando as equações exponenciais com as logarítmicas. É essencial que eles desenvolvam estratégias próprias de resolução e as compartilhem com os colegas, visando promover autonomia na abordagem desse tipo de questão. No final da unidade, há outras atividades em que eles poderão aplicar essas estratégias.

1. **a)** $\log_2 12 + \log_2 3x - \log_2 3 = \log_2 (4 \cdot 3) + \log_2 3x - \log_2 3 = \log_2 4 + \log_2 3 + \log_2 3x - \log_2 3 = \log_2 4 + \log_2 3x = \log_2 (4 \cdot 3x) = \log_2 (12x)$

b) $\log x^3 - 2 \cdot \log x = 3 \cdot \log x - 2 \cdot \log x = \log x$

c) $\ln (x + 1) + \ln (x - 1) - 3 \cdot \ln 2 =$

$= \ln (x + 1) \cdot (x - 1) - \ln 2^3 =$

$= \ln (x^2 - 1) - \ln 8 = \ln \left(\frac{x^2 - 1}{8}\right)$

2. $2 \cdot \log_4 3x + \log_2 x = 0$

$$2 \cdot \frac{\log_2 3x}{\log_2 4} + \log_2 x = 0$$

$$2 \cdot \frac{\log_2 3x}{\log_2 2^2} + \log_2 x = 0$$

$$2 \cdot \frac{\log_2 3x}{2 \cdot \log_2 2} + \log_2 x = 0$$

$\log_2 3x + \log_2 x = 0$

$\log_2 (3x \cdot x) = 0 \Leftrightarrow \log_2 3x^2 = 0$

$3x^2 = 2^0$

$3x^2 = 1$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Página 84

Para pensar e discutir

Comentário para o bloco de questões:

Antes de estudar a resolução de inequações, cujas técnicas serão as mesmas da resolução de equações que acabamos de apresentar, convém trabalhar com os estudantes a ideia de que resolver uma inequação que tem uma expressão envolvendo a incógnita x é o mesmo que analisar a influência da variação dos valores de x na variação dos valores de $f(x)$. Assim, essas atividades devem promover uma reflexão acerca da relação entre esses valores de acordo com a expressão de $f(x)$.

Eles devem se lembrar, para uma melhor análise da atividade, que em funções decrescentes temos que $a > b$ implica $f(a) < f(b)$. Isso vai justificar a inversão do sinal que ocorre na resolução das inequações.

1. $f(x) = 4^x$

a) $f(x) < 1 \Leftrightarrow x < 0$

b) $f(x) > 1 \Leftrightarrow x > 0$

c) $f(x) < 4 \Leftrightarrow x < 1$

d) $f(x) > 4 \Leftrightarrow x > 1$

2. $f(x) = 0{,}25^x$

a) $f(x) < 1 \Leftrightarrow x > 0$

b) $f(x) > 1 \Leftrightarrow x < 0$

c) $f(x) < 4 \Leftrightarrow x > -1$

d) $f(x) > 4 \Leftrightarrow x < -1$

3. $f(x) = \log_4 x$

a) $f(x) < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 4$

b) $f(x) > 1 \Leftrightarrow x > 4$

c) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$

d) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

4. $f(x) = \log_{0,25} x$

a) $f(x) < 1 \Leftrightarrow x > 0{,}25$

b) $f(x) > 1 \Leftrightarrow 0 < x < 0{,}25$

c) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$

d) $f(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

5. Resposta possível: Em funções exponenciais ou logarítmicas crescentes, os sinais das desigualdades são iguais, e, em funções decrescentes, os sinais são invertidos.

Página 85

Para retomar

Comentário para a questão:

Uma vez familiarizados com as estratégias de resolução de equações exponenciais e logarítmicas e apropriados da possibilidade de inversão do sinal da desigualdade na resolução de inequações, os estudantes podem aplicar esses conhecimentos na retomada de uma situação analisada anteriormente.

$10\,000 \cdot 1{,}5^x > 100\,000$

$1{,}5^x > 10$

$x > \log_{1,5} 10 \cong 5{,}68$

Portanto, a população de insetos ultrapassará os 100 000 indivíduos a partir da 6ª semana.

Página 85

Atividades

Comentário para o bloco de questões:

As questões de verificação da aprendizagem deste bloco envolvem resolução de inequações. Aqui é possível observar não só se os estudantes conseguem resolver inequações como também se utilizam corretamente as estratégias de manipulação algébrica necessárias tanto para a resolução de inequações quanto para a resolução de equações.

1. **a)** $4^x + 5 > 6$

$4^x > 6 - 5$

$4^x > 1$

$4^x > 4^0$

$x > 0$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

b) $2 \cdot 4^{-x} <$

$2 \cdot (2^2)^{-x} < 2^3$

$2 \cdot 2^{-2x} < 2^3$

$2^{1-2x} < 2^3$

$1 - 2x < 3$

$-2x < 2$

$x > -1$

c) $\log_4 x^2 + 2 < 2$

$\log_4 x^2 < 2 - 2$

$\log_4 x^2 < 0 \Leftrightarrow 0 < x^2 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

d) $\log_{0,25} x + \log_{0,25} 4 > 0$

$\log_{0,25} (x \cdot 4) > 0$

$\log_{0,25} 4x > 0 \Leftrightarrow 0 < 4x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{4}$

2. Temos que 1 petabyte equivale a 2^{20} gigabytes. Vamos descobrir quantos DVDs de 4 gigabytes são necessários para armazenar 2^{20} gigabytes.

$\frac{2^{20}}{4} = \frac{2^{20}}{2^2} = 2^{(20-2)} = 2^{18}$

Logo, são necessários 2^{18} DVDs para armazenar 1 petabyte. Como queremos armazenar 3 petabytes, devemos multiplicar essa quantidade por 3.

$3 \cdot 2^{18} = (2 + 1) \cdot 2^{18} = 2^1 \cdot 2^{18} + 2^{18} = 2^{19} + 2^{18}$

Portanto, o número de DVDs para armazenar 3 petabytes é maior que 2^{19} e menor que 2^{20}.

Alternativa **e**.

Páginas 86-87

Atividades finais

Comentário para as questões 1 a 4:

Nessas questões, a proposta é verificar a aprendizagem dos estudantes em relação à aplicação das propriedades da potência, reconhecendo inclusive quais propriedades devem ser utilizadas em cada situação e discutindo a racionalidade e a irracionalidade dos resultados.

1. $5^{17} \cdot 4^9 = 5^{17} \cdot (2^2)^9 = 5^{17} \cdot 2^{18} = 5^{17} \cdot 2^{17} \cdot 2 = (5 \cdot 2)^{17} \cdot 2 = 10^{17} \cdot 2 = 2 \cdot 10^{17}$

Sabemos que o número 10^{17} tem 17 zeros e mais o algarismo 1, ou seja, 18 algarismos. Então, o número $2 \cdot 10^{17}$ tem o algarismo 2 seguido de 17 zeros, ou seja, 18 algarismos.

Alternativa **b**.

2. a) $x = \left[\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

Portanto, $x = 2$.

b) Não tendo como demonstrar se $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ é um número racional ou irracional temos duas opções:

Se $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ for racional, temos automaticamente a prova de que existem dois irracionais α e β tais que α^β é racional. Basta então fazer $\alpha = \beta = \sqrt{2}$.

Se $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ for irracional, podemos tomar $\alpha = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ e $\beta = \sqrt{2}$. Nesse caso, pelo item *a*, α^β é racional.

Em ambos os casos é possível encontrar α e β irracionais tais que α^β é racional. Como os dois casos são complementares (não há uma terceira opção), pode-se afirmar que sempre é possível encontrar um par α e β nessas condições.

3. $(0{,}2)^3 + (0{,}16)^2 = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}16 \cdot 0{,}16 = 0{,}008 + 0{,}0256 = 0{,}0336$

Alternativa **b**.

4. $\left(a^{-1} + b^{-1}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{b + a}{ab}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{ab}{b + a}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{(a + b)^2}$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Alternativa **d**.

Comentário para as questões 5 a 7:

Nessas questões, a proposta é verificar a aprendizagem dos estudantes em relação à compreensão dos gráficos das funções exponenciais. Os estudantes precisarão analisar os gráficos quanto ao crescimento e ao decrescimento, determinar as funções a partir dos gráficos e determinar pontos da função.

5. Para determinar os pontos de intersecção dos gráficos, podemos igualar as leis das duas funções:

$\frac{3^{x + 64}}{5} = \frac{81^x}{45}$

$\frac{3^{x + 64}}{5} = \frac{81^x}{5 \cdot 9}$

$3^{x + 64} = \frac{81^x}{9}$

$9 \cdot 3^{x + 64} = 81^x$

$3^2 \cdot 3^{x + 64} = (3^4)^x$

$3^{2 + x + 64} = 3^{4x}$

$x + 66 = 4x$

$66 = 3x$

$x = \frac{66}{3} = 22$

Substituindo o valor de x em umas das leis das funções, determinamos o valor de y.

$$x = 22 \Rightarrow y = \frac{3^{22+64}}{5} = \frac{3^{86}}{5}$$

Portanto, a intersecção dos gráficos ocorre em um único ponto $\left(22; \frac{3^{86}}{5}\right)$ do 1º quadrante.

Alternativa **d**.

6. Vamos determinar a lei da função exponencial do tipo $y = a^x$.

Do gráfico, temos que a função passa pelo ponto (1; 0, 2). Substituindo no modelo $y = a^x$, obtemos:

$0{,}2 = a^1$

$a = 0{,}2$

Então, a lei da função é $y = 0{,}2^x$.

Para $x = -0{,}5$, temos:

$$y = 0{,}2^{-0{,}5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

Portanto, $y = \sqrt{5}$.

Alternativa **c**.

7. **a)** Do gráfico, temos:

$$f(-1) = 4 \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} = 4 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 4 \Leftrightarrow a = 4b \quad \text{(I)}$$

$$f(1) = \frac{9}{4} \Leftrightarrow a \cdot b^1 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow ab = \frac{9}{4} \text{ (II)}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$ab = \frac{9}{4} \Leftrightarrow 4b \cdot b = \frac{9}{4} \Leftrightarrow b^2 = \frac{9}{16} \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{\frac{9}{16}} \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{\frac{9}{16}} \Leftrightarrow b = \pm\frac{3}{4}$$

Como $b > 0$, temos $a = 3$ e $b = \frac{3}{4}$ e, portanto, $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x$.

Assim, o gráfico de f intersecta o eixo y no ponto $(0; f(0)) = (0; 3)$.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

b) Do gráfico, temos:

$g(0) = -2 \Leftrightarrow c + c \cdot d^{\log_3 0} = -2 \Leftrightarrow c = -4 \Leftrightarrow 2c = -4 \Leftrightarrow c = -2$

$g(\log_3 2) = -6 \Leftrightarrow c + c \cdot d^{\log_3 2} = -6 \Leftrightarrow -2 - 2 \cdot d^{\log_3 2} = -6 \Leftrightarrow -2 \cdot d^{\log_3 2} = -4 \Leftrightarrow d^{\log_3 2} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2 d^{\log_3 2} = \log_2 2 \Leftrightarrow \log_3 2 \cdot \log_2 d = 1 \Leftrightarrow \log_3 2 \cdot \frac{\log_3 d}{\log_3 2} = 1 \Leftrightarrow \log_3 d = 1 \Leftrightarrow d = 3^1 \Rightarrow d = 3$

Logo, $g(x) = -2 - 2 \cdot 3^x$.

O gráfico da função g foi deslocado duas unidades em relação ao eixo x. Logo, a assíntota de g é a reta paralela ao eixo x dada por $y = -2$.

Comentário para as questões 8 e 9:

Nessas questões, a proposta é verificar a aprendizagem dos estudantes em relação à resolução de equações exponenciais, utilizando diferentes estratégias de resolução.

8. Seja s o primeiro *site*, com s visitas diárias. Então, $s = 4^n$.

O *site* S tem o dobro de visitas, ou seja:

$S = 2s = 2 \cdot 4^n$

Quando o *site* s tem índice de visita $n = 6$, no *site* S temos:

$S = 2 \cdot 4^6 = 4^{0{,}5} \cdot 4^6 = 4^{0{,}5+6} = 4^{6{,}5}$

Portanto, o índice de vista do *site* S é igual a 6,5.

Alternativa **e**.

9. Observando o gráfico, temos:

$f(x) = -\frac{h}{2} \Rightarrow -\frac{h}{2} = \log x$ (I)

$f(x + n) = \frac{h}{2} \Rightarrow \frac{h}{2} = \log(x + n)$ (II)

Somando (I) e (II), obtemos:

$\frac{h}{2} - \frac{h}{2} = \log x + \log(x + n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log x + \log(x + n) = 0$

$\log [x \cdot (x + n)] = 0 \Rightarrow \log(x^2 + xn) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + xn = 10^0$

$x^2 + nx - 1 = 0$

Usando a fórmula de Bháskara, obtemos:

$x = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$ ou $x = \frac{-n - \sqrt{n^2 - 4}}{2}$ (não convém)

Logo, $x = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$.

Substituindo o valor de x na equação (II), obtemos o valor de h:

$\frac{h}{2} = \log(x + n)$

$h = 2 \cdot \log\left(\frac{-n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} + n\right) = 2 \cdot \log\left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right)$

Portanto, $h = 2 \cdot \log\left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right)$.

Alternativa **e**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Comentário para as questões 10 a 12:
Nessas questões, a proposta é verificar a aprendizagem dos estudantes em relação às funções logarítmicas e sua relação com as exponenciais.

10. Do enunciado temos que $D(t) = D(0) \cdot e^{kt}$ é a lei da função que modela o desmatamento.
Vamos determinar o tempo, em anos, para que o desmatamento seja o dobro do valor inicial, isto é, $2 \cdot D(0)$, sabendo que $k = 0{,}6\% = \frac{0{,}6}{100}$. Assim:

$D(t) = D(0) \cdot e^{kt}$

$2 \cdot D(0) = D(0) \cdot e^{\frac{0{,}6}{100}t}$

$2 = e^{\frac{0{,}6}{100}t}$

Usando a aproximação de ln em ambos os membros da igualdade, obtemos:

$\ln(2) = \ln\left(e^{\frac{0{,}6}{100}t}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}69 = \frac{0{,}6}{100}t \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}69 \cdot 100 = 0{,}6t$

$69 = \frac{6}{10}t$

$690 = 6t$

$t = \frac{690}{6} = 115$

Portanto, são necessários 115 anos para que a área de desmatamento da Amazônia dobre.

Alternativa **b**.

11. Do enunciado, temos $c(t) = 400 - k \cdot \log_3 (at + 1)$, em que t é dado em horas, $c(t)$ é dado em mg/L e a e k são constantes positivas.

a) Para $t = 0$, temos:

$c(0) = 400 - k \cdot \log_3 (a \cdot 0 + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 400 - k \cdot \log_3 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 400 - k \cdot 0 = 400$

Portanto, 400 mg/L é a concentração de analgésico no instante inicial $t = 0$.

b) Para $t = 2$, temos:

$$c(2) = \frac{c(0)}{2} = \frac{400}{2} = 200$$

Então:

$200 = 400 - k \cdot \log_3 (a \cdot 2 + 1)$

$k \cdot \log_3 (2a + 1) = 200$

$$k = \frac{200}{\log_3 (2a + 1)} \text{ (I)}$$

Para $t = 8$, temos $c(8) = 0$. Então: $0 = 400 - k \cdot \log_3 (a \cdot 8 + 1)$

$k \cdot \log_3 (8a + 1) = 400$

$$k = \frac{400}{\log_3 (8a + 1)} \text{ (II)}$$

Igualando (I) e (II), obtemos:

$$\frac{200}{\log_3 (2a + 1)} = \frac{400}{\log_3 (8a + 1)}$$

$\log_3 (8a + 1) = 400 \cdot \log_3 (2a + 1)$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

$\log_3 (8a + 1) = 2 \cdot \log_3 (2a + 1)$

$\log_3 (8a + 1) = \log_3 (2a + 1)^2$

$8a + 1 = (2a + 1)^2$

$8a + 1 = 4a^2 + 4a + 1$

$4a^2 = 4a \Leftrightarrow a = 1$

Substituindo o valor de a em (I), obtemos o valor de k:

$$k = \frac{200}{\log_3 (2 \cdot 1 + 1)} \Rightarrow \frac{200}{\log_3 3} = \frac{200}{1} = 200$$

Portanto, $a = 1$ e $k = 200$.

UNIDADE 3 Sequências numéricas e progressão geométrica

Objetivos

- Identificar a regularidade existente em sequências numéricas.
- Compreender a formação de uma sequência a partir de termo geral.
- Determinar o termo geral de uma progressão geométrica.
- Empregar as propriedades de uma progressão geométrica para resolver problemas.
- Identificar e relacionar o cálculo de montantes em juros compostos com crescimento em progressão geométrica.
- Utilizar o conceito de logaritmo para resolver situações-problema relacionadas à progressão geométrica.
- Corresponder os termos de uma progressão geométrica a pontos de imagens de função exponencial.
- Associar o estudo de fractais com progressão geométrica identificando sua formação.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Justificativa

O trabalho com sequências e progressões geométricas possibilita a investigação de propriedades e o estabelecimento de conjecturas matemáticas, além de oferecer mais uma oportunidade para os estudantes consolidarem habilidades relativas ao cálculo de juros compostos.

Competências e habilidades da BNCC trabalhadas nesta unidade

Competências gerais

Competências gerais 2, 4 e 9

Na seção **Para explorar** da página 104, os estudantes, em grupos, trabalham com a teoria dos fractais. Ao explorarem a sequência de construção de um fractal denominado "floco de neve" de Koch, eles exercitam a curiosidade intelectual, exploram ideias, fazem conexões, elaboram hipóteses, mobilizando, assim, a **Competência geral 2**. Como trabalham em grupos, exercitam a empatia, o diálogo e a cooperação, aprendendo a acolher a perspectiva do outro e valorizando a diversidade, dessa maneira desenvolvendo a **Competência geral 9**. Ainda nesse momento, são apresentadas as quatro primeiras figuras da sequência "floco de neve", para que os estudantes, partindo da análise dessas figuras, elaborem um algoritmo que represente a formação da sequência. Utilizam, então, diferentes linguagens, tanto para se comunicar durante a troca de ideias como para se expressar por meio de um algoritmo, o que mobiliza a **Competência geral 4**.

Competências específicas e habilidades de Matemática

Competência específica 3

EM13MAT304 e EM13MAT305

Na sequência de atividades das páginas 108 e 109, os estudantes utilizam as

funções exponenciais e as funções logarítmicas para resolver e elaborar problemas de Matemática Financeira.

Competência específica 4

EM13MAT405

Na seção **Para pensar e discutir** da página 91, após os estudantes analisarem um algoritmo para a construção da curva de Koch, desenvolvem outro para desenhar essa curva e explicam como pensaram. Em outro momento, na página 104, em grupos, desenvolvem um algoritmo para representar um fractal.

Competência 5

EM13MAT508

Na página 108, nas atividades da seção **Para pensar e discutir**, os estudantes têm a oportunidade de associar a função exponencial de domínio discreto a uma progressão geométrica identificando que a base da função exponencial corresponde à razão da progressão geométrica.

Além disso, aprendem algumas propriedades das progressões geométricas por meio de investigações, como consta, por exemplo, na página 105, em que é apresentado um quadro, e, estimulados por questionamentos, os próprios estudantes concluem que em uma progressão geométrica finita o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos termos extremos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Resoluções e comentários

Página 89

Abertura

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.

   As respostas são pessoais e dependem do conhecimento dos estudantes. Entretanto, é esperado que eles comentem que um crescimento acentuado é geralmente denominado, na mídia, de crescimento exponencial. Como a unidade irá trabalhar com progressão geométrica, você pode retomar a segunda questão informando que há uma relação entre progressão geométrica e função exponencial que será trabalhada na unidade.

Página 91

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal. Outra maneira de descrever: comece com um segmento; divida-o em 3 partes iguais; a parte central deve ser girada em 60° no sentido anti-horário; acrescente um segmento de mesma medida do segmento girado de tal maneira a formar um triângulo equilátero sem base. Continue esse processo indefinidamente com os demais segmentos.
2. A linha da figura 2 tem comprimento menor que o comprimento da linha da figura 3.
3. A regra desta sequência é o termo seguinte ter quatro vezes o terço do comprimento da linha da figura anterior:

   Figura 1: $a_1 = 1$

   Figura 2: $a_2 = 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$ (são 4 segmentos de comprimento $\frac{1}{3}$)

   Figura 3: $a_3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$ (são 16 segmentos de comprimento $\frac{1}{9}$)

   Figura 4: $a_4 = \frac{16}{9} \cdot \frac{4}{3} = \frac{64}{27}$ (são 64 segmentos de comprimento $\frac{1}{27}$)

   Figura 5: $a_5 = \frac{64}{27} \cdot \frac{4}{3} = \frac{256}{81}$ (são 256 segmentos de comprimento $\frac{1}{81}$)

   O comprimento da soma das linhas da figura 5 pode ser representado pelo número $\frac{256}{81}$ u.c.

Página 93

Para explorar

Respostas pessoais.

Embora a unidade aborde a questão das sequências, a relação com os fractais possibilita ampliar o conhecimento a respeito da aplicação matemática. Os fractais mais simples podem ser construídos por meio de sequências de procedimentos, algumas das quais envolvendo progressão geométrica.

Página 94

Para pensar e discutir

1. $a_{25} = 3 \cdot 24$
   $a_{25} = 72$

   $a_{100} = 3 \cdot 99$
   $a_{100} = 297$

2. Chamando de n a posição do termo na sequência, temos $a_n = 3(n - 1)$.

3. $a_{45} = 3(45 - 1)$

$a_{45} = 3 \cdot 44$

$a_{45} = 132$

Obtemos 132, que é o 45º termo da sequência.

Página 95

Para explorar

1. Resposta pessoal que depende da fórmula do termo geral elaborada.

Exemplo de fórmula do termo geral: $a_n = 2n + 3$, sendo n um número natural não nulo, isto é, $n \in \mathbb{N}^*$.

$a_1 = 2 \cdot 1 + 3$	$a_2 = 2 \cdot 2 + 3$	$a_3 = 2 \cdot 3 + 3$	$a_4 = 2 \cdot 4 + 3$	$a_5 = 2 \cdot 5 + 3$
$a_1 = 2 + 3$	$a_2 = 4 + 3$	$a_3 = 6 + 3$	$a_4 = 8 + 3$	$a_5 = 10 + 3$
$a_1 = 5$	$a_2 = 7$	$a_3 = 9$	$a_4 = 11$	$a_5 = 13$
$a_6 = 2 \cdot 6 + 3$	$a_7 = 2 \cdot 7 + 3$	$a_8 = 2 \cdot 8 + 3$	$a_9 = 2 \cdot 9 + 3$	$a_{10} = 2 \cdot 10 + 3$
$a_6 = 12 + 3$	$a_7 = 14 + 3$	$a_8 = 16 + 3$	$a_9 = 18 + 3$	$a_{10} = 20 + 3$
$a_6 = 15$	$a_7 = 17$	$a_8 = 19$	$a_9 = 21$	$a_{10} = 23$

Sequência obtida com essa fórmula: (5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23).

2. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1, \text{ sendo } n \in N \text{ e } n \geqslant 2 \end{cases}$$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2 \cdot a_1 + 1 = 2 \cdot 5 + 1 \Rightarrow a_2 = 11$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot a_2 + 1 = 2 \cdot 11 + \Rightarrow a_3 = 23$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = 2 \cdot a_3 + 1 = 2 \cdot 23 + 1 \Rightarrow a_4 = 47$

$n = 5 \Rightarrow a_5 = 2 \cdot a_4 + 1 = 2 \cdot 47 + 1 \Rightarrow a_5 = 95$

$n = 6 \Rightarrow a_6 = 2 \cdot a_5 + 1 = 2 \cdot 95 + 1 \Rightarrow a_6 = 191$

$n = 7 \Rightarrow a_7 = 2 \cdot a_6 + 1 = 2 \cdot 191 + 1 \Rightarrow a_7 = 383$

$n = 8 \Rightarrow a_8 = 2 \cdot a_7 + 1 = 2 \cdot 383 + 1 \Rightarrow a_8 = 767$

$n = 9 \Rightarrow a_9 = 2 \cdot a_8 + 1 = 2 \cdot 767 + 1 \Rightarrow a_9 = 1535$

$n = 10 \Rightarrow a_{10} = 2 \cdot a_9 + 1 = 2 \cdot 1535 + 1 \Rightarrow a_{10} = 3071$

Sequência obtida com essa fórmula: (5; 11; 23; 47; 95; 191; 383; 767; 1535; 3071)

3. Resposta pessoal.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Páginas 95-96

Atividades

Um dos aspectos principais a ser observado no encaminhamento das atividades diz respeito à notação de uma sequência e à compreensão de fórmula que a descreve. Os padrões numéricos numa sequência são compreendidos quando os estudantes externam "como ela é formada". Oportunize que façam isso nas diversas sequências propostas nas atividades. Além de evidenciar que estão compreendendo como são formadas, também ampliam o vocabulário matemático a ser empregado.

Sugerimos que algumas dessas atividades, a critério do professor, sejam escolhidas para encaminhamento individual em sala, com correções coletivas para verificar o entendimento.

1. a) $a_1 = 1^2 \Rightarrow a_1 = 1$

$a_2 = 2^2 \Rightarrow a_2 = 4$

$a_3 = 3^2 \Rightarrow a_3 = 9$

$a_4 = 4^2 \Rightarrow a_4 = 16$

$a_5 = 5^2 \Rightarrow a_5 = 25$

$a_6 = 6^2 \Rightarrow a_6 = 36$

Portanto, os 6 primeiros termos da sequência são (1; 4; 9; 16; 25; 36).

b) $a_{10} = 10^2 = 100$

O 10º termo da sequência é 100.

c) Chamando de n a posição do termo na sequência, temos $a_n = n^2$, com n pertencente ao conjunto dos números naturais não nulos.

2. a) $a_1 = 3^{-1} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}$ $\quad a_2 = 3^{-2} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{9}$ $\quad a_3 = 3^{-3} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{27}$

$a_4 = 3^{-4} \Rightarrow a_4 = \frac{1}{81}$ $\quad a_5 = 3^{-5} \Rightarrow a_5 = \frac{1}{243}$ $\quad a_6 = 3^{-6} \Rightarrow a_6 = \frac{1}{729}$

Portanto, os 6 primeiros termos da sequência são $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \frac{1}{81}; \frac{1}{243}; \frac{1}{729}\right)$.

b) Uma resposta possível: cada termo é um terço do valor do termo anterior.

3. a) A sequência dos números naturais pares é (0, 2, 4, 6, 8, ...). Podemos calcular qualquer termo dessa sequência usando a fórmula do termo geral $a_n = 2(n - 1)$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$. Então:

$a_{100} = 2(100 - 1)$
$a_{100} = 2 \cdot 99$
$a_{100} = 198$

Portanto, 198 é o 100º termo da sequência dos números naturais pares.

b) A sequência dos números naturais ímpares é (1, 3, 5, 7, 9, ...). Podemos calcular qualquer termo dessa sequência usando a fórmula do termo geral $a_n = 2n - 1$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$. Então:

$a_{100} = 2 \cdot 100 - 1$
$a_{100} = 200 - 1$
$a_{100} = 199$

Portanto, 199 é o 100º termo da sequência dos números naturais ímpares.

4. a) $a_n = 7 - 3n$

$a_1 = 7 - 3 \cdot 1$ $\quad a_2 = 7 - 3 \cdot 2$ $\quad a_3 = 7 - 3 \cdot 3$ $\quad a_4 = 7 - 3 \cdot 4$ $\quad a_5 = 7 - 3 \cdot 5$
$a_1 = 7 - 3$ $\quad a_2 = 7 - 6$ $\quad a_3 = 7 - 9$ $\quad a_4 = 7 - 12$ $\quad a_5 = 7 - 15$
$a_1 = 4$ $\quad a_2 = 1$ $\quad a_3 = -2$ $\quad a_4 = -5$ $\quad a_5 = -8$

Portanto, (4; 1; −2; −5; −8).

b) $a_n = 2n^2$

$a_1 = 2 \cdot 1^2$ $\quad a_2 = 2 \cdot 2^2$ $\quad a_3 = 2 \cdot 3^2$ $\quad a_4 = 2 \cdot 4^2$ $\quad a_5 = 2 \cdot 5^2$
$a_1 = 2$ $\quad a_2 = 2 \cdot 4$ $\quad a_3 = 2 \cdot 9$ $\quad a_4 = 2 \cdot 16$ $\quad a_5 = 2 \cdot 25$
$a_1 = 2$ $\quad a_2 = 8$ $\quad a_3 = 18$ $\quad a_4 = 32$ $\quad a_5 = 50$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Portanto, (2; 8; 18; 32; 50).

c) $a_n = \frac{n + 1}{n}$

$a_1 = \frac{1 + 1}{1}$ $\quad a_2 = \frac{2 + 1}{2}$ $\quad a_3 = \frac{3 + 1}{3}$ $\quad a_4 = \frac{4 + 1}{4}$ $\quad a_5 = \frac{5 + 1}{5}$
$a_1 = \frac{2}{1}$ $\quad a_2 = \frac{3}{2}$ $\quad a_3 = \frac{4}{3}$ $\quad a_4 = \frac{5}{4}$ $\quad a_5 = \frac{6}{5}$
$a_1 = 2$

Portanto, $\left(2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \frac{6}{5}\right)$.

d) $a_n = (-1)^n \cdot n$

$a_1 = (-1)^1 \cdot 1$ $\quad a_2 = (-1)^2 \cdot 2$ $\quad a_3 = (-1)^3 \cdot 3$ $\quad a_4 = (-1)^4 \cdot 4$ $\quad a_5 = (-1)^5 \cdot 5$
$a_1 = -1 \cdot 1$ $\quad a_2 = 1 \cdot 2$ $\quad a_3 = -1 \cdot 3$ $\quad a_4 = 1 \cdot 4$ $\quad a_5 = -1 \cdot 5$
$a_1 = -1$ $\quad a_2 = 2$ $\quad a_3 = -3$ $\quad a_4 = 4$ $\quad a_5 = -5$

Portanto, (−1; 2; −3; 4; −5).

5. a) Os estudantes devem perceber que é a sequência dos múltiplos naturais de 5. Portanto, o termo geral pode ser escrito como $a_n = 5n$, com $n \in \mathbb{N}$. Outra solução, seria $a_n = 5(n - 1)$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Os estudantes devem perceber que é a sequência dos múltiplos naturais de 7. Portanto, o termo geral pode ser expresso como $a_n = 7n$, sendo $n \in \mathbb{N}$. Outra solução seria $a_n = 7(n - 1)$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$.

6. a) O termo geral da sequência pode ser determinado por $a_n = 4n + 3$, sendo que $n \in \mathbb{N}^*$.

$a_1 = 4 \cdot 1 + 3$ $\quad a_2 = 4 \cdot 2 + 3$ $\quad a_3 = 4 \cdot 3 + 3$ $\quad a_4 = 4 \cdot 4 + 3$ $\quad a_5 = 4 \cdot 5 + 3$
$a_1 = 4 + 3$ $\quad a_2 = 8 + 3$ $\quad a_3 = 12 + 3$ $\quad a_4 = 16 + 3$ $\quad a_5 = 20 + 3$
$a_1 = 7$ $\quad a_2 = 11$ $\quad a_3 = 15$ $\quad a_4 = 19$ $\quad a_5 = 23$

$a_6 = 4 \cdot 6 + 3$ $\quad a_7 = 4 \cdot 7 + 3$ $\quad a_8 = 4 \cdot 8 + 3$ $\quad a_9 = 4 \cdot 9 + 3$ $\quad a_{10} = 4 \cdot 10 + 3$
$a_6 = 24 + 3$ $\quad a_7 = 28 + 3$ $\quad a_8 = 32 + 3$ $\quad a_9 = 36 + 3$ $\quad a_{10} = 40 + 3$
$a_6 = 27$ $\quad a_7 = 31$ $\quad a_8 = 35$ $\quad a_9 = 39$ $\quad a_{10} = 43$

Portanto, (7; 11; 15; 19; 23; 27; 31; 35; 39; 43).

b) O termo geral da sequência pode ser determinado por $a_n = 7n + 5$, sendo que $n \in \mathbb{N}^*$.

$a_1 = 7 \cdot 1 + 5$ $\quad a_2 = 7 \cdot 2 + 5$ $\quad a_3 = 7 \cdot 3 + 5$ $\quad a_4 = 7 \cdot 4 + 5$ $\quad a_5 = 7 \cdot 5 + 5$
$a_1 = 7 + 5$ $\quad a_2 = 14 + 5$ $\quad a_3 = 21 + 5$ $\quad a_4 = 28 + 5$ $\quad a_5 = 35 + 5$
$a_1 = 12$ $\quad a_2 = 19$ $\quad a_3 = 26$ $\quad a_4 = 33$ $\quad a_5 = 40$

$a_6 = 7 \cdot 6 + 5$ $\quad a_7 = 7 \cdot 7 + 5$ $\quad a_8 = 7 \cdot 8 + 5$ $\quad a_9 = 7 \cdot 9 + 5$ $\quad a_{10} = 7 \cdot 10 + 5$
$a_6 = 42 + 5$ $\quad a_7 = 49 + 5$ $\quad a_8 = 56 + 5$ $\quad a_9 = 63 + 5$ $\quad a_{10} = 70 + 5$
$a_6 = 47$ $\quad a_7 = 54$ $\quad a_8 = 61$ $\quad a_9 = 68$ $\quad a_{10} = 75$

Portanto, (12; 19; 26; 33; 40; 47; 54; 61; 68; 75).

7. a) Temos que $H_n = n \cdot (2n - 1)$.

$H_1 = 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1)$ $\quad H_2 = 2 \cdot (2 \cdot 2 - 1)$ $\quad H_3 = 3 \cdot (2 \cdot 3 - 1)$ $\quad H_4 = 4 \cdot (2 \cdot 4 - 1)$ $\quad H_5 = 5 \cdot (2 \cdot 5 - 1)$
$H_1 = 1 \cdot 1$ $\quad H_2 = 2 \cdot 3$ $\quad H_3 = 3 \cdot 5$ $\quad H_4 = 4 \cdot 7$ $\quad H_5 = 5 \cdot 9$
$H_1 = 1$ $\quad H_2 = 6$ $\quad H_3 = 15$ $\quad H_4 = 28$ $\quad H_5 = 45$

$H_6 = 6 \cdot (2 \cdot 6 - 1)$ $\quad H_7 = 7 \cdot (2 \cdot 7 - 1)$
$H_6 = 6 \cdot 11$ $\quad H_7 = 7 \cdot 13$
$H_6 = 66$ $\quad H_7 = 91$

Portanto, (1; 6; 15; 28; 45; 66; 91).

b) $H_n = n \cdot (2n - 1)$
$780 = n \cdot (2n - 1)$
$780 = 2n^2 - n$
$2n^2 - n$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Neste mo[illegible] fórmula de Bháskara para o cálculo das raízes ou zeros da equação de 2º grau.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-780)}}{4}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{6\,241}}{4}$$

$$x = \frac{1 \pm 79}{4}$$

$$x = -\frac{39}{2} \text{ ou } x = 20$$

Como n é um número natural não nulo, pois representa a ordem do termo, temos que 780 é o 20º número hexagonal. Outra maneira de resolver seria por meio de construção um a um dos termos, o que daria um pouco mais de trabalho, mas representa também um procedimento válido e independente da utilização da fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau.

8. $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 4, \text{ para } n \geqslant 2 \ (n \text{ natural}) \end{cases}$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = a_1 + 4 = 3 + 4 \Rightarrow a_2 = 7$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + 4 = 7 + 4 \Rightarrow a_3 = 11$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = a_3 + 4 = 11 + 4 \Rightarrow a_4 = 15$

$n = 5 \Rightarrow a_5 = a_4 + 4 = 15 + 4 \Rightarrow a_5 = 19$

$n = 6 \Rightarrow a_6 = a_5 + 4 = 19 + 4 \Rightarrow a_6 = 23$

$n = 7 \Rightarrow a_7 = a_6 + 4 = 23 + 4 \Rightarrow a_7 = 27$

Logo, o 7º termo dessa sequência é 27.

Para construir essa sequência, a partir do primeiro termo que é 3, somamos sempre 4 unidades ao termo anterior, ou seja, (3; 7; 11; 15; 19; 23; 27; ...). Assim, 27 é o 7º termo.

Espera-se que os estudantes percebam que os termos dessa sequência vão aumentando de 4 em 4.

9. Espera-se que os estudantes percebam que os termos dessa sequência serão diferentes, porque o valor do primeiro termo foi alterado para 5. Porém, os termos dela continuam aumentando de 4 em 4.

10. a) Resposta pessoal.

Exemplo de fórmula de recorrência:

$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1, \text{ sendo } n \in N \text{ e } n \geqslant 2 \end{cases}$

b) Resposta pessoal.

Considerando o exemplo de fórmula de recorrência do item a, temos:

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2 \cdot a_1 + 1 = 2 \cdot (-2) + 1 \Rightarrow a_2 = -3$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot a_2 + 1 = 2 \cdot (-3) + 1 \Rightarrow a_3 = -5$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = 2 \cdot a_3 + 1 = 2 \cdot (-5) + 1 \Rightarrow a_4 = -9$

$n = 5 \Rightarrow a_5 = 2 \cdot a_4 + 1 = 2 \cdot (-9) + 1 \Rightarrow a_5 = -17$

$n = 6 \Rightarrow a_6 = 2 \cdot a_5 + 1 = 2 \cdot (-17) + 1 \Rightarrow a_6 = -33$

$n = 7 \Rightarrow a_7 = 2 \cdot a_6 + 1 = 2 \cdot (-33) + 1 \Rightarrow a_7 = -65$

$n = 8 \Rightarrow a_8 = 2 \cdot a_7 + 1 = 2 \cdot (-65) + 1 \Rightarrow a_8 = -129$

$n = 9 \Rightarrow a_9 = 2 \cdot a_8 + 1 = 2 \cdot (-129) + 1 \Rightarrow a_9 = -257$

$n = 10 \Rightarrow a_{10} = 2 \cdot a_9 + 1 = 2 \cdot (-257) + 1 \Rightarrow a_{10} = -513$

Portanto, (−2; −3; −5; −9; −17; −33; −65; −129; −257; −513).

c) Resposta pessoal.

11. a) A sequência numérica formada pela quantidade de cubos é (1; 5; 14; 30; 55; ...). A 5ª figura terá a quantidade de cubos da 4ª figura + 5^2, ou seja, 30 + 25 = 55.

b) Nessa sequência, o primeiro termo é 1 e cada termo, a partir do segundo, é obtido somando o termo anterior ao número da posição elevado ao quadrado. Ou seja, a fórmula de recorrência para essa sequência é $a_n = a_{n-1} + n^2$, sendo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 96

Para explorar

Ao propormos uma atividade de exploração envolvendo os números naturais primos, temos um momento de sistematização dos próprios estudantes em relação a tais números. Ao longo do Ensino Fundamental, os números primos já foram trabalhados, mas muitas vezes como mera apresentação de números naturais que apresentam apenas dois divisores naturais distintos. Aqui, em dupla, haverá um momento de pesquisa, de investigação sobre o procedimento adotado por Eratóstenes. Sugerimos que essa atividade faça parte da avaliação dos estudantes sobre a unidade.

1 a 4. Resposta pessoal que dependerá da pesquisa feita pelos estudantes.

Incentive-os a fazer a pesquisa e comunicar as conclusões por meio do texto solicitado. É importante que, ao final da pesquisa, eles indiquem corretamente os números naturais menores que 100 que são primos.

Comente que Eratóstenes foi um matemático grego que viveu entre os anos 276 a.C. e 194 a.C. O crivo de Eratóstenes é uma tabela criada para determinar os números naturais primos até um número limite, por exemplo, do 1 até o 100. Para isso, vamos utilizar os critérios de divisibilidade conhecidos.

1º passo: Escreva na tabela os números de 1 até 100.

2º passo: Relembre que número primo é aquele que tem somente dois divisores naturais: o número 1 e ele mesmo. Portanto, na tabela, risque o número 1, pois ele não é primo.

3º passo: Risque todos os números múltiplos de 2, menos ele mesmo e os já cortados, pois o 2 é primo. Ou seja, risque 4, 6, 8, 10, ...

4º passo: Risque todos os múltiplos de 3, menos ele mesmo e os já cortados, que é primo. Lembre os estudantes que um número é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos também for um número divisível por 3.

5º passo: Risque todos os números múltiplos de 5, que são aqueles terminados em 0 ou 5, sem riscar o 5 e os já cortados, que é primo.

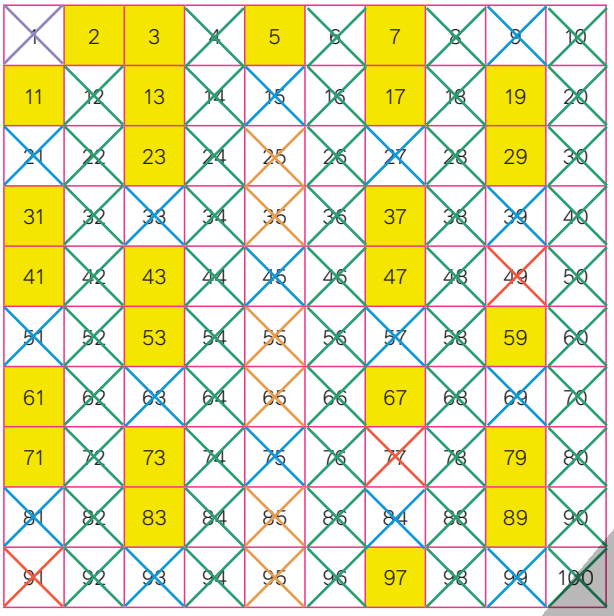
6º passo: Risque todos os números múltiplos de 7, sem riscar o 7 e os já cortados, que é primo. Ou seja: 7, 14, 21, ..., 77, 84, ...

7º passo: Por fim, escreva os números que você não riscou na tabela, formando a sequência dos números primos menores que 100:

(2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97)

Confira a seguir como deve ficar a aparência final da tabela.

DAE



Página 97

Atividades

Aqui temos um momento importante para o desenvolvimento do trabalho de Arte relacionado ao uso de padrões em diversos tipos de manifestações artísticas. O próprio texto aponta algumas sugestões.

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.

As respostas dependem da pesquisa. Este é um momento de valorização da cultura afro-brasileira. É importante envolver os estudantes no trabalho, que pode ser feito em dupla.

Página 99

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir

1. Resposta pessoal. Exemplo de resposta: para cada casa, a quantidade de grãos de trigo é o dobro da quantidade de grãos da casa imediatamente anterior.
2. Podemos escrever a sequência numérica da quantidade de grãos, até a 11ª casa: (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024). Então, essa casa terá 1024 grãos de trigo.
3. Essa é uma resposta que exigirá do estudante primeiro observar que para a 64ª casa serão necessários 2^{63}. A partir daí, é preciso um procedimento para determinar a quantidade de algarismos do número correspondente. Deixe que os estudantes investiguem; somente então apresente um procedimento.

   Após algum tempo de investigação, caso ninguém encontre uma resposta, apresente uma estratégia de resolução.

   Acompanhe a seguir como podemos fazer uma aproximação para evidenciar a ordem de grandeza do número correspondente a 2^{63}.

   $2^{63} = 2^3 \cdot 2^{60}$

   $2^{63} = 8 \cdot (2^{10})^6$

   Podemos fazer uma aproximação para 2^{10}:

   $2^{10} = 1024 \cong 1000 = 10^3$

   Então:

   $2^{63} \cong 8 \cdot (10^3)^6$

   $2^{63} \cong 8 \cdot 10^{18}$

   Temos que 10^{18} é formado pelo algarismo 1 seguido de 18 zeros; $8 \cdot 10^{18}$ é formado pelo algarismo 8 seguidos de 18 zeros, ou seja, tem 19 algarismos.

   Portanto, a quantidade de grãos de trigo na 63ª casa pode ser estimada por um número que tem 19 algarismos.

Página 100

Para pensar e discutir

1. Sabemos que na PG cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo anterior multiplicado por uma constante, chamada razão. Então, teremos uma PG constante quando a razão for igual a 1, pois 1 é o elemento neutro da multiplicação. Exemplo: (10; 10; 10; 10; ...).

   Observe que essa sequência é tanto uma PA constante quanto uma PG constante.
2. Uma PG é oscilante quando termos consecutivos dela têm sinais contrários, isto é, um positivo e outro negativo. Exemplo: (1; −2; 4; −8; ...)
3. Sim. Por exemplo, com razão positiva $\frac{1}{2}$ e primeiro termo $a_1 = 1$, temos $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots\right)$.

Páginas 102–103

Atividades

Comentário das atividades de 1 a 5: Sugerimos que essas atividades sejam encaminhadas para resolução individual, como forma de possibilitar que os estudantes consolidem as ideias iniciais a respeito de progressão geométrica, particularmente do conceito e da utilização do termo geral.

1. **a)** $q = \frac{10^{-2}}{10^{-1}}$

   $q = 10^{(-2-(-1))}$

   $q = 10^{(-2+1)}$

   $q = 10^{-1}$

   Logo, a razão é $q = 10^{-1}$.

b) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_n = 10^{-1} \cdot (10^{-1})^{n-1}$

$a_n = 10^{-1} \cdot 10^{-n+1}$

$a_n = 10^{-1} \cdot \frac{10^1}{10^n}$

$a_n = \frac{10^0}{10^n}$

$a_n = \frac{1}{10^n}$

Logo, o termo geral dessa sequência é $a_n = \frac{1}{10^n}$.

2. Calculamos inicialmente a razão da PG dada:

$q = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}}$

$q = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{1}$

$q = 3$

Podemos então calcular os demais termos da PG multiplicando o anterior por 3: $\left(\frac{1}{9};\ \frac{1}{3};\ 1;\ 3;\ 9;\ 27;\ 81;\ 243\right)$. Portanto, são 8 termos.

Também podemos usar a fórmula do termo geral e determinar o valor de *n*:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$243 = \frac{1}{9} \cdot 3^{(n-1)}$

$2187 = 3^{(n-1)}$

$3^7 = 3^{(n-1)}$

$7 = n - 1$

$n = 8$

Logo, a PG tem 8 termos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

3. Usando a fórmula do termo geral, podemos determinar a razão.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$30\,000 = 3 \cdot q^{5-1}$

$\frac{30\,000}{3} = q^4$

$10\,000 = q^4$

$\pm \sqrt[4]{10^4} = q$

$q = \pm 10$

Logo, a razão poderá ser 10 (PG crescente) ou -10 (PG oscilante).

4. Para todos os itens, vamos calcular a razão *q* e, depois, usar a fórmula do termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ para determinar o termo pedido.

a) $q = \frac{4}{1} = 4$

Então:

$a_6 = 1 \cdot 4^{6-1}$

$a_6 = 1 \cdot 4^5$

$a_6 = 1024$

b) $q = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5$

Então:

$a_7 = 1 \cdot (0{,}5)^{7-1}$

$a_7 = 1 \cdot (0{,}5)^6$

$a_7 = 0{,}015625$

Outra solução é utilizar a razão na forma de fração $\frac{1}{2}$.

$a_7 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7-1}$

$a_7 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$

$a_7 = \frac{1}{64}$

c) $q = \frac{2}{-1} = -2$

Então:

$a_8 = (-1) \cdot (-2)^{8-1}$

$a_8 = (-1) \cdot (-2)^7$

$a_8 = (-1) \cdot (-128)$

$a_8 = 128$

5. Um cuidado a ser tomado aqui é que existe uma tendência dos estudantes considerarem apenas um valor para a razão da progressão geométrica quando estiverem diante da passagem $q^6 = 729$. Reforce que existem dois números reais que elevados à sexta potência resultam em 729: 3 e -3. Assim, haverá duas sequências.

Explique que é necessário descobrir a razão para interpolar os meios geométricos na PG (1, ___, ___, ___, ___, ___, 729). Veja que temos um total de 7 termos nessa sequência.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$729 = 1 \cdot q^{7-1}$

$729 = q^6 \Rightarrow q = \pm \sqrt[6]{729}$

$q = \pm 3$

Existem duas possibilidades, para $q = 3$ e $q = -3$. Calculamos os demais termos para cada razão.

$a_2 = 1 \cdot ((\pm 3)^{2-1}) = 1 \cdot ((\pm 3)^1) = 1 \cdot (\pm 3) \Rightarrow a_2 = \pm 3$

$a_3 = 1 \cdot ((\pm 3)^{3-1}) = 1 \cdot ((\pm 3)^2) = 1 \cdot 9 \Rightarrow a_3 = 9$

$a_4 = 1 \cdot ((\pm 3)^{4-1}) = 1 \cdot ((\pm 3)^3) = 1 \cdot (\pm 27) \Rightarrow a_4 = \pm 27$

$a_5 = 1 \cdot ((\pm 3)^{5-1}) = 1 \cdot ((\pm 3)^4) = 1 \cdot 81 \Rightarrow a_5 = 81$

$a_6 = 1 \cdot ((\pm 3)^{6-1}) = 1 \cdot ((\pm 3)^5) = 1 \cdot (\pm 243) \Rightarrow a_6 = \pm 243$

Logo, existem duas possibilidades: (1; 3; 9; 27; 81; 243; 729) e (1; -3; 9; -27; 81; -243; 729).

Comentário das atividades de 6 a 13: Sugerimos que algumas delas sejam selecionadas como tarefas para casa com verificação coletiva de respostas e resoluções. Essa sugestão é para que os estudantes tenham autonomia em relação ao enfrentamento de situações diversas.

6. Nessa questão, temos $n = 4$, $q = 3$ e $a_1 = 345$. Então:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_4 = 345 \cdot 3^{4-1}$

$a_4 = 345 \cdot 3^3$

Alternativa **c**.

7. Nas etapas dadas, temos que as áreas dos quadrados são:

$a_1 = 100$

$a_2 = 100 \cdot \frac{3}{4}$

$a_3 = 100 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = 100 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 100 \cdot \frac{9}{16}$

Então, essas áreas formam uma PG de primeiro termo 100 u.a. e razão $\frac{3}{4}$.

Assim, a área na etapa 6 será:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_6 = 100 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{6-1}$

$a_6 = 100 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$

Alternativa **e**.

8. Em 2014 eram 59,5 milhões de pessoas em deslocamento forçado, e o crescimento dessa quantidade é dado de acordo com uma PG de razão 1,14. Então, em 2015, temos:

$59{,}5 \cdot 1{,}14 =$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Logo, em 2015 eram 67,83 milhões de pessoas em deslocamento forçado.

Alternativa **b**.

9. A cada dobra da folha A0, temos o dobro de novos formatos do que na etapa anterior. Então, podemos escrever a fórmula do termo geral:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_n = 1 \cdot 2^{n-1}$

$a_n = 2^{n-1}$

As folhas de tamanho A8 são obtidas na 9ª dobra. Então:

$a_9 = 2^{9-1}$

$a_9 = 2^8$

$a_9 = 256$

Logo, são obtidas 256 folhas tamanho A8.

Alternativa **e**.

10. Da figura 1 para a figura 2, retira-se o quadrado central, sobrando 8 quadrados pretos. Da figura 2 para a figura 3, de cada quadrado preto é retirado o central, ficando 8 quadrados pretos em cada um. Ou seja, a quantidade de quadrados pretos nas figuras forma uma PG de razão 8. Fazendo esse processo 3 vezes, teremos $8^3 = 512$ quadrados pretos.

Alternativa **b**.

11. Queremos uma pilha com 200 m de altura, ou seja, com 20 000 cm de altura, pois $200 \text{ m} = 200 \cdot 100 \text{ cm} = 20\,000 \text{ cm}$. Sabemos que 1 cm corresponde a 100 folhas empilhadas; então, queremos uma pilha com 20 000 cm ou com 2 000 000 folhas. Assim:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$2\,000\,000 = 2 \cdot 2^{(n-1)}$

$1\,000\,000 = 2^{(n-1)}$

$10^6 = 2^{(n-1)}$

$(10^3)^2 = 2^{(n-1)}$

Usando a aproximação dada:

$(2^{10})^2 = 2^{(n-1)}$

$2^{20} = 2^{(n-1)}$

$20 = n - 1$

$20 + 1 = n$

$21 = n$

Logo, com 21 etapas obteríamos uma pilha com 200 m de altura.

Alternativa **a**.

12. Em 2009 a árvore tinha 1 dm de altura, ou 0,1 m, e em 2011 tinha 2,5 m. Podemos escrever, então, a PG (0,1; ___; 2,5) formada pelas alturas. Usando a fórmula do termo geral, calculamos a razão q:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$2{,}5 = 0{,}1 \cdot q^{3-1}$

$\frac{2{,}5}{0{,}1} = q^2$

$25 = q^2$

$\pm\sqrt{25} = q$

$\pm 5 = q$

Como não é possível obter medidas negativas, consideramos a razão $q = 5$, que é a razão do crescimento no período.

Alternativa **c**.

13. O número de alunos contaminados pelo vírus forma uma PG (1, 2, 4, ..., 512), de razão $q = 2$. Assim:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$512 = 1 \cdot 2^{n-1}$

$512 = 2^{n-1}$

$2^9 = 2^{n-1}$

$9 = n - 1$

$10 = n$

Logo, no 10º dia todos os 512 alunos teriam sarampo.

Alternativa **b**.

Página 104

Para explorar

1. Exemplo de resposta: Partindo de um triângulo equilátero, dividimos cada segmento (cada lado) em três partes iguais. Na parte do meio, construímos um triângulo equilátero e apagamos o lado que já existia desse triângulo. Repetimos essas etapas para cada novo segmento de reta obtido.
2. A sequência é a PG (3; 12; 48; 192; ...).
3. $a_1 = 3$

   $12 = 3q^{2-1}$

   $q = 4$

   Portanto, $a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

   Comente com os estudantes que $\mathbb{N}^*$ é o conjunto de todos os naturais excluindo o zero.
4. Na primeira figura, são 3 segmentos e cada um tem comprimento 1 u.c. Assim, o perímetro é 3 u.c.

   Na segunda figura, são 12 segmentos e cada um tem comprimento $\frac{1}{3}$ u.c. Assim, o perímetro é $12 \cdot \frac{1}{3}$ u.c. = = 4 u.c.

   Na terceira figura, são 48 segmentos e cada um tem comprimento $\frac{1}{9}$ u.c. Assim, o perímetro é $48 \cdot \frac{1}{9}$ u.c. = = $\frac{16}{3}$ u.c.

   Na quarta figura, são 192 segmentos e cada um tem comprimento $\frac{1}{27}$ u.c. Assim, o perímetro é $192 \cdot \frac{1}{27}$ u.c. = $\frac{64}{9}$ u.c.

   E assim por diante.

   Portanto, a sequência da PG é $\left(3; 4; \frac{16}{3}; \frac{64}{9}; \ldots\right)$.
5. Resposta pessoal. Os fractais, por si sós, representam uma curiosidade para o estudante. Nesse sentido, ele deve ser incentivado a buscar um pouco mais de conhecimento sobre os fractais em relação à própria história, ou mesmo exemplos interessantes que possam estar relacionados com a ideia de "modelar" formas ou aspectos da própria natureza. No texto que os estudantes irão apresentar, instrua-os a não apenas dar opiniões, mas mostrar relações ou descrições de como os fractais que eles pesquisaram foram formados.

Página 105

Para pensar e discutir

1. O resultado não é o mesmo.
2. Obtemos o mesmo resultado, que é −8748.
3. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que o resultado será o mesmo.

   Temos aqui um momento em que eles investigam um padrão numérico. Com base nisso, podem elaborar diversas progressões geométricas e verificar se esse padrão se repete. Trata-se de uma propriedade que é justificada a seguir.

Página 108

Para pensar e discutir

1. Na progressão geométrica, a base indica o valor da razão.
2. É o 8º termo da progressão geométrica.
3. Representa uma PG de primeiro termo igual a 6 e razão igual a 3. Comente que, diferente do que aconteceu na questão 1, aqui a razão da progressão geométrica não é a base da variável x, pois existe um termo multiplicando a potência correspondente.

Para pensar e discutir

1. A variação das imagens não é constante, pois as imagens formam uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$.
2. A sequência será uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{9}$.
3. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que as variações das grandezas x e $f(x)$ são diferentes. Enquanto a grandeza x varia de 1 em 1, a grandeza representada por $f(x)$ está, nessa ordem, em progressão geométrica.

   Temos aqui um momento em que o estudante investiga um padrão numérico. Com base nisso, ele pode elaborar diversas funções exponenciais e observar que, se os valores naturais de x aumentam de 1 em 1, tem-se que a sequência formada por suas imagens será uma progressão geométrica.

Páginas 108-109

Atividades

Nesta unidade os estudantes são exigidos num aspecto fundamental para que haja uma aprendizagem significativa: relacionar conteúdos. Assim, devem relacionar progressão geométrica com função exponencial, progressão geométrica com juros compostos, utilizar logaritmo em alguns momentos (assuntos todos abordados neste livro). Pela importância de tal assunto, sugerimos que a maioria dessas atividades sejam conduzidas para resolução em

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

sala de aula, individualmente e também em duplas. As correções precisam ser amplamente discutidas com a turma toda. Lembre que é um momento importante de sistematização de conteúdos diversos que se relacionam aqui.

Comente que disciplinas como Biologia e Química se utilizam também de crescimentos em progressão geométrica: existem situações que podem ser pesquisadas sobre o crescimento do número de bactérias num organismo, decrescimento radioativo da massa de uma substância etc. A ideia é que os estudantes fiquem atentos quando se depararem com tais situações nessas disciplinas.

1. a) $f(x) = 4 \cdot 5^{-x}$

$f(1) = 4 \cdot 5^{-1}$ $\quad f(2) = 4 \cdot 5^{-2}$ $\quad f(3) = 4 \cdot 5^{-3}$ $\quad f(4) = 4 \cdot 5^{-4}$ $\quad f(5) = 4 \cdot 5^{-5}$

$f(1) = \frac{4}{5}$ $\quad f(2) = \frac{4}{25}$ $\quad f(3) = \frac{4}{125}$ $\quad f(4) = \frac{4}{625}$ $\quad f(5) = \frac{4}{3\,125}$

Logo, a sequência é $\left(\frac{4}{5}; \frac{4}{25}; \frac{4}{125}; \frac{4}{625}; \frac{4}{3\,125}\right)$.

b) É uma progressão geométrica decrescente de razão igual a $\frac{1}{5}$ e primeiro termo $\frac{4}{5}$.

2. Para calcular os valores da função, vamos usar a propriedade dos logaritmos $\log_b b^k = k$, com $b > 0$ e $b \neq 1$.

$f(x) = \log_2 x$

$f(1) = \log_2 1$ $\quad f(2) = \log_2 2$ $\quad f(4) = \log_2 4$ $\quad f(8) = \log_2 8$

$f(1) = \log_2 2^0$ $\quad f(2) = \log_2 2^1$ $\quad f(4) = \log_2 2^2$ $\quad f(8) = \log_2 2^3$

$f(1) = 0$ $\quad f(2) = 1$ $\quad f(4) = 2$ $\quad f(8) = 3$

A sequência formada é (0, 1, 2, 3, ...). É uma sequência em que os termos crescem de 1 em 1 e primeiro termo é 0. (Recebe o nome de progressão aritmética de razão igual a 1.)

3. a) Podemos utilizar a fórmula $M_n = C \cdot (1 + i)^n$.

$M_1 = 5\,000 \cdot (1 + 0{,}025)^1$ $\quad M_2 = 5\,000 \cdot (1 + 0{,}025)^2$ $\quad M_3 = 5\,000 \cdot (1 + 0{,}025)^3$

$M_1 = 5\,000 \cdot 1{,}025^1$ $\quad M_2 = 5\,000 \cdot 1{,}025^2$ $\quad M_3 = 5\,000 \cdot 1{,}025^3$

$M_1 = 5\,125$ $\quad M_2 \cong 5\,253{,}13$ $\quad M_3 \cong 5\,384{,}45$

$M_4 = 5\,000 \cdot (1 + 0{,}025)^4$ $\quad M_5 = 5\,000 \cdot (1 + 0{,}025)^5$ $\quad M_6 = 5\,000 \cdot (1 + 0{,}025)^6$

$M_4 = 5\,000 \cdot 1{,}025^4$ $\quad M_5 = 5\,000 \cdot 1{,}025^5$ $\quad M_6 = 5\,000 \cdot 1{,}025^6$

$M_4 \cong 5\,519{,}06$ $\quad M_5 = 5\,657{,}04$ $\quad M_6 = 5\,798{,}47$

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
R$ 5.125,00	R$ 5.253,13	R$ 5.384,45	R$ 5.519,06	R$ 5.657,04	R$ 5.798,47

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

b) Os montantes, nessa ordem, formam uma progressão geométrica crescente de razão igual a 1,025.

4. A dívida será o dobro do valor inicial quando chegar a 2 · R$ 5.000,00 = R$ 10.000,00. Então:

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$10\,000 = 5\,000 \cdot (1 + 0{,}025)^n \Rightarrow \frac{10\,000}{5\,000} = 1{,}025^n$

$2 = 1{,}025^n$

$\log 2 = \log 1{,}025^n$

$\log 2 = n \cdot \log 1{,}025 \Rightarrow \frac{\log 2}{\log 1{,}025} = n$

$n \cong 28{,}071$

Logo, serão necessários 29 meses para que a dívida de Bruna supere o dobro do valor inicial.

5. O valor do equipamento sofrerá descontos consecutivos de 10% ao longo de 5 anos. Então, a cada ano, o valor corresponde a 100% − 10% = 90% = 0,9 do valor do ano anterior.

$M = 10\,000 \cdot (0{,}9)^5$

$M = 10\,000 \cdot 0{,}59049$

$M = 5\,904{,}9$

Logo, o preço do equipamento será R$ 5.904,90 após 5 anos de uso.

Alternativa **d**.

6. Utilizando como referência a atividade anterior, atribua um valor para um carro zero e, com base nele, elabore uma tabela com os valores do carro desde a compra até os seus 5 primeiros anos de uso. Utilize o mesmo percentual de redução do valor do carro da atividade anterior. Ao final, calcule o percentual correspondente à desvalorização total do carro nesse período. Exemplo de problema:

Considere um carro, com valor inicial de R$ 20.000,00 e que desvaloriza 10% ao ano.

O valor do automóvel sofrerá descontos consecutivos de 10% ao longo de 5 anos. Então, a cada ano, o valor corresponde a 100% − 10% = 90% = 0,9 do valor do ano anterior.

$M_0 = 20\,000 \cdot (0{,}9)^0$
$M_0 = 20\,000$

$M_1 = 20\,000 \cdot (0{,}9)^1$
$M_1 = 18\,000$

$M_2 = 20\,000 \cdot (0{,}9)^2$
$M_2 = 16\,200$

$M_3 = 20\,000 \cdot (0{,}9)^3$
$M_3 = 14\,580$

$M_4 = 20\,000 \cdot (0{,}9)^4$
$M_4 = 13\,122$

$M_5 = 20\,000 \cdot (0{,}9)^5$
$M_5 = 11\,809{,}80$

Novo	1º ano de uso	2º ano de uso
R$ 20.000,00	R$ 18.000,00	R$ 16.200,00
3º ano de uso	**4º ano de uso**	**5º ano de uso**
R$ 14.580,00	R$ 13.122,00	R$ 11.809,80

Então:

$p = \dfrac{11\,809{,}80}{20\,000} = 0{,}59049 \cong 59{,}05\%$

ou

$p = (0{,}9)^5 = 0{,}59049 \cong 59{,}05\%$

Logo, o percentual correspondente à desvalorização total do carro nesse período foi de aproximadamente 59,05%.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

7. Esta é uma atividade [illegible] encaminhada como desafio. Não há necessidade de utilizar a fórmula da soma dos termos da PG, pois ela envolve apenas quatro termos. Observe, na resolução apresentada, a utilização de propriedades envolvendo potenciação.

Como a razão da progressão geométrica é igual a $\dfrac{1}{4}$, temos:

$$\frac{1}{4} = \frac{f(2)}{f(1)} = \frac{r \cdot e^{2k}}{r \cdot e^{k}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = e^{k}$$

Observando a soma dos valores $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$:

$$r \cdot e^{k} + r \cdot e^{2k} + r \cdot e^{3k} + r \cdot e^{4k} = \frac{255}{128}$$

$$r \cdot \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4\right] = \frac{255}{128}$$

$$r \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}\right) = \frac{255}{128}$$

$$r \cdot \left(\frac{64 + 16 + 4 + 1}{256}\right) = \frac{255}{128}$$

$$r \cdot \frac{85}{2} = 255 \Leftrightarrow r = 6$$

Portanto, r é um número múltiplo de 3.

Alternativa **c**.

8. **Afirmação I:** correta.

Os valores das 6 parcelas formam uma PG. Sabendo a segunda e a quinta parcelas, calculamos a razão.

$a_5 = a_2 \cdot q^3$
$1600 = 12\,800 \cdot q^3$
$\dfrac{1600}{12\,800} = q^3$
$q = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2}$

Então:

$a_2 = a_1 \cdot q$
$12\,800 = a_1 \cdot \dfrac{1}{2}$
$a_1 = 25\,600$

Assim:

$a_3 = a_1 \cdot q^2$
$a_3 = 25\,600 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$
$a_3 = 6\,400$

$a_4 = a_1 \cdot q^3$
$a_4 = 25\,600 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$
$a_3 = 3\,200$

Logo, as 6 prestações formam a PG (R$ 25.600,00; R$ 12.800,00; R$ 6.400,00; R$ 3.200,00; R$ 1.600,00; R$ 800,00).

Calculamos o valor total das prestações:

R$ 25.600,00 + R$ 12.800,00 + R$ 6.400,00 + + R$ 3.200,00 + R$ 1.600,00 + R$ 800,00 = = R$ 50.400,00

O valor da entrada é 15% do valor total das prestações, ou seja, R$ 50.400,00 · 0,15 = R$ 7.560,00.

$\dfrac{7\,560}{25\,600} \cong 0{,}30 = 30\%$

Portanto, a entrada é de R$ 7.560,00, o que corresponde a aproximadamente 30% do valor da primeira prestação.

Afirmação II: incorreta.

O valor do carro é R$ 50.400,00 + R$ 7.560,00 = = R$ 57.960,00, que é inferior a R$ 60.000,00.

Afirmação III: correta.

O total das três últimas prestações é R$ 3.200,00 + + R$ 1.600,00 + R$ 800,00 = R$ 5.600,00.

$\dfrac{5\,600}{57\,960} \cong 0{,}097 = 9{,}7\%$

Assim, o total das três últimas parcelas corresponde a 9,7% do valor do carro, inferior a 15%.

Afirmação IV: correta.

As três primeiras prestações totalizam R$ 25.600,00 + + R$ 12.800,00 + R$ 6.400,00 = R$ 44.800,00.

$\frac{44\,800}{57\,960} \cong 0{,}77 = 77\%$

Temos que $\frac{3}{4} = 75\%$. Então, as três primeiras prestações juntas correspondem a mais que $\frac{3}{4}$ do valor do carro.

Logo, são corretas as afirmações **I**, **III** e **IV**.

Alternativa **c**.

9. a) O valor do carro diminui em 10% a cada ano, ou seja, passa a ser 100% − 10% = 90% = 0,90 do valor do ano anterior. Então, podemos escrever $V = V_0 \cdot 0{,}90^t$.

b) $V = V_0 \cdot 0{,}90^t$

$V = 32\,000 \cdot 0{,}90^6$

$V \cong 17\,006{,}11$

Podemos dizer que o valor deste carro é, após 6 anos, aproximadamente 17 mil reais.

10. a) $f(x) = \frac{4}{2^x}$

Vamos considerar que A, B, C e D sejam os pontos da curva correspondentes às abscissas 0, 1, 2 e 3, respectivamente. Então:

Ponto A ($x = 0$)

$f(0) = \frac{4}{2^0}$

$f(0) = \frac{4}{1}$

$f(0) = 4$

Ponto C ($x = 2$)

$f(2) = \frac{4}{2^2}$

$f(2) = \frac{4}{4}$

$f(2) = 1$

Ponto B ($x = 1$)

$f(1) = \frac{4}{2^1}$

$f(1) = \frac{4}{2}$

$f(1) = 2$

Ponto D ($x = 3$)

$f(3) = \frac{4}{2^3}$

$f(3) = \frac{4}{8}$

$f(3) = \frac{1}{2}$

Logo, as ordenadas dos pontos A, B, C e D são, respectivamente, 4, 2, 1 e $\frac{1}{2}$.

b) A razão é $\frac{1}{2}$.

11. a) Para calcular a taxa de juros i, no sistema de juros compostos, podemos usar a fórmula $M_n = C \cdot (1 + i)^n$. Escolhendo o montante no 1º ano e o valor inicial do empréstimo, temos:

$1\,060 = 1\,000 \cdot (1 + i)^1$

$\frac{1060}{1000} = 1 + i$

$1{,}060 - 1 = i$

$i = 0{,}060 = 6\%$

Logo, a taxa é de 6% ao ano.

b) $q = 1 + i$

$q = 1 + 0{,}060 = 1{,}060$

Os montantes estão em progressão geométrica, com razão igual a 1,06.

c) $M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$M(t) = 1\,000 \cdot (1 + 0{,}06)^t$

$M(t) = 1\,000 \cdot (1{,}06)^t$

Página 110

Para pensar e discutir

1. Porque o denominador da fórmula obtida não pode ser igual a zero.

2. Se $q = 1$, a PG é constante. A soma dos n termos pode ser obtida multiplicando-se o primeiro termo (valor comum) pela quantidade de termos da sequência.

3. $S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$, $q \neq 1$

$S_n = \frac{\left(a_1 \cdot q^{n-1}\right) \cdot q - a_1}{q - 1}$

$S_n = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q - 1}$

$S_n = \frac{a_1 \cdot \left(q^n - 1\right)}{q - 1}$

Obtém-se $S_n = \frac{a_1 \cdot \left(q^n - 1\right)}{q - 1}$, para $q \neq 1$.

Página 111

Para pensar e discutir

1. O 2º quadrado tem a metade da área do 1º quadrado.

2. Como cada quadrado tem a área igual à metade da área do quadrado anterior, temos uma PG de razão $\frac{1}{2}$.

3. Resposta pessoal. Essa pergunta objetiva sondar o conhecimento intuitivo do estudante a respeito da situação envolvendo PG com infinitos termos em que o último termo se aproxima de zero.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Página 113

Para explorar

1. a) Espera-se que o estudante perceba a relação entre a diagonal do quadrado e seu lado.

Considerando a medida do lado do primeiro quadrado como 1 u.c., temos que a medida da diagonal do 2º quadrado é igual a 1 u.c. (é igual ao lado do 1º quadrado). Então, calculamos a medida do lado do 2º quadrado:

$D = 1$

$D = L \cdot \sqrt{2}$

$1 = L \cdot \sqrt{2}$

$L = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$L = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Assim, as medidas dos lados dos quadrados formam a PG $\left(1; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{4}; \ldots\right)$, com $a_1 = 1$ e $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Calculamos a soma dos infinitos termos:

$S = \frac{a_1}{1 - q}$, $q \neq 1$

$S = \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$S = \frac{1}{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$

$S = \frac{2}{2 - \sqrt{2}}$

$S = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2}$

$S = 2 + \sqrt{2}$

Logo, o limite da soma das medidas dos lados dos quadrados construídos é $2 + \sqrt{2}$ u.c.

b) Espera-se que o estudante perceba que o perímetro é a soma das medidas de todos os lados, ou seja, basta multiplicarmos a medida de cada lado por 4 ou multiplicar a soma das medidas de todos os quadrados por 4.

$S = 4 \cdot (2 + \sqrt{2})$

$S = 8 + 4\sqrt{2}$

Logo, o limite da soma da medida de todos os lados do quadrado é de $S = 8 + 4\sqrt{2}$ u.c.

2. a) Espera-se que o estudante compreenda que o lado do triângulo é dividido pela metade.

Considerando a medida do lado do primeiro triângulo como 1 u.c., temos que a medida do lado do 2º triângulo é $\frac{1}{2}$.

Assim, as medidas dos lados dos triângulos formam a PG $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \ldots\right)$, com $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$.

Calculamos a soma dos infinitos termos:

$S = \frac{a_1}{1 - q}$, $q \neq 1$

$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$

$S = \frac{1}{\frac{1}{2}}$

$S = 2$

Logo, o limite da soma das medidas dos lados dos triângulos construídos é 2 u.c.

b) Podemos multiplicar a medida de cada lado por 3 para obter o perímetro ou multiplicar a soma das medidas de todos os triângulos por 3.

$S = 3 \cdot 2$

$S = 6$

Logo, o limite da soma dos perímetros dos triângulos construídos é 6 u.c.

3. Resposta pessoal.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Páginas 113-114

Atividades

Duas são as relações matemáticas que permitem o cálculo relacionado à soma dos termos de uma progressão geométrica. Numa primeira relação, o trabalho com uma quantidade finita de termos. Já numa segunda relação, o cálculo envolvendo o "limite da soma" dos infinitos termos de uma progressão geométrica, quando a razão é um número entre -1 e 1 (e o número de termos tende ao infinito). É necessário que essas duas relações sejam compreendidas pelos estudantes.

Sugerimos que as atividades de 1 a 6 sejam feitas individualmente em sala com correção coletiva, para, assim, verificar de fato a esperada compreensão dos estudantes sobre a soma dos termos e o limite da soma dos termos de uma progressão geométrica.

1. a) Podemos escrever a dízima periódica como uma soma infinita de números decimais.

$x = 0{,}5555\ldots$ (dízima periódica)

$x = 0{,}5 + 0{,}05 + 0{,}005 + 0{,}0005 + \ldots$

A razão entre esses números decimais é $q = \frac{0,05}{0,5} = 0,1$. Então:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}, \ q \neq 1$$

$$S = \frac{0,5}{1 - 0,1}$$

$$S = \frac{0,5}{0,9}$$

$$S = \frac{5}{9}$$

b) Analogamente:

$x = 0,212121...$ (dízima periódica)

$x = 0,21 + 0,0021 + 0,000021 + 0,00000021 + ...$

A razão entre esses números decimais é $q = \frac{0,0021}{0,21} = 0,01$. Então:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}, \ q \neq 1$$

$$S = \frac{0,21}{1 - 0,01}$$

$$S = \frac{0,21}{0,99}$$

$$S = \frac{21}{99}$$

2. Temos $a_1 = 10$, $q = 2$ e $n = 10$. Então:

$a_n = a_1 \cdot a^{n-1}$

$a_{10} = 10 \cdot 2^{10-1}$

$a_{10} = 10 \cdot 2^9$

$a_{10} = 10 \cdot 512$

$a_{10} = 5\,120$

Assim:

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}, \ q \neq 1$$

$$S_{10} = \frac{5\,120 \cdot 2 - 10}{2 - 1}$$

$$S_{10} = \frac{10\,240 - 10}{1}$$

$S_{10} = 10\,230$

Logo, a soma dos 10 primeiros termos da sequência é 10 230.

3. a) O primeiro membro da equação $x + \frac{x}{4} + \frac{x}{16} + ... = 64$ corresponde à soma dos infinitos termos de uma PG de primeiro termo $a_1 = x$ e razão $q = \frac{\frac{x}{4}}{x} = \frac{1}{4}$. Então:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}, \ q \neq 1$$

$$64 = \frac{x}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$64 = \frac{x}{\frac{3}{4}}$$

$$64 \cdot \frac{3}{4} = x$$

$$\frac{192}{4} = x$$

$x = 48$

b) Temos que $y = 0,001 + 0,000001 + 0,000000001 + ...$ corresponde à soma dos infinitos termos de uma PG de primeiro termo $a_1 = 0,001$ e razão $q = \frac{0,000001}{0,001} = 0,001$. Então:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}, \ q \neq 1$$

$$S = \frac{0,001}{1 - 0,001}$$

$$S = \frac{0,001}{0,999}$$

$$S = \frac{1}{999}$$

Logo, $y = 0,001 + 0,000001 + 0,000000001 + ... = \frac{1}{999}$.

4. a) Temos a PG finita $(1, 2, 4, ..., a_n)$ tal que $S_n = 1023$.

A razão dessa PG é $q = \frac{2}{1} = 2$. Então:

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}, \ q \neq 1$$

$$1023 = \frac{a_n \cdot 2 - 1}{2 - 1}$$

$$1023 = \frac{a_n \cdot 2 - 1}{1}$$

$1023 + 1 = a_n \cdot 2$

$1024 = 2a_n$

$$\frac{1024}{2} = a_n$$

$a_n = 512$

Logo, o último termo dessa PG é 512.

b) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$512 = 1 \cdot 2^{n-1}$

$512 = 2^{n-1}$

$2^9 = 2^{n-1}$

$9 = n - 1$

$9 + 1 = n$

$n = 10$

Logo, essa PG tem 10 termos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

5. a) Temos a equação $1 + x^2 + x^4 + ... + x^{2n} + ... = \frac{25}{16}$. Então:

$q = \frac{x^2}{1} = x^2$

Logo, a razão é x^2.

b) $a_{25} = 1 \cdot (x^2)^{25 - 1}$

$a_{25} = 1 \cdot (x^2)^{24}$

$a_{25} = 1 \cdot x^{48}$

$a_{25} = x^{48}$

Logo, o 25º termo é x^{48}.

c) $S = \frac{a_1}{1 - q}$, $q \neq 1$

$\frac{25}{16} = \frac{1}{1 - x^2}$

$25 - 25x^2 = 16$

$25x^2 = 25 - 16$

$25x^2 = 9$

$x^2 = \frac{9}{25}$

$x = \pm \sqrt{\frac{9}{25}}$

$x' = \frac{3}{5}$ e $x'' = -\frac{3}{5}$

Logo, são duas soluções: $\frac{3}{5}$ e $-\frac{3}{5}$.

6. a) Temos $a_1 = 2$, $q = 3$ e $n = 10$. Então:

$a_n = a_1 \cdot q^{n - 1}$

$a_{10} = 2 \cdot 3^{10 - 1}$

$a_{10} = 2 \cdot 3^9$

$a_{10} = 2 \cdot 19\,683$

$a_{10} = 39\,366$

Logo, apodreceram 39 366 frutos no 10º dia.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

b) O total de frutos corresponde à soma dos frutos que apodreceram a cada dia. Assim:

$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$, $q \neq 1$

$S_{10} = \frac{39\,366 \cdot 3 - 2}{3 - 1}$

$S_{10} = \frac{118\,098 - 2}{2}$

$S_{10} = \frac{118\,096}{2}$

$S_{10} = 59\,048$

Logo, havia 59 048 frutos.

7. Os lados dos triângulos formam uma PG com $a_1 = 1$ e $q = \frac{2}{3}$. Calculamos a soma das medidas dos lados.

$S = \frac{a_1}{1 - q}$, $q \neq 1$

$S = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}}$

$S = \frac{1}{\frac{1}{3}}$

$S = 3$

A soma das medidas dos lados dos infinitos triângulos é igual a 3 e, portanto, a soma dos perímetros é igual a 9.

Alternativa **a**.

8. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

Incentive os estudantes a elaborar a situação envolvendo os quadrados, observando que esses quadrados irão diminuindo de tamanho, conforme sugerem as figuras apresentadas no enunciado. Pode ser envolvendo medidas dos lados, das diagonais, dos perímetros ou mesmo das áreas.

9. As distâncias percorridas em cada etapa formam a PG $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; ... \frac{1}{2^n}\right)$, com $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ e $a_n = \frac{1}{2^n}$. Queremos calcular a distância total, ou seja, S_n.

$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$, $q \neq 1$

$S_n = \frac{\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1}$

$S_n = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2^n} - 1\right)}{-\frac{1}{2}}$

$S_n = 1 - \frac{1}{2^n} \Rightarrow S_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$

Alternativa **a**.

10. Podemos escrever a PG formada pelas distâncias percorridas em cada dia: $\left(x; \frac{x}{2}; \frac{x}{4}; ...; 48; \frac{48}{2}; \frac{48}{4}\right)$, em que $a_1 = x$, $q = \frac{1}{2}$ e $n = 8$. Calculamos o valor de x usando, por exemplo, $a_6 = 48$.

$a_n = a_1 \cdot q^{n - 1}$

$48 = x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6 - 1}$

$48 = x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$48 = x \cdot \frac{1}{32}$

$x = 48 \cdot 32$

$x = 1536$

Então, calculamos S_8, que é a distância total da viagem de 8 dias:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ou $a_8 = \frac{48}{4} = 12$

$a_8 = 1536 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8-1}$

$a_8 = 1536 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7}$

$a_8 = 1536 \cdot \frac{1}{128}$

$a_8 = 12$

$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}, q \neq 1$

$S_8 = \frac{12 \cdot \frac{1}{2} - 1536}{\frac{1}{2} - 1}$

$S_8 = \frac{6 - 1536}{-\frac{1}{2}}$

$S_8 = \frac{-1530}{-\frac{1}{2}}$

$S_8 = (-1530) \cdot (-2)$

$S_8 = 3060$

Logo, a distância total percorrida foi de 3060 km.

Alternativa **e**.

11. A PG (1, 2, 4, ..., a_n) representa a lista ordenada dos pesos perdidos pelos pacientes, em que $a_1 = 1$ e $q = 2$. Sabemos também que $S_n = 1023$ e queremos saber a quantidade n de pacientes.

$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}, q \neq 1$

$1023 = \frac{a_n \cdot 2 - 1}{2 - 1}$

$1023 = \frac{2a_n - 1}{1}$

$1023 + 1 = 2a_n$

$1024 = 2a_n$

$a_n = \frac{1024}{2}$

$a_n = 512$

Assim, o último termo da PG é 512 e, com essa informação, descobrimos quantos termos tem a PG, ou seja, n.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$512 = 1 \cdot 2^{n-1}$

$512 = 2^{n-1}$

$2^9 = 2^{n-1}$

$9 = n - 1$

$n = 9 + 1$

$n = 10$

Portanto, 10 pacientes participaram do desafio.

Alternativa **c**.

12. Observando a expressão $x = 3 + \frac{7}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \ldots$ dada, podemos considerar $\frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \ldots$ como a soma dos termos da PG infinita $\left(\frac{4}{10^2}; \frac{4}{10^3}; \frac{4}{10^4}; \ldots\right)$, com $a_1 = \frac{4}{10^2}$ e $q = \frac{1}{10}$.

Calculamos inicialmente essa soma:

$S = \frac{a_1}{1 - q}, q \neq 1$

$S = \frac{\frac{4}{10^2}}{1 - \frac{1}{10}}$

$S = \frac{\frac{4}{10^2}}{\frac{9}{10}}$

$S = \frac{4}{10^2} \cdot \frac{10}{9}$

$S = \frac{4}{90}$

Então:

$x = 3 + \frac{7}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \ldots$

$x = 3 + \frac{7}{10} + \frac{4}{90}$

$x = \frac{270 + 63 + 4}{90}$

$x = \frac{337}{90}$

Alternativa **c**.

13. Pelas características de formação da figura, a medida do raio de cada disco é metade da medida do raio do disco anterior. Então, a partir do disco A, as medidas dos raios formam a PG $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \ldots\right)$.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

A sequência das áreas desses discos também formam uma PG: $\left(\pi; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{16}; \frac{\pi}{64}; \frac{\pi}{256}; \ldots\right)$, com $a_1 = \pi$ e $q = \frac{1}{4}$. Calculamos, então, o limite da soma das áreas dos discos:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}, q \neq 1$$

$$S = \frac{\pi}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$S = \frac{\pi}{\frac{3}{4}}$$

$$S = \frac{4\pi}{3}$$

Alternativa **e**.

Recorde com os estudantes a fórmula para o cálculo da área do círculo: $A = \pi r^2$.

Páginas 115-117

Atividades finais

A atividade 1 foi elaborada com a intenção de relembrar de forma rápida algumas ideias desenvolvidas ao longo da unidade sobre progressão geométrica. Ao responder cada uma das questões propostas nessa atividade, o estudante estará refletindo sobre a parte teórica estudada. Outras perguntas podem ser adicionadas pelo professor ou mesmo pelos próprios estudantes nesse mesmo sentido, representando uma forma de estabelecer um "resumo" dos tópicos principais.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

Já as demais questões, em sua maioria, foram extraídas de instituições de ensino superior com diferenciadas de avaliação. Essas questões não são apresentadas necessariamente em ordem crescente de grau de dificuldade. A ideia é que os estudantes não apenas façam uma autoavaliação mas também aprofundem o assunto.

1. a) A soma $0{,}32 + 0{,}0032 + 0{,}000032 + 0{,}00000032\ldots$ corresponde à soma dos infinitos termos da PG com $a_1 = 0{,}32$ e $q = \frac{0{,}0032}{0{,}32} = 0{,}01$. Então:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}, q \neq 1$$

$$S = \frac{0{,}32}{1 - 0{,}01}$$

$$S = \frac{0{,}32}{0{,}99}$$

$$S = \frac{32}{99}$$

b) $M_n = C \cdot (1 + i)^n$

c) Espera-se que o estudante entenda que a sequência descrita é uma progressão geométrica.

d) A razão deverá ser igual a 1 ou o primeiro termo é nulo.

e) A razão dessa PG é $q = \frac{9}{3} = 3$, então o termo geral é:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
$a_n = 3 \cdot 3^{n-1}$
$a_n = 3^1 \cdot 3^{n-1}$
$a_n = 3^n$

f) A razão dessa PG é $q = \frac{6}{3} = 2$. Então, o termo geral é:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

g) Calculamos os montantes usando a relação $M_n = C \cdot (1 + i)^n$.

1º mês:	**2º mês:**	**3º mês:**
$M_1 = C \cdot (1 + 0{,}01)^1$ $M_1 = C \cdot (1{,}01)^1$ $M_1 = C \cdot 1{,}01$	$M_2 = C \cdot (1 + 0{,}01)^2$ $M_2 = C \cdot (1{,}01)^2$	$M_3 = C \cdot (1 + 0{,}01)^3$ $M_3 = C \cdot (1{,}01)^3$

Logo, a sequência desses montantes é $(C \cdot 1{,}01; C \cdot (1{,}01)^2; C \cdot (1{,}01)^3)$.

h) A relação é $S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}, q \neq 1$.

i) A relação é $S = \frac{a_1}{1 - q}, -1 < q < 1$.

j) A razão deve ser negativa e o primeiro termo não pode ser nulo.

2. O tempo de espera a cada erro forma a PG (60, 120, 240, ...), com $a_1 = 60$ e $q = 2$. Cada tentativa errada corresponde ao tempo de digitação mais o tempo da espera. Ao acertar na quarta tentativa, temos então 3 tentativas erradas, seguidas das 3 esperas e, por fim, a tentativa 1 certa.

Calculamos o tempo correspondente à esperas:

$$S_3 = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}, q \neq 1$$

$$S_3 = \frac{240 \cdot 2 - 60}{2 - 1}$$

$$S_3 = \frac{480 - 60}{1}$$

$$S_3 = 420$$

Então, calculamos o tempo total:

$3 \cdot 30 + 420 + 30 = 90 + 420 + 30 = 540$

Logo, o tempo total gasto foi de 540 segundos.

Alternativa **c**.

3. Sabemos que $a_2 = 32$ e $a_7 = 243$. Então:

$a_7 = a_2 \cdot q^{7-2}$

$243 = 32q^5$

$q^5 = \frac{243}{32}$

$q = \sqrt[5]{\frac{243}{32}}$

$q = \frac{3}{2}$

Calculamos então o termo a_4:

$a_4 = a_2 \cdot q^{2-2}$

$a_4 = 32 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$a_4 = 32 \cdot \frac{9}{4}$

$a_4 = 72$

Alternativa **b**.

4. Usando a relação $M_n = C \cdot (1 + i)^n$, calculamos o tempo n tal que o montante seja o dobro do capital investido, ou seja, $M_n = 2C$.

$M_n = C \cdot (1 + i)^n$

$2C = C \cdot (1 + 0{,}05)^n$

$2 = (1{,}05)^n$

$\log 2 = n \cdot \log 1{,}05$

$0{,}30 \cong n \cdot 0{,}02$

$n \cong \frac{0{,}30}{0{,}02}$

$n \cong 15$

Logo, o tempo de carência deve ser de 15 meses, o que corresponde ao plano *B*.

Alternativa **c**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

5. As áreas dos triângulos formam a PG (31185; 15592,5; 7796,25; ...), com $a_1 = 31185$ e $q = \frac{1}{2}$. Calculamos a soma dos infinitos termos:

$S = \frac{a_1}{1 - q}$, $q \neq 1$

$S = \frac{31185}{1 - \frac{1}{2}}$

$S = 31\,185 \cdot 2$

$S = 62\,370$

Logo, a soma das áreas é de 62 370 mm².

Alternativa **d**.

6. $a_1 = 5$

$a_2 = 2 + a_1 = 2 + 5 = 7$

$a_3 = 2 + a_2 = 2 + 7 = 9$

$a_4 = 2 + a_3 = 2 + 9 = 11$

Cálculo da soma dos 4 termos:

$5 + 7 + 9 + 11 = 32$

Alternativa **d**.

7. Pelo enunciado, temos:

$\frac{a_1 + a_2}{2} = 6$, então, $a_1 + a_2 = 12$ (I)

$\frac{a_2 + a_3}{2} = 18$, então, $a_2 + a_3 = 36$ (II)

Podemos escrever um sistema com (I) e (II):

$\begin{cases} a_1 + a_2 = 12 \ (I) \\ a_2 + a_3 = 36 \ (II) \end{cases}$

Sabemos que $a_2 = a_1 \cdot q^1$ e $a_3 = a_1 \cdot q^2$, sendo q a razão da PG citada. Então:

$\begin{cases} a_1 + (a_1 \cdot q) = 12 \ (I) \\ (a_1 \cdot q) + (a_1 \cdot q^2) = 36 \ (II) \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 \cdot (1 + q) = 12 \ (I) \\ a_1 \cdot (q + q^2) = 36 \ (II) \end{cases}$

Isolamos a_1 na equação (I):

$a_1 \cdot (1 + q) = 12$

$a_1 = \frac{12}{1 + q}$

Substituímos em (II):

$\frac{12}{1 + q} \cdot (q + q^2) = 36$

$\frac{12}{1 + q} \cdot q \cdot (1 + q) = 36$

$12 \cdot q = 36$

$q = \frac{36}{12}$

$q = 3$

Substituímos q em (I):

$a_1 \cdot (1 + q) = 12$

$a_1 \cdot (1 + 3) = 12$

$4a_1 = 12$

$a_1 = \frac{12}{4}$

$a_1 = 3$

Por fim, calculamos a soma de a_1, a_2 e a_3.

$S = 3 + 9 + 27$

$S = 39$

Alternativa **c**.

8. Sendo L a medida de cada lado do primeiro triângulo, o perímetro é $3L$. Cada novo triângulo tem lado com metade da medida do lado do triângulo anterior e, consequentemente, com metade do perímetro do triângulo anterior. Então, os perímetros formam a PG $\left(3L; \frac{3L}{2}; \frac{3L}{4}; \ldots\right)$, com $a_1 = 3L$ e

$q = \frac{1}{2}$. Calculamos a soma dos infinitos termos:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}, \ q \neq 1$$

$$S = \frac{3L}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S = \frac{3L}{\frac{1}{2}}$$

$S = 3L \cdot 2$

$S = 6L$

Alternativa **c**.

9. Temos do enunciado que $a_9 = 1792$ e $a_4 = 56$. Calculamos a razão:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_9 = a_4 \cdot q^{9-4}$

$1792 = 56 \cdot q^5$

$$q^5 = \frac{1792}{56}$$

$q^5 = 32$

$q = \sqrt[5]{32}$

$q = 2$

Então, encontramos o primeiro termo da PG:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$56 = a_1 \cdot 2^{4-1}$

$56 = a_1 \cdot 2^3$

$56 = a_1 \cdot 8$

$\frac{56}{8} = a_1$

$a_1 = 7$

Na outra PG, a razão corresponde a $q + 1$; então, $q = 3$. O primeiro termo é $b_1 = 7$.

Calculamos o termo o b_4:

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$b_4 = 7 \cdot 3^{4-1}$

$b_4 = 7 \cdot 3^3$

$b_4 = 7 \cdot 27$

$b_4 = 189$

Logo, o quarto termo é 189.

Alternativa **a**.

10. Se a população duplica a cada 20 minutos, iniciando em 100 bactérias, então a quantidade de microrganismos a cada intervalo forma a PG (100, 200, 400, ...), com $a_1 = 100$, $q = 2$. Queremos achar $a_n = 5000$. Assim:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$5000 = 100 \cdot 2^{n-1}$

$$\frac{5000}{100} = \frac{2^n}{2^1}$$

$50 \cdot 2 = 2^n$

$100 = 2^n$

Como $2^6 = 64$ e $2^7 = 128$, temos que $6 < n < 7$.

Após 20 min temos $a_2 = 200$, após $2 \cdot 20$ min = = 40 min temos $a_3 = 400$, e assim por diante. Então, depois de $5 \cdot$ 20 min = 100 min = 1 h 40 min e antes de $6 \cdot$ 20 min = 120 min = 2 h haverá 5 000 bactérias.

Alternativa **b**.

11. Pelo enunciado, temos que o crescimento na primeira semana foi de 16 mm, na segunda semana foi de $\frac{16}{2}$ mm = 8 mm, na terceira semana, $\frac{8}{2}$ mm = 4 mm, e assim por diante, formando a PG (16, 8, 4, ...). Queremos saber a soma após 9 semanas, ou seja, S_9.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$a_9 = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{9-4}$$

$$a_9 = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$a_9 = 16 \cdot \frac{1}{32}$$

$$a_9 = \frac{1}{2}$$

Então:

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}, \ q \neq 1$$

$$S_9 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 16}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$S_9 = \frac{\frac{1}{4} - 16}{-\frac{1}{2}}$$

$$S_9 = \frac{\frac{1 - 64}{4}}{-\frac{1}{2}}$$

$$S_9 = \frac{\frac{-63}{4}}{-\frac{1}{2}}$$

$$S_9 = -\frac{63}{4} \cdot (-2)$$

$$S_9 = \frac{63}{2} = 31{,}5$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Logo, entre as opções das alternativas, a melhor aproximação é de crescimento total de 32 mm.

Alternativa **c**.

12. Temos a PG (2 000, 1 600, 1 280,...) tal que $a_1 = 2\,000$ e $q = \frac{1600}{2000} = \frac{4}{5}$. O ano de 2006 corresponde ao 10º ano, ou seja, a_{10}. Então:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_{10} = 2000 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{10-1} = 2000 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^9$

$a_{10} = 2000 \cdot \frac{262144}{1953125}$

$a_{10} \cong 268{,}44$

Logo, o rebanho terá aproximadamente 268 cabeças, o que está entre 100 e 400.

Comente que na resolução apresentada não foi necessário utilizar o valor do logaritmo de 2 presente no enunciado. Entretanto, ele poderia ser utilizado da seguinte maneira (omitimos algumas passagens de cálculo envolvendo logaritmo):

$a_{10} = 2000 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^9$

$\log(a_{10}) = \log\left[2000 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^9\right]$

(...)

$\log(a_{10}) = 2{,}428$

$a_{10} = 10^{2{,}428} \cong 268$

Nesta parte final, seria possível utilizar uma calculadora científica para obter o valor correspondente.

Alternativa **a**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

13. Pelo enunciado, temos $a_1 = 6$, $q = \frac{36}{6} = 6$, $a_n = 6^n$ e $S_n = 55\,986$. Então:

$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$, $q \neq 1$

$55\,986 = \frac{6^n \cdot 6 - 6}{6 - 1} = \frac{6^n \cdot 6 - 6}{5}$

$55\,986 \cdot 5 = 6^n \cdot 6 - 6$

$279\,930 = 6^n \cdot 6 - 6$

$279\,930 + 6 = 6^n \cdot 6$

$279\,936 = 6^n \cdot 6$

$\frac{279\,930}{6} = 6^n$

$46\,656 = 6^n$

Decompondo 46 656 em fatores primos, obtemos:

$2^6 \cdot 3^6 = 6^n$

$\log(2^6 \cdot 3^6) = \log 6^n$

$\log 2^6 + \log 3^6 = n \cdot \log 6$

$6 \cdot \log 2 + 6 \cdot \log 3 = n \cdot \log(2 \cdot 3)$

$6 \cdot (\log 2 + \log 3) = n \cdot (\log 2 + \log 3)$

$n = 6$

Portanto:

$\log n = \log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0{,}3 + 0{,}48 = 0{,}78$

Alternativa **a**.

14. Pelo padrão de construção, temos que a área da etapa 1 é 1, da etapa 2 é $\frac{5}{9}$, da etapa 3 é $\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9}$ e assim por diante, formando a PG $\left(1, \frac{5}{9}, \frac{25}{81}, \ldots\right)$, com $a_1 = 1$ e $q = \frac{5}{9}$. Calculamos a_5:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_5 = 1 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{5-1}$

$a_5 = 1 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^4$

$a_5 = \frac{625}{6561}$

Alternativa **e**.

15. Pelo teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$, temos:

$(AC)^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400$

$AC = \sqrt{400}$ (pois deve ser positivo)

$AC = 20$

Como $BC = CD$, pela semelhança $\triangle ABC \sim \triangle CDE$, obtemos:

$\frac{16}{12} = \frac{12}{DE}$

$DE = 9$

Utilizando o teorema de Pitágoras no $\triangle CDE$, temos:

$(CE)^2 = 12^2 + 9^2$

$(CE)^2 = 144 + 81$

$CE^2 = 225$

$CE = \sqrt{225}$ (pois deve ser positivo)

$CE = 15$

Como $DE = EF$, pela semelhança $\Delta CDE \sim \Delta EFG$, obtemos:

$\frac{12}{9} = \frac{9}{FG} \Rightarrow FG = \frac{27}{4}$

Utilizando o teorema de Pitágoras no ΔEFG, temos:

$(EG)^2 = 9^2 + \left(\frac{27}{4}\right)^2$

$(EG)^2 = 81 + \frac{729}{16}$

$EG^2 = \frac{2025}{16}$

$EG = \sqrt{\frac{2\,025}{16}}$ (pois deve ser positivo)

$EG = \frac{45}{4}$

Podemos perceber que as medidas das hipotenusas formam uma PG:

$\frac{15}{20} = \frac{\frac{45}{4}}{15} = \frac{3}{4} = q$

Então, as medidas das hipotenusas formar a PG infinita $\left(20; 15; \frac{45}{4}; ...\right)$, com $a_1 = 20$ e $q = \frac{3}{4}$. Então, a distância horizontal *AP* corresponde a soma dos infinitos termos da PG:

$S = \frac{a_1}{1 - q}, q \neq 1$

$S = \frac{20}{1 - \frac{3}{4}} \Rightarrow S = \frac{20}{\frac{1}{4}}$

$S = 20 \cdot 4 = 80$

Logo, a distância horizontal *AP* é 80 m.

Alternativa **c**.

16. Pelo enunciado, temos uma PG com $a_1 = 10$, $a_4 = 80$, logo:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_4 = 10 \cdot q^{4-1}$

$80 = 10 \cdot q^3$

$q^3 = 8$

$q = 2$

Portanto, a razão dessa progressão é 2.

Alternativa **a**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

17. Temos que em 2013 a obra custava 84 dólares e, em 2013, custava 84 milhões de dólares ($84 \cdot 10^6$ dólares). Queremos saber quanto custará em 2033, ou seja, 20 anos depois de 2013. Calculamos a razão da PG de valorização da obra:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$84 \cdot 10^6 = 84 \cdot q^{61-1}$

$\frac{84 \cdot 10^6}{84} = q^{60}$

$10^6 = q^{60}$

$q = \sqrt[60]{10^6} = \sqrt[10]{10^1} = 10^{\frac{1}{10}}$

$q = 10^{0,1}$

Agora, calculamos quanto custará em 2033, ou seja, a_{81}:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_{81} = 84 \cdot (10^{0,1})^{81-1} = 84 \cdot (10^{0,1})^{80}$

$a_{81} = 84 \cdot 10^8$

$a_{81} = 8,4 \cdot 10^9$

Logo, em 2033 a obra custará $8,4 \cdot 10^9$ dólares.

Alternativa **b**.

18. Na primeira etapa o quadrado tem lado $\frac{1}{2}$ m e área $\frac{1}{4}$ m². Na segunda etapa, cada lado mede $\frac{1}{4}$ m, e a área $\frac{1}{16}$ m². Seguindo dessa maneira, temos que as áreas formam a PG $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{16}; ...\right)$, de razão $q = \frac{1}{4}$.

Então, na sétima etapa, a área é:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_7 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{7-1}$

$a_7 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6$

$a_7 = \left(\frac{1}{4}\right)^7$

Além disso, na primeira etapa são formados 3 quadrados; na segunda etapa, cada um gerará novos 3 quadrados; e assim por diante, formando a PG (3, 9, 27, ...), de razão $q = 3$. Então, calculamos os novos quadrados na sétima etapa:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_7 = 3 \cdot 3^{7-1}$

$a_7 = 3 \cdot 3^6$

$a_7 = 3^7$

Portanto, a soma das áreas dos quadrados dessa etapa é:

$A = 3^7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7$

$A = \left(\frac{3}{4}\right)^7$

Alternativa **d**.

19. Em cada trecho, o comprimento da semicircunferência é πR. Os comprimentos de todas as semicircunferências formam a PG $\left(\pi R; \frac{\pi R}{2}; \frac{\pi R}{4}; ...\right)$, com $q = \frac{1}{2}$. Então, calculamos a soma desses comprimentos:

$S = \frac{a_1}{1 - q}, q \neq 1$

$S = \frac{\pi R}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S = \frac{\pi R}{\frac{1}{2}}$

$S = \pi R \cdot 2$

$S = 2\pi R$

Alternativa **e**.

Conexões e projetos

Objetivos

- Utilizar funções exponenciais e logarítmicas para modelar a variação de grandezas e inferir resultados, impactos e consequências dessa variação.
- Analisar situações de crescimento exponencial para tomar decisões e embasar argumentos em contextos como: planejamento de gastos, endividamentos e investimentos; avaliação do impacto das comunicações em rede.

SDI Productions/Getty Images

Jovens trabalhando em grupo.

Justificativa

Os projetos possibilitam que os estudantes coloquem em ação, de forma articulada, as habilidades trabalhadas nas unidades deste volume.

Competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Competências gerais trabalhadas nos projetos

Competência geral 1

A proposta do **Projeto 2** parte da leitura de um texto que cita a utilização de modelos matemáticos no estudo da epidemiologia para identificar, de acordo com vários parâmetros, as fases de contágio de uma doença em determinada população. Segundo o texto, esses mesmos modelos podem ser úteis para abordar o problema das notícias falsas.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Competência geral 2

Para desenvolver o **Projeto 1**, os estudantes criam um personagem de acordo com alguns critérios estabelecidos e estudam seu perfil investidor utilizando uma planilha eletrônica. O estudo será feito sob vários aspectos, o que levará os estudantes a explorar ideias, fazer conexões, desenvolver hipóteses e testá-las para buscar evidências que as comprovem, desenvolvendo assim a curiosidade intelectual.

De acordo com a proposta apresentada no **Projeto 2**, os estudantes criam um experimento para verificar a propagação de notícias falsas e, com base em algumas orientações, elaboram um modelo matemático para estudar os padrões na divulgação desse tipo de notícia. Tendo como modelo matemático a progressão geométrica, eles exercitam a curiosidade intelectual e recorrem à abordagem própria das ciências fazendo investigações para elaborar e testar hipóteses, formulando e resolvendo problemas.

Competência geral 4
O desenvolvimento dos dois projetos exige que os estudantes se comuniquem por meio de diferentes linguagens, como a verbal – oral ou escrita – e a matemática, para se expressar e compartilhar informações, levando ao entendimento mútuo.

Competência geral 5
No **Projeto 2**, os estudantes têm a oportunidade de refletir de forma crítica sobre a utilização das tecnologias de informação com responsabilidade e ética para se comunicar, acessar e disseminar informações.

Competência geral 6
O desenvolvimento dos dois projetos possibilita que os estudantes ajam com determinação, esforço e perseverança na busca de soluções para os problemas propostos. É por meio da participação de cada um e do trabalho de todos, em equipe, que a proposta vai se desenvolver. Dessa forma, eles desenvolvem competências essenciais para o mundo do trabalho.

Competência geral 8
Como os dois projetos apresentados devem ser desenvolvidos em grupos, proporcionam ao estudante a oportunidade de conhecer-se e compreender-se na diversidade humana, reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

Competência geral 9
Ao trabalharem em grupos para desenvolver qualquer um dos dois projetos, os estudantes têm a oportunidade de resolver conflitos, exercitando a empatia, o diálogo e a cooperação. Desenvolvem o respeito por si mesmos e pelo outro, valorizando a diversidade de ideias e aprendendo a acolher a perspectiva do outro.

Competência geral 10
Os dois projetos apresentados oferecem ao estudante a oportunidade de agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação. Possibilitam a participação solidária, o exercício de liderança e a tomada de decisões com base em princípios democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Projeto 1

Objetivo

- Desenvolver um olhar crítico sobre a necessidade da gestão financeira, criando um repertório que auxilie em tomadas de decisões acerca de gastos, endividamentos e investimentos.

SORANAT7/Shutterstock.com

O controle financeiro ajuda no conhecimento dos próprios gastos e na administração da renda pessoal de forma consciente.

Competências específicas de Matemática: 1, 2, 3, 4 e 5

Habilidades

EM13MAT101
Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT203
Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

EM13MAT303
Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

EM13MAT304
Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

EM13MAT404
Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT5
MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL
Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

EM13MAT510
Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Orientações ao professor

Para a realização desse projeto é essencial levantar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre Educação Financeira. Assim, ao propor o primeiro contato deles com o projeto, convém fazer uma roda de conversa sobre o histórico deles e de pessoas que conhecem que tenham feito aplicações ou empréstimos financeiros.

Algumas questões podem orientar essa conversa:

- Vocês sabem como funciona um empréstimo bancário ou aplicação financeira?

- Vocês conhecem alguém que tenha um empréstimo bancário ou aplicação financeira?
- O que leva alguém a fazer um empréstimo bancário ou aplicação financeira?

Explique-lhes que esses conhecimentos são importantes para o projeto a ser elaborado. Por isso, ele deve começar com uma breve pesquisa e um levantamento de informações que os auxiliem a responder a essas perguntas. Por fim, proponha a questão disparadora do projeto, explicando que ao final eles deverão saber respondê-la:

- Como a organização financeira pode auxiliar na escolha de bons investimentos?

Após essa conversa inicial, organize a turma em grupos e combine um cronograma para a realização do trabalho. Isso pode ser feito em conjunto com a turma, por meio de uma leitura coletiva da descrição do projeto: contexto, desenvolvimento, produto, apresentação e relatório conclusivo. O cronograma deve conter, além do encontro inicial, as etapas a seguir.

1. **Seleção e elaboração dos personagens**

   Oriente os grupos na escolha do caso (1 ou 2) e na elaboração do personagem. Nessa etapa eles podem ter dúvidas sobre quais elementos devem compor essa criação, e é importante ressaltar que, embora o essencial seja o perfil de gastos, é mais interessante que prevejam outras características, como classe social, região onde mora, gênero, etnia etc.

   Uma vez definido o personagem com detalhes, será mais fácil criar o perfil de gastos. Uma boa opção é convidá-los a pensar em pessoas conhecidas e incentivá-los a pesquisar o perfil de consumo de algumas delas durante essa elaboração. Oriente-os para que não façam o projeto sobre uma pessoa específica, evitando exposições desnecessárias. Em vez disso, eles devem criar o personagem com base nos dados de diversas pessoas.

   Esse é um momento importante para lidar de forma saudável com questões sociais delicadas. É possível encontrar pessoas com diferentes perfis sociais e econômicos na mesma turma, e reconhecer que esses perfis existem é uma forma de lidar com preconceitos. Se possível, trabalhe em parceria com professores da área de Ciências Humanas e Sociais para encontrar as melhores formas de lidar com o reconhecimento e a abordagem das desigualdades.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

2. **Elaboração do perfil de consumo**

   Uma vez escolhido o personagem, é hora de criar um perfil de consumo. Muitos adolescentes não acompanham as rotinas de gastos da família e alguns podem ter dificuldades em listar todos os gastos mensais que compõem um orçamento doméstico. Por isso, essa etapa pode ser mais bem explorada se os grupos puderem trocar informações entre si a fim de verificar se estão abordando todos os aspectos possíveis de consumo. Complemente as informações se achar necessário, mas dê chance à turma de descobrir estratégias próprias para checar se o levantamento de dados está completo.

   De posse de todos os campos que devem fazer parte de um orçamento pessoal, incluindo entradas e saídas, eles terão oportunidade de estudar maneiras de organizar e relacionar essas informações em uma planilha eletrônica, desenvolvendo fórmulas e estilos de apresentação para facilitar a manipulação dos dados.

Veja um modelo de planilha de orçamento pessoal que pode ser usado para embasar o trabalho dos estudantes no *link*: https://templates.office.com/pt-br/planilha-de-or%C3%A7amento-pessoal-mensal-tm16410113 (acesso em: 22 jun. 2020).
Nesse modelo, navegando pelas células é possível ver as fórmulas utilizadas. Os estudantes podem ainda organizar gráficos que apresentem os gastos distribuídos por categoria. O principal nessa etapa do projeto é garantir que, além de elaborar uma boa forma de organizar o orçamento, eles criem dados compatíveis com o caso (1 ou 2) e o perfil criado na etapa anterior.

3. **Elaboração do gráfico de empréstimo/investimento**
Feito o perfil de gastos mensais ou anuais do personagem, é hora de abordar o problema proposto. Os grupos deverão trabalhar sozinhos, sem muitas trocas de informação entre eles. Além de os casos serem diferentes, é essencial que busquem dados de bancos e investidoras que embasem suas escolhas. Essa etapa será essencial para criar nos estudantes uma consciência orçamentária, entendendo com mais profundidade as vantagens e as dificuldades de manter a saúde financeira em dia. É também nessa etapa que eles mais utilizarão as ferramentas matemáticas desenvolvidas ao longo da unidade. Por isso, este pode ser um bom momento para avaliar de maneira formativa como os conhecimentos trabalhados foram absorvidos e o quanto estão sendo articulados na resolução de problemas. Os desafios dessa etapa podem ser bons motivadores das aprendizagens propostas no volume.

4. **Elaboração da apresentação e do relatório**
Essa etapa final deve ser a mais simples, caso todas as outras tenham sido cumpridas corretamente. Oriente os estudantes para que a apresentação realmente retrate o trabalho do grupo, garantindo que seus esforços tenham visibilidade. Essa etapa deve compor a maior parte da avaliação, representando o acúmulo dos conhecimentos construídos ao longo do projeto. Uma vez entregue o produto final, o processo de avaliação será mais bem aproveitado se for condizente com as orientações do ensino por projetos. Sendo assim, é conveniente fazer uma avaliação formativa, oferecendo devolutivas qualitativas antes das notas, com espaço para a autoavaliação e a avaliação por pares.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Projeto 2

Objetivo

- Desenvolver a habilidade de investigar o impacto causado pela propagação de boatos e inferir consequências geradas tanto por quem auxilia quanto por quem freia essa propagação.

panuwat phimpha/Shutterstock.com

Consultar a fonte de uma notícia antes de compartilhá-la nas redes sociais é um importante passo no combate às *fake news*.

Competências específicas de Matemática 1, 2, 3 e 5

Habilidades

EM13MAT101
Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que evolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT203
Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

EM13MAT303
Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

EM13MAT508
Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

EM13MAT510
Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Orientações ao professor

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Ao iniciar esse projeto, convém disponibilizar informações atuais sobre a propagação de *fake news*. Se achar pertinente, pode ser interessante providenciar notícias falsas e verdadeiras para verificar se os estudantes conseguem diferenciá-las, fazendo uma discussão inicial sobre formas de identificar uma e outra. Feito esse debate inicial, apresente a questão disparadora e explique-lhes que ao final do projeto deverão saber respondê-la:

- Como e por que devemos impedir a propagação de notícias falsas?

Após essa conversa inicial, organize a turma em grupos e combine um cronograma para a realização do projeto. Isso pode ser feito em conjunto com a turma, por meio de uma leitura coletiva da descrição do projeto: contexto, desenvolvimento, produto, apresentação e relatório conclusivo. O cronograma deve conter, além do encontro inicial, as etapas a seguir.

1. **Estudo e contextualização histórica**
   Proponha uma pesquisa inicial sobre impactos sociais causados por *fake news*, incluindo um estudo acerca de como essa prática se desenvolveu na sociedade e ganhou espaço principalmente com o crescimento das redes sociais. Pode ser interessante

nesse momento apresentar outras teorias que auxiliam na compreensão desse fenômeno, como teorias filosóficas da pós-verdade e das relações líquidas.

2. **Elaboração do experimento de pesquisa**

Nessa etapa, oriente os estudantes na criação do experimento. Eles devem não só determinar a população e criar a mensagem como também escolher a forma de divulgação e as estratégias que utilizarão para verificar se a mensagem está ou não sendo compartilhada pela população.

Essa etapa pode demandar bastante criatividade dos estudantes para criar um meio de divulgação que seja verificável. Reforce a necessidade dela para garantir o sucesso do experimento.

Se achar pertinente, proponha um estudo sobre as etapas que compõem um experimento: observação, hipótese, elaboração do experimento, coleta de dados, interpretação de dados e resultados conclusivos. Com esse estudo, eles deverão se convencer de que a coleta de dados é a etapa crucial do experimento: qualquer variação nessa observação pode causar uma conclusão errada sobre as hipóteses levantadas.

Com isso, pode ser importante propor aos grupos que testem o sistema escolhido para divulgar a notícia antes de iniciar o experimento propriamente dito.

3. **Análise dos dados**

Essa etapa do projeto demandará bastante manipulação matemática por parte dos grupos. Pode ser interessante incentivá-los a interagir para que troquem estratégias de cálculo e análise dos dados. Eles deverão promover uma série de estudos sobre possíveis modelos de PG e outras sequências resultantes de uma PG, visando criar hipóteses para entender e explicar os dados obtidos com o experimento.

Além dessa análise inicial, eles deverão fazer um estudo sobre progressões crescentes e decrescentes, descrito no projeto. A intenção desse estudo é demonstrar que, em algumas situações, a propagação de uma notícia falsa é irrefreável, sendo impossível impedir que atinja toda a população.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

4. **Elaboração da apresentação e do relatório**

Na etapa final desse projeto, os estudantes devem ter o cuidado de reunir todas as informações coletadas: o estudo sobre impactos sociais das *fake news*, os dados do experimento, o estudo algébrico sobre progressões e as conclusões sobre as hipóteses levantadas.

Além disso, eles deverão relacionar todos esses dados com o estudo do modelo SEZR, o que pode demandar uma mediação atenta. Por isso pode ser importante que a finalização do relatório seja feita em aula, propiciando a interação dos grupos entre si e a mediação do professor.

Uma vez finalizado o relatório, a avaliação pode incluir um debate coletivo, em roda de conversa, para verificar se os estudantes se sensibilizaram com o projeto, se entendem sua responsabilidade no combate às *fake news*, e se embasam as argumentações em dados quantitativos e conceitos matemáticos.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Atividade 1

Esta atividade deve ser desenvolvida em grupos.

1ª parte

Entrevistem algumas pessoas que já cursaram o Ensino Médio e outras que trabalhem em alguma área de Ciências Exatas como engenheiros, físicos, químicos, entre outros. Façam as seguintes perguntas:

- O que você sabe sobre logaritmos?
- O que você se lembra da época em que estudou esse assunto no Ensino Médio?
- Você usa logaritmos hoje? Se sim, como?

2ª parte

Leiam os textos sobre a história dos logaritmos, nas páginas 69 e 70, e pesquisem na internet para responder às perguntas a seguir.

- Em que época sugiram os logaritmos e com que finalidade?
- Como eram utilizados?

Com os dados coletados, escrevam um texto que inclua a abordagem das questões históricas e o relato das entrevistas. Façam comparações entre a utilidade dos logaritmos nos dias atuais e na época em que surgiram.

Comentários:

Esta atividade pode ser proposta antes do início da Unidade 2, usando a ideia de sala de aula invertida, em que os alunos fazem um estudo prévio sobre o assunto que será abordado. Recomendamos a integração com Língua Portuguesa para a produção dos textos e o desenvolvimento da habilidade EM13LP18.

Atividade 2

1ª parte

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Leia o texto "Fractais" nas páginas 92 e 93, e veja como os fractais se relacionam à Matemática. Em seguida, pesquise e descubra como eles são usados na arte e selecione algumas imagens que mais chamarem sua atenção. Escreva um pequeno parágrafo descrevendo como esse tipo de obra é produzida e compartilhe com os colegas.

2ª parte

Crie uma composição com base em um elemento, usando ou não recursos digitais. Você pode selecionar um elemento da natureza ou de sua cultura para criar a obra.

Comentários:

Esta atividade pode ser proposta antes do início do trabalho com a Unidade 3, para que os alunos possam ir se apropriando de um assunto que será abordado nela. Recomenda-se que seja desenvolvida junto com a área de Linguagens e suas Tecnologias, uma vez que propicia o desenvolvimento da habilidade EM13LGG301. Você pode sugerir aos estudantes que conheçam a obra de Aloísio Magalhaes, disponível em: https://www.itaucultural.org.br/ocupacao/aloisio-magalhaes/cartemas/ (acesso em: 21 jul. 2020).

REFERÊNCIAS

ARAUJO, Fernanda. Como funciona o rendimento da poupança. *In*: SERASA. [*S. l.: s. n.*], [20--?]. Disponível em: https://www.serasa.com.br/ensina/como-ganhar-dinheiro/rendimento-da-poupanca/. Acesso em: 12 jun. 2020.
O *site* do Serasa apresenta uma série de artigos sobre Educação Financeira. O artigo desse *link* aborda especificamente o funcionamento da poupança.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. Cidadania financeira. [Brasília, DF]: BCB, [2019?]. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/cidadaniafinanceira. Acesso em: 12 jun. 2020.
Essa página do *site* apresenta artigos, vídeos e cursos relacionados à Educação Financeira.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. *Educação financeira nas escolas*: desafios e caminhos. [Brasília, DF]: BCB, 2018. p. 119-127. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/Nor/relcidfin/docs/art8_educacao_financeira_escolas.pdf. Acesso em: 12 jun. 2020.
Com base em dados sobre a educação básica brasileira e experiências de sucesso, esse artigo apresenta ideias que podem ajudar na identificação dos desafios e das oportunidades para avançar no ensino da Educação Financeira nas escolas do país.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Integrando modelagem matemática nas práticas pedagógicas. *Educação Matemática em Revista*, [*s. l.*], n. 26, p. 17-25, 2013. Disponível em: http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/5. Acesso em: 12 jun. 2020.
Nesse artigo, o autor aborda os modelos matemáticos e como utilizá-los no dia a dia. Apresenta sugestões de uso da modelagem matemática para facilitar a aprendizagem e despertar o interesse dos alunos.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem matemática: O que é? Por quê? Como? [*S. l.*], [*s. l.*], n. 4, p. 73-80, 2004. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/artigo_veritati_jonei.pdf. Acesso em: 12 jun. 2020.
Nesse artigo o autor apresenta algumas ideias sobre modelagem na perspectiva da Educação Matemática.

CORONAVIRUS Worldwide Graphs. *In*: WORLDOMETERS. [*S. l.: s. n.*], 2020. Disponível em: https://www.worldometers.info/coronavirus/worldwide-graphs/#total-deaths. Acesso em: 12 jun. 2020.
Esse *site* apresenta gráficos com dados mundiais sobre a pandemia da covid-19, que assolou o planeta em 2020.

LIMA, Elon Lages *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção Profmat, v. 1).
O volume 1 da Coleção Profmat, publicada pela Sociedade Brasileira de Matemática, aborda com rigor os conjuntos numéricos e as funções reais de variável real, estudadas sem o uso do cálculo infinitesimal.

LIMA, Elon Lages. *Números e funções reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção Profmat, v. 15).
Esse volume da Coleção Profmat, produzida pela Sociedade Brasileira de Matemática para fomentar seu programa de Mestrado Profissional em Matemática, foca nas funções de uma variável, estudadas sem o uso do cálculo infinitesimal, e apresenta noções sobre conjuntos, a ideia geral de função, os diferentes conjuntos numéricos e as diferentes classes de funções.

LIMA, Elon Lages *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção Profmat, v. 2).
O volume 2 da Coleção Profmat, publicada pela Sociedade Brasileira de Matemática, é dividido em duas partes. A primeira trata da Matemática Discreta, que abrange o estudo de progressões, com aplicações em Matemática Financeira, análise combinatória e probabilidade. A segunda parte é dedicada à Geometria Espacial.

MILIES, César P.; COELHO, Sônia P. *Números*: uma introdução à Matemática. São Paulo: Edusp, 2006.
Citando os próprios autores, esse livro é "uma tomada de posição quanto à forma em que acreditamos que a matemática deva ser apresentada; um curso não deve se limitar a transmitir apenas o conteúdo 'técnico', deve preocupar-se também com a formação do estudante". Assim, o livro foi elaborado com base nas anotações de aula do curso de Álgebra Linear ministrado pelos professores autores, apresentando os conceitos sempre contextualizados, introduzidos por referências históricas e exemplificados por aplicações e exercícios resolvidos.

MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila Cristina. *Progressões e Matemática Financeira*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
O livro apresenta o estudo da Matemática Financeira por meio de progressões geométricas e mostra diversas aplicações.

MUNIZ NETO, Antônio Caminha. *Fundamentos de cálculo*. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção Profmat).
Esse volume da Coleção Profmat, produzida pela Sociedade Brasileira de Matemática, apresenta uma exposição do cálculo diferencial e integral de forma clara e sucinta, sempre associado à sua aplicação em diversas áreas das ciências, trazendo uma ampla gama de situações modeladas pelas mais diversas funções.

NAZÁRIO, Heleno Rocha. Em artigo, pesquisadores usam modelo de epidemia zumbi para estudar propagação de rumores e fake news. *In*: UNIVERSIDADE FEDERAL DO SUL DA BAHIA. Itabuna, 18 out. 2019. Disponível em https://www.ufsb.edu.br/component/

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

content/article/1830-em-artigo-pesquisadores-usam-modelo-de-epidemia-zumbi-para-estudar-propagacao-de-rumores-e-fake-news. Acesso em: 6 maio 2020.
Neste artigo, os pesquisadores mostram o estudo de um modelo de epidemia para entender as formas de propagação de notícias falsas.

RIBEIRO, Alessandro Jacques; CURY, Helena Noronha. *Álgebra para a formação do professor*: explorando os conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.
Nessa obra, voltada à formação de professores de Matemática, os autores apresentam os conceitos de equação e de função. Por meio de exemplos, discutem dificuldades encontradas na aprendizagem dos dois temas e, no último capítulo, sugerem algumas atividades para trabalhar com os alunos.

ROQUE, Tatiana. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
Nesse livro, a professora e historiadora Tatiana Roque cobre a história da Matemática desde a Mesopotâmia até o século XIX. Como sugere o subtítulo, a obra faz um estudo não só sobre o que os documentos históricos nos dizem a respeito da Matemática mas também sobre como a história tem sido contada muitas vezes sob uma perspectiva equivocada, principalmente por unir ideias anacrônicas e tomar lendas como fatos. Ao analisar e refutar esses relatos, a autora traz mais luz à história da Matemática.

SALAS, Paula. Você sabe ensinar seus alunos a gerir dinheiro? *Nova Escola*, São Paulo, ed. 318, jan. 2019. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/14005/voce-sabe-ensinar-seus-alunos-a-gerir-dinheiro. Acesso em: 12 jun. 2020.
Esse artigo apresenta algumas experiências de como trabalhar a Educação Financeira de forma integradora e interdisciplinar.

SOUSA, Geneci A.; NASSER, Lilian; TORRACA, Marcelo A. A.; ASSEMANY, Daniella. Educação Financeira prática e visual. *In:* CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 7., 2013, Montevidéu. *Anais* [...]. Montevidéu: Cibem, 2013. Disponível em: http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/846.pdf. Acesso em: 12 jun. 2020.
Nesse artigo, apresentado no VII Cibem, em Montevidéu, Uruguai, esse grupo de professores do Projeto Fundão, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, conta como desenvolveu uma longa pesquisa sobre o assunto e apresenta atividades investigativas e contextualizadas, testadas com alunos.

TROTTA, Fernando. *Matemática por assunto 2*. São Paulo: Scipione, 1988.
Esse livro apresenta o estudo das progressões aritméticas, progressões geométricas e logaritmos.

REFERÊNCIAS COMPLEMENTARES

PAENZA, Adrián. Como dobrar uma folha de papel pode te levar até a Lua. [*S. l.*]: TED, 2012. 1 vídeo (ca. 4 min). Disponível em: https://www.ted.com/talks/adrian_paenza_folding_paper_can_get_you_to_the_moon/transcript?language=pt-br#t-219123. Acesso em: jun. 2020.
Essa *ted lesson* trata do crescimento exponencial da espessura obtida por meio de uma sequência de dobras em uma folha de papel.

PRECIOSO, Juliana Conceição; PEDROSO, Hermes Antônio. História do número *e*: gênese e aplicações. *Matemática e Estatística em Foco*, Uberlândia, v. 1, n. 1, p. 31-44, jun. 2013. Disponível em: http://www.seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/13913. Acesso em: 12 jun. 2020.
Esse artigo apresenta alguns aspectos fundamentais da história do número *e*, em especial os relacionados à sua origem, um pouco incerta, e sua presença inevitável nas mais diversas aplicações em vários ramos da ciência.

REIS, Saulo Portes dos; SILVA, Silvia Regina Vieira da. Logaritmos: de sua invenção até a sala de aula. *Ciência e Natura*, Santa Maria, RS, v. 37, n. 3, p. 889-897, set./dez. 2015. Disponível em: https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/view/17318/pdf. Acesso em: 12 jun. 2020.
Esse artigo apresenta uma proposta para o ensino do conceito de logaritmos com base no contexto histórico de sua evolução. São abordadas duas perspectivas: a origem dos logaritmos motivada pela necessidade de simplificar cálculos e a relação logarítmica presente no cálculo da área de uma faixa da hipérbole.

SALAS, Paula. Você sabe ensinar seus alunos a poupar dinheiro? *Nova Escola*, São Paulo, [2019?]. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/14005/voce-sabe-ensinar-seus-alunos-a-gerir-dinheiro. Acesso em: 14 jun 2020.
Este artigo apresenta algumas experiências de como trabalhar com a educação financeira de forma integradora e transversal nas disciplinas.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

ENTRE AÇÃO

MATEMÁTICA

A MATEMÁTICA FINANCEIRA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR MEIO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Luciana Maria Tenuta de Freitas (Coordenação)

Mestre em Ensino de Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC-Minas)

Bacharel e licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Assessora pedagógica da Educação Básica, com atuação na formação de professores

Adilson Longen

Doutor em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Mestre em Educação com linha de pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Professor do Ensino Médio

Rodrigo Morozetti Blanco

Mestre em Matemática com linha de pesquisa em Filosofia da Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat)

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP)

Professor da Educação Básica com atuação na formação de professores

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Ensino Médio

1ª edição
São Paulo, 2020

Editora do Brasil

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Longen, Adilson
Interação matemática : a matemática financeira e a resolução de problemas por meio das funções exponencial e logarítmica / Adilson Longen, Rodrigo Morozetti Blanco ; coordenação Luciana Maria Tenuta de Freitas. -- 1. ed. -- São Paulo : Editora do Brasil, 2020. -- (Interação)

ISBN 978-85-10-08360-7 (aluno)
ISBN 978-85-10-08361-4 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) 2. Matemática e suas tecnologias (Ensino médio) I. Blanco, Rodrigo Morozetti. II. Freitas, Luciana Maria Tenuta de. III. Título IV. Série.

20-38726 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Maria Alice Ferreira - Bibliotecária - CRB-8/7964

© Editora do Brasil S.A., 2020
Todos os direitos reservados

Direção-geral: Vicente Tortamano Avanso
Direção editorial: Felipe Ramos Poletti
Gerência editorial: Erika Caldin
Supervisão de arte: Andrea Melo
Supervisão de editoração: Abdonildo José de Lima Santos
Supervisão de revisão: Dora Helena Feres
Supervisão de iconografia: Léo Burgos
Supervisão de digital: Ethel Shuña Queiroz
Supervisão de controle de processos editoriais: Roseli Said
Supervisão de direitos autorais: Marilisa Bertolone Mendes

Supervisão editorial: Rodrigo Pessota
Consultoria técnico-pedagógica: Airton Temistocles Gonçalves de Castro e Eduardo Wagner
Edição: Adriana Soares Netto, Daniel Leme, Everton José Luciano, Katia Simões de Queiroz e Marcos Gasparetto
Assistência editorial: Juliana Bomjardim, Viviane Ribeiro e Wagner Razvickas
Especialista em revisão e copidesque: Elaine Silva
Copidesque: Gis[illegible]la[illegible]Beletti
Revisão: Amanda Cabral, Andréia Andrade, Fernanda Almeida, Fernanda Sanchez, Flávia Gonçalves, Gabriel Ornelas, Jor[illegible]Martin Gonçalves e Rosani Andreani
Pesquisa iconográfica: Elena Molinari
Assistência de arte: Daniel Souza
***Design* gráfico:** Talita Lima
Capa: Megalo Design
Imagem de capa: akinbostanci/iStockphoto.com, ilkercelik/iStockphoto.com, loveguli/iStockphoto.com, malerapaso/iStockphoto.com, marchmeena29/iStockphoto.com, masterzphotois/iStockphoto.com e tylim/iStockphoto.com
Edição de arte: Paula Coelho e Talita Lima
Ilustrações: Mauro Salgado, Reinaldo Vignati e Tarcísio Garbellini
Editoração eletrônica: JS Design
Licenciamentos de textos: Cinthya Utiyama, Jennifer Xavier, Paula Harue Tozaki e Renata Garbellini
Controle de processos editoriais: Bruna Alves, Carlos Nunes, Rita Poliane, Terezinha de Fátima Oliveira e Valéria Alves

1ª edição, 2020

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Editora do Brasil

Rua Conselheiro Nébias, 887
São Paulo/SP – CEP 01203-001
Fone: +55 11 3226-0211
www.editoradobrasil.com.br

Começo de CONVERSA

A etapa do Ensino Médio é um desafio na vida de todo estudante. Especialmente neste momento, com as mudanças trazidas pelo Novo Ensino Médio, os desafios se acentuam e se tornam mais complexos.

A ideia deste novo modelo é que as aprendizagens escolares capacitem os estudantes para que, ao final dessa etapa de escolaridade, estejam aptos a atuar, com competência e responsabilidade, na sociedade em que vivem.

Para isso, é importante que você se aproprie dos conhecimentos escolares como uma das diversas formas de leitura da realidade, utilizando-os como ferramentas para poder intervir, de forma consciente e responsável, nessa realidade.

O Novo Ensino Médio

O Novo Ensino Médio está organizado em quatro áreas de conhecimento: **Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**.

De acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM)[1], os novos currículos são compostos por duas partes que se integram e se complementam: a **formação geral básica e os itinerários formativos**.

Na **formação geral básica**, "os currículos e as propostas pedagógicas devem garantir as aprendizagens essenciais definidas na BNCC", contemplando de modo integrado e articulado as quatro áreas de conhecimento. (BRASIL, 2018, p. 476).

Os **itinerários formativos** possibilitam aos estudantes fazer escolhas que irão compor seu currículo. Eles dialogam com as áreas de conhecimento, uma vez que quatro deles estão diretamente ligados a cada uma dessas áreas: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Além desses, um quinto itinerário contempla a formação técnica e profissional.

Os itinerários formativos são orientados por meio de cinco eixos estruturantes:

I. investigação científica: supõe o aprofundamento de conceitos fundantes das ciências para a interpretação de ideias, fenômenos e processos para serem utilizados em procedimentos de investigação voltados ao enfrentamento de situações cotidianas e demandas locais e coletivas, e a proposição de intervenções que considerem o desenvolvimento local e a melhoria da qualidade de vida da comunidade;

II. processos criativos: supõem o uso e o aprofundamento do conhecimento científico na construção e criação de experimentos, modelos, protótipos para a criação de processos ou produtos que atendam a demandas para a resolução de problemas identificados na sociedade;

III. mediação sociocultural: supõem a mobilização de conhecimentos de uma ou mais áreas para mediar conflitos, promover entendimento e implementar soluções para questões e problemas identificados na comunidade;

IV. empreendedorismo: supõe a mobilização de conhecimentos de diferentes áreas para a formação de organizações com variadas missões voltadas ao desenvolvimento de produtos ou prestação de serviços inovadores com o uso das tecnologias (Resolução CNE/CEB nº 3/2018, Art. 12, § 2º). (BRASIL, 2018, p. 478-479).

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Isaeva Anna/Shutterstock.com

1 BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. Parecer nº 3, de 8 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, observadas as alterações introduzidas na LDB pela Lei nº 13.415/2017. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, p. 49, 21 nov. 2018.

A BNCC e o Ensino Médio

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) está estruturada em **dez competências gerais** que devem ser desenvolvidas pelos estudantes desde a Educação Infantil até o Ensino Médio.

Cada uma das quatro áreas de conhecimento está definida por meio de **competências específicas** que se articulam às competências gerais. No caso da área de Matemática e suas Tecnologias, são cinco competências específicas e cada uma delas se desdobra em um conjunto de habilidades que devem ser desenvolvidas ao longo dos três anos do Ensino Médio (BRASIL, 2018, p. 531).

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Nesse novo contexto, a palavra-chave passa a ser **flexibilidade**. Essa é a característica da coleção de Matemática que você tem em mãos. Esta coleção foi escrita para atender à **formação geral básica**, e a flexibilidade é seu eixo condutor.

elenabsl/Shutterstock.com

De acordo com o que propõe a BNCC, o desenvolvimento das habilidades e competências no Ensino Médio está articulado às "aprendizagens essenciais estabelecidas para o Ensino Fundamental".

> A área de Matemática, no Ensino Fundamental, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade (BRASIL, 2018, p. 471).

Sendo assim, as atividades desta coleção foram pensadas para que você possa ter experiências que o levem a desenvolver um pensamento matemático consistente, estabelecendo o maior número possível de relações, ao mesmo tempo que aplica esse conhecimento a outras disciplinas e a situações do mundo real. Esse processo, que visa a uma aprendizagem profunda dos conceitos matemáticos, também o prepara para avaliações de acesso às universidades, se essa for sua opção.

Por meio de atividades diversificadas, que envolvem resolução e elaboração de problemas, você terá a oportunidade de discutir com os colegas, levantar hipóteses, argumentar, defender suas ideias, mudar de ideia com base na argumentação do colega e, assim, desenvolver a empatia e o respeito pelo outro, que vão contribuir para sua formação humana, contemplando o desenvolvimento das competências gerais expressas na BNCC.

As atividades envolvem investigação de propriedades matemáticas, produção de textos relatando a conclusão das investigações, análise de gráficos e tabelas envolvendo situações cotidianas, modelagem para resolução de problemas reais, desenvolvimento de projetos etc. usando ou não a tecnologia. Dessa forma, você poderá desenvolver sua autonomia intelectual e pensamento crítico, fundamentais para contribuir na construção de "uma sociedade mais justa, ética, democrática, inclusiva, sustentável e solidária" (BNCC, 2018, p. 466).

Você está sendo chamado a ser **protagonista** de todo o processo de aprendizagem da Matemática ao longo do Ensino Médio. Esperamos que aproveite essa oportunidade.

Para conhecer um pouco mais a Base Nacional Comum Curricular, consulte: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ (acesso em: 7 maio 2020).

Objetivos e justificativas deste volume

Unidades	Objetivos	Justificativa	Competências e habilidades da BNCC
1 Tópicos de Matemática Financeira	• Compreender o conceito de juros simples e sua utilização. • Calcular o montante de um capital aplicado na modalidade de juros simples após um período de aplicação. • Interpretar o crescimento do montante de um capital aplicado a juros simples como crescimento linear. • Compreender o conceito de juros compostos e sua utilização. • Diferenciar aplicações em juros simples de aplicações em juros compostos. • Calcular o montante de um capital aplicado na modalidade de juros compostos após um período de aplicação. • Interpretar o crescimento do montante de um capital aplicado a juros compostos como crescimento exponencial.	• O conhecimento do cálculo de juros simples e compostos por meio de comparações envolvendo financiamentos e taxas ligadas ao mercado financeiro possibilita compreender situações reais e contribui para administrar com competência os próprios recursos financeiros.	Gerais: 2, 4, 5 e 9 Matemática e suas Tecnologias: 1, 2, 3 e 4 EM13MAT101 EM13MAT104 EM13MAT203 EM13MAT302 EM13MAT303 EM13MAT315 EM13MAT405
2 Função exponencial e função logarítmica	• Analisar como operações matemáticas se comportam em diferentes conjuntos numéricos. • Conhecer os logaritmos e entender como aplicá-los em diversas situações. • Modelar situações de crescimento e decrescimento utilizando funções exponenciais e logarítmicas. • Resolver e elaborar problemas modelados por funções	• A compreensão de fenômenos cujas grandezas variam de forma exponencial ou logarítmica possibilita modelar e resolver problemas em vários contextos, sejam eles da esfera científica, sejam da vida cotidiana, por exemplo, da área financeira.	Gerais: 1, 2, 4, 5 e 9 Matemática e suas Tecnologias: 1, 3 e 4 EM13MAT101 EM13MAT304 EM13MAT305 EM13MAT403

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

ideyweb/Shutterstock.com

Unidades	Objetivos	Justificativa	Competências e habilidades da BNCC
3 Sequências numéricas e progressão geométrica	• Identificar as regularidades existentes em sequências numéricas. • Compreender a formação de uma sequência a partir de um termo geral. • Determinar o termo geral de uma progressão geométrica. • Utilizar as propriedades de uma progressão geométrica para resolver problemas. • Identificar e relacionar o cálculo de montantes em juros compostos com crescimento em progressão geométrica. • Empregar o conceito de logaritmo para resolver situações-problema relacionadas à progressão geométrica. • Corresponder os termos de uma progressão geométrica com imagens de função exponencial. • Associar o estudo de fractais com progressão geométrica identificando sua formação.	• O trabalho com sequências e progressões geométricas possibilita a investigação de propriedades e o estabelecimento de conjecturas matemáticas, além de oferecer mais uma oportunidade para a consolidação de habilidades relativas ao cálculo de juros compostos.	Gerais: 2, 4 e 9 Matemática e suas Tecnologias: 3, 4 e 5 EM13MAT304 EM13MAT305 EM13MAT405 EM13MAT508
Conexões & projetos	• Utilizar funções exponenciais e logarítmicas para modelar a variação de grandezas e inferir resultados, impactos e consequências dessa variação. • Analisar situações de crescimento exponencial para tomar decisões e embasar argumentos em situações como: planejamento de gastos, endividamentos e investimentos; análise de impacto das comunicações em rede.	• Os projetos possibilitam pôr em ação, de forma articulada, as habilidades trabalhadas nas unidades deste volume.	Gerais: 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9 e 10 Matemática e suas Tecnologias: 1, 2, 3, 4 e 5 EM13MAT101 EM13MAT203 EM13MAT303 EM13MAT304 EM13MAT404 EM13MAT508 EM13MAT510

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

BilahDesign/Shutterstock.com

SUMÁRIO

UNIDADE 1 **Tópicos de Matemática Financeira** 10

1. A Matemática e a Educação Financeira 12
Matemática Comercial 13
Porcentagem 14
Aumentos e descontos 20

2. Matemática Financeira 25
Juros simples 26
Juros simples e funções 29
Juros compostos 31
Juros compostos: outras situações 35
Juros compostos com taxas variáveis 35
Juros compostos e funções 36
Juros compostos e taxas equivalentes 37
Financiamentos 39
Atividades finais 43

Freedomz/Shutterstock.com

UNIDADE 2 **Função exponencial e função logarítmica** 46

1. Crescimento exponencial 48
Investigando a potenciação 50
Potências de expoente racional 51
[illegible]onal 53
[illegible] potenciação 56

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Cris Faga/NurPhoto/Getty Images

2. A função exponencial 58
O gráfico da função exponencial 60
Outras funções exponenciais e seus gráficos 63
Operações inversas à potenciação 66
Logaritmos 67

3. A função logarítmica 69
Propriedades dos logaritmos 70
Logaritmo natural e a mudança de base 72
A função logarítmica e seu gráfico 75
Função inversa 75
O gráfico da função logarítmica 76
Escala logarítmica 77

4. Equações e inequações exponenciais e logarítmicas 81
Resolução de equações exponenciais 82
Resolução de equações logarítmicas 83
Inequações exponencial e logarítmica 83
Atividades finais 86

UNIDADE 3

Sequências numéricas e progressão geométrica 88

Arthimedes/Shutterstock.com

1. Sequências numéricas 90

Os fractais e as sequências 90

Lei de formação de uma sequência 94

Aproveitando a oportunidade:
Os padrões na Arte 97

2. A ideia de progressão geométrica 98

Termo geral de uma progressão geométrica 100

Propriedades de uma progressão geométrica 104

Progressão geométrica e outras relações 106

Juros compostos, logaritmos e progressão geométrica 106

Função e progressão geométrica 107

Soma dos termos de uma progressão geométrica 110

Limite da soma dos termos de uma sequência 111

Atividades finais 115

CONEXÕES & PROJETOS

Usando o crescimento exponencial a seu favor 118

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

damircudic/E+/iStockphoto.com

Projeto 1

Como fazer seu dinheiro render 120

Projeto 2

Propagação de *fake news* 123

Caixa de ferramentas 126

Gabarito 153

Competências gerais da BNCC 154

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC 154

Referências 158

UNIDADE 1

Freedomz/Shutterstock.com

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

TÓPICOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

A Educação Financeira auxilia no planejamento familiar e consumo consciente.

Nesta unidade, você vai:

- compreender o conceito de juros simples e sua utilização;
- calcular o montante de um capital aplicado na modalidade de juros simples após determinado período de aplicação;
- interpretar o crescimento do montante de um capital aplicado a juros simples como crescimento linear;
- compreender o conceito de juros compostos e sua utilização;
- diferenciar aplicações em juros simples de aplicações em juros compostos;
- calcular o montante de um capital aplicado na modalidade de juros compostos após determinado período de aplicação;
- interpretar o crescimento do montante de um capital aplicado a juros compostos como crescimento exponencial.

Consumo consciente

Quando falamos em Educação Financeira podemos pensar em colocar um cadeado no bolso para não gastar ou, ainda, ter a eterna ideia de que devemos poupar pensando sempre num futuro distante e incerto. Entretanto, o que se propõe com a Educação Financeira é, claro, pensar no futuro, mas no presente saber utilizar com responsabilidade o dinheiro que é fruto de um trabalho. Ser consciente quanto ao consumo é um dos grandes recados.

As respostas são pessoais e dependem do conhecimento prévio dos estudantes. Entretanto, espera-se que informem, em relação à primeira pergunta, que normalmente devemos pagar juros e/ou multa pelo atraso no pagamento. Talvez também saibam diferenciar juros simples de juros compostos. O objetivo desta unidade é trabalhar tópicos de Matemática Financeira, e essas duas questões ainda poderão ser respondidas durante esse estudo.

1. O que ocorre quando contraímos uma dívida e não a pagamos no prazo estipulado?

2. Você saberia diferenciar juros simples de juros compostos?

1 A Matemática e a Educação Financeira

Na BNCC

Nesta unidade você vai trabalhar as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias 1, 2, 3 e 4 e as habilidades EM13MAT101, EM13MAT104, EM13MAT203, EM13MAT302, EM13MAT303, EM13MAT315, EM13MAT405.

GaudiLab/Shutterstock.com

A imagem ao lado nos remete ao chamado mercado financeiro, que abriga diversos tipos de profissionais com diferentes ocupações. Entre elas, está a análise das bolsas de valores do mundo inteiro. Uma mudança na economia num pequeno país pode gerar alterações no cenário da economia mundial.

As questões financeiras acabam interferindo na vida das pessoas. Qualquer cidadão comum que fica atento às questões salariais, aos custos domésticos, ao poder aquisitivo de seu dinheiro, antes de tomar suas decisões sobre como movimentá-lo, de certa maneira está compreendendo aspectos da economia, está praticando a chamada Educação Financeira.

Ao ouvirmos falar em crise econômica, normalmente associamos esse termo à bolsa de valores, à oscilação do câmbio, aos caminhos políticos das nações e a outras tantas incertezas que "balançam" o setor e interferem diretamente na vida econômica das pessoas. A posição de um país em relação aos problemas ambientais ou à migração de povos para países mais desenvolvidos são decisões políticas que impactam não apenas a economia mundial, mas a vida do cidadão comum. É por essas e outras razões que precisamos cada vez mais discutir e entender a economia.

Photo Stock/Shutterstock.com

Alguns bens de consumo.

Um exemplo bem atual de como tudo está interligado foi a pandemia causada pela covid-19, que assolou o sistema de saúde mundial causando milhares de mortes e acelerou a queda da economia de países agonizantes. Situações desse tipo são mais um motivo para desenvolvermos um olhar global sobre o que está a nossa volta.

Se a ideia é conhecer melhor a economia, precisamos valorizá-la de dentro para fora. Em nosso lar, podemos analisar o que consumimos, verificar o que é realmente necessário, entender [illegible] são pagas, o modo que a saúde econômica da família é gerenciada,

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Reflita sobre os problemas diários que estão intimamente relacionados à economia. O noticiário aborda o desemprego, a alta do preço dos combustíveis e dos bens de consumo. Há também desigualdade social e má distribuição de renda. Todos esses exemplos são índices que apontam o trajeto econômico que percorremos rotineiramente, que inclui diferentes percentuais de aumento e queda de preços, além de oscilações no mercado financeiro.

Dmitriy Utlanov/Shutterstock.com

A medicina é uma atividade econômica produtora de serviços.

Você participa, desde o momento que acorda até a hora em que se deita, de ações econômicas diversificadas. Veja: ao escovar os dentes, tomar banho e tomar café da manhã, você exerce ações de consumo (usa água, pasta de dente, café, leite, pão). Ao ir à escola ou ao trabalho, paga a passagem do ônibus ou usa o combustível do carro. É claro que, durante o trajeto, você olha o *smartphone*, manda mensagens, recebe mensagens – tudo isso em um aparelho comprado recentemente e que talvez ainda esteja pagando. Pode ser que também aproveite um intervalo para ler jornal ou parte de um livro; adivinhe: alguém comprou o jornal ou comprou o livro.

Se focarmos o olhar em um trabalhador de qualquer profissão, nos deparamos com essas e outras questões voltadas ao consumo, além da atividade de produção. Não importa se a pessoa é engenheira, médica de um posto de saúde, motorista, professora ou exerce outra função. Os profissionais desempenham atividades econômicas produzindo bens e serviços, recebem salários e geram rendimentos para os donos das empresas, hospitais e tantos outros setores. Ao receber o salário, o trabalhador gasta com bens de consumo necessários à sobrevivência, destina parte para adquirir outros bens e, quando sobra, faz aplicações em instituições financeiras. Essas instituições, por sua vez, financiam obras ou emprestam dinheiro às empresas para que possam continuar exercendo suas atividades. Isso faz a roda econômica girar, pois parte dos juros pagos pelos empresários nesses financiamentos vai para as instituições financeiras e parte vai para remunerar aquele que aplicou uma porção de seu salário nessa mesma instituição. Com o lucro obtido, o ciclo econômico continua.

Esperamos que com essa reflexão sobre as atividades econômicas, talvez bem simplificada, você passe a conhecer melhor aspectos da economia, conscientize-se de que faz parte dela e use esse conhecimento de forma crítica.

Para pensar e discutir

Respostas pessoais.

1. Em qual atividade diária você pode diminuir seu consumo? Justifique.
2. O que você sugere para melhorar a questão econômica de nosso país? Compartilhe com os colegas.

Nesta unidade abordaremos tópicos relacionados à economia. Nosso interesse maior está relacionado à Matemática Comercial e à Matemática Financeira. O conhecimento sobre porcentagens, variação percentual, aumento, desconto, juros simples e compostos nos possibilita analisar aspectos econômicos de nosso dia a dia para que possamos tomar decisões conscientes a respeito de como movimentar nosso dinheiro – tudo isso é a Educação Financeira.

Matemática Comercial

Em nosso cotidiano temos relação direta com o dinheiro: no supermercado, na farmácia, no transporte, nos pagamentos de [illegible] nas transações financeiras com o banco em que temos conta, na organização do orçamento mensal quando observamos o que recebemos no mês e quais gastos temos no planejamento das despesas para uma viagem de final de ano, na compra de um computador novo para o trabalho, nas despesas emergenciais do conserto do carro, na compra de um livro etc. A todas essas questões relacionadas ao dinheiro, vamos chamar de **Matemática Comercial**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

gustavomellossa/iStockphoto.com

Em maio de 2020, as cédulas de reais impressas em circulação chegaram a mais de R$ 300 bilhões.

Fará parte do nosso estudo da Matemática Comercial o entendimento de porcentagem, a análise de situações de descontos e acréscimos e ainda o que chamamos de variação percentual. Nesse estudo iremos abordar, por meio de exemplos, alguns índices econômicos que, de certa maneira, regem a vida econômica do país. Além disso, você também poderá observar algumas informações a respeito de Educação Financeira.

Todo esse estudo visa principalmente inserir você no que acontece nas situações financeiras do dia a dia das pessoas. Para isso, também será preciso compreender um pouco a economia de seu município, de seu estado e, de modo geral, do Brasil.

Uma questão simples que precisamos saber responder diz respeito a nosso dia a dia: se a passagem do ônibus que tomamos todos os dias para vir à escola ou para trabalhar subiu de R$ 3,50 para R$ 3,92, houve um aumento de mais de 10%. Isso é verdade?

Pensando um pouco mais além, por exemplo, analise as informações a seguir, fornecidas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em cujo *site* (https://www.ibge.gov.br/) você pode encontrar esses e muitos outros dados.

O **PIB** do Brasil em 2017 foi de 6,6 trilhões de reais.

O **PIB** do Brasil em 2018 foi de 6,9 trilhões de reais.

O Produto Interno Bruno (PIB) é um indicador econômico determinado pela soma dos valores monetários de todos os bens e serviços produzidos em determinada região em determinado período. Agora pense na questão:

Qual foi a variação percentual do PIB do Brasil de 2017 para 2018?

Ainda nesta unidade retomaremos essa situação.

Porcentagem

IMPOSTO DE RENDA

Em R$	Alíquota, em %	Deduzir, em R$
Até 1.903,98	Isento	
De 1.903,99 até 2.826,65	7,5	142,90
De 2.826,66 até 3.751,05	15	354,80
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5	636,13
Acima de 4.664,68	27,5	869,36

Mauro Salgado

Fonte: TABELA Imposto de Renda. *Folha de S.Paulo*, São Paulo, p. 22, 15 fev. 2020.

A tabela ao lado foi extraída de um jornal de circulação nacional. Observe que ela é composta de três colunas. A primeira coluna é formada por faixas de valores salariais (ou outros ganhos) recebidos num mês; a segunda coluna, pelas alíquotas (em porcentagem) de desconto, e a terceira coluna, pelas parcelas a deduzir em reais.

Assim, imagine que uma pessoa receba em determinado mês o valor de R$ 3.000,00. Observe como calcular o Imposto de Renda que essa pessoa deverá pagar.

1. Calculamos o percentual correspondente conforme a faixa em que se encontra o salário:

$$15\% \text{ de R\$ } 3.000{,}00 = \text{R\$ } 450{,}00$$

2. Desse valor obtido, deduzimos (subtraímos) o valor indicado na terceira coluna:

$$\text{R\$ } 450{,}00 - \text{R\$ } 354{,}80 = \text{R\$ } 95{,}20$$

3. O valor obtido corresponderá ao imposto a ser pago:

$$\text{Imposto a pagar} = \text{R\$ } 95{,}20.$$

Conforme os dados dessa tabela, responda às questões a seguir.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir

1. Qual será o valor de imposto a ser pago se a pessoa receber a quantia de R$ 5.000,00 num mês? R$ 505,64
2. E se uma pessoa que receber a quantia de R$ 10.000,00? R$ 1.880,64
3. Duplicando-se o salário, duplica-se também o imposto a pagar? Justifique.
Não. Basta observar o imposto a pagar no item 1 e no item 2.

O cálculo que envolve porcentagem é utilizado cotidianamente pelas pessoas em momentos diversos, como você já deve ter observado. Ao longo do Ensino Fundamental, esse estudo aparece em várias situações. Vamos retomar e ampliar esse conhecimento.

Observe inicialmente as diferentes formas de escrever 15%.

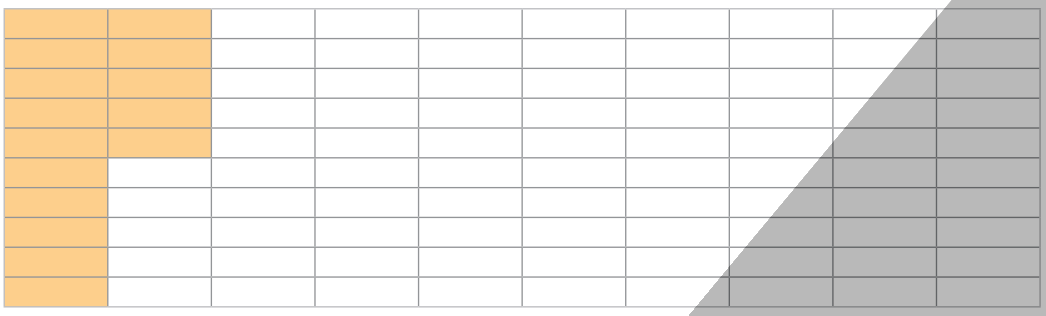
$$15\% = \frac{15}{100} = 0{,}15$$

$\frac{15}{100}$: forma fracionária

0,15: forma decimal

15%: porcentagem

Assim, quando falamos 15% de um valor, isso pode ser interpretado como "15 em cada 100 desse valor". Como evidencia a ilustração a seguir, 15% significa que são considerados 15 a cada 100.



Analise a seguir algumas situações que envolvem o cálculo com porcentagem.

Exemplo 1

Na tabela seguinte estão indicados os salários de duas profissionais em dois anos consecutivos, bem como os aumentos recebidos.

	Salários de profissionais em 2019 e 2020		
	2019	**2020**	**Aumento recebido**
Joana	R$ 2.000,00	R$ 2.400,00	R$ 400,00
Paula	R$ 3.000,00	R$ 3.480,00	R$ 480,00

Fonte: Dados fornecidos pela empresa de Joana e Paula.

O aumento de Paula em reais foi de R$ 480,00, enquanto o aumento de Joana foi de R$ 400,00. Podemos dizer que Paula teve em reais o maior aumento, porém, percentualmente (em valores relativos) Joana recebeu o maior aumento. Observe:

- Cálculo da razão entre o aumento recebido e o salário em 2019:

$$\text{Joana: } \frac{400}{2\,000} = \frac{20}{100} = 0{,}20 = 20\%$$

$$\frac{480}{3\,000} = \frac{16}{100} = 0{,}16 = 16\%$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Assim, Joana teve o maior aumento relativo.

Exemplo 2

Nesta semana constatou-se que 420 pessoas estavam inscritas no **Departamento Estadual de Trânsito (Detran)** de certo município para o exame necessário para a obtenção da Carteira Nacional de Habilitação (**CNH**). Sabe-se que normalmente a taxa de aprovação é em torno de 65%. Aproximadamente quantas dessas pessoas, segundo a taxa, serão aprovadas nesta semana?

- A taxa 65% significa que 65 pessoas em cada 100 serão aprovadas. Sendo x o valor procurado, temos a seguinte proporção:

$$\frac{65}{100} = \frac{x}{420}$$

$$100 \cdot x = 65 \cdot 420 \Rightarrow x = 273$$

- Calculando-se diretamente 65% de 420:

$$65\% \text{ de } 420 = \frac{65}{100} \cdot 420 = 0{,}65 \cdot 420 = 273$$

Portanto, espera-se que, mantendo-se a taxa de aprovação, cerca de 273 pessoas sejam aprovadas.

Para pensar e discutir

Orientações no Manual do Professor.

1. Como você calcularia 65% de 420 utilizando a tecla "%" de uma **calculadora** simples? Descreva os passos.
2. Sem utilizar a tecla "%", como você calcularia 65% de 420? Descreva os passos.

Para entender melhor as calculadoras e as planilhas eletrônicas, consulte o tópico **Recursos digitais** na **Caixa de Ferramentas**.

Frequentemente os jornais divulgam dados sobre a economia. Essas informações normalmente são apresentadas na forma de porcentagem e servem como base para reajustes e atualizações de valores diversos. São os chamados índices que "regem" a vida das pessoas. Entre esses índices estão:

INPC, IGPM, IPCA e PIB.

O **INPC** é o Índice Nacional de Preços ao Consumidor e representa um dos indicadores utilizados para acompanhar a evolução dos preços repassados aos consumidores em diversos setores da economia. Por exemplo, em fevereiro de 2020, o INPC acumulado dos últimos 12 meses era de 4,30%.

Para explorar

Esta é uma atividade para ser feita em grupo. Respostas no Manual do Professor.

1. Pesquisem os significados dos seguintes índices: IGPM, INPC e IPCA. Para cada um deles descrevam a finalidade de sua utilização.
2. Apresentem, em porcentagem, esses três índices relativos ao último mês.
3. Elaborem uma tabela em **planilha eletrônica** contendo esses três índices acumulados, mês a mês do último ano.
4. Em seguida, individualmente, cada um de vocês deve escrever um texto com base na comparação desses três índices acumulados, fazendo observações sobre suas finalidades.

Exemplo 3

Comentamos no início da unidade que, se a passagem de ônibus sobe R$ 3,50 para R$ 3,92, precisamos saber calcular qual foi o aumento percentual. Observe como podemos proceder:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

R$ 3,50 → **R$ 3,92**

Aumento de: **R$ 0,42**

Dizemos que aumentou R$ 0,42 em R$ 3,50. Assim, o aumento ocorreu sobre o valor R$ 3,50 (o todo, isto é, o 100%). Para saber qual foi a porcentagem do aumento podemos fazer a seguinte proporção:

Percentual	Valor
100%	R$ 3,50
x%	R$ 0,42

$$\frac{100}{x} = \frac{3,50}{0,42}$$

$$3,50x = 100 \cdot 0,42$$

$$x = \frac{100 \cdot 0,42}{3,50}$$

$$x = 100 \cdot \left(\frac{0,42}{3,50}\right)$$

Observe essa última igualdade: podemos dizer que basta dividir 0,42 por 3,50 e multiplicar o resultado por 100. A resposta indicará percentualmente de quanto foi o aumento, isto é, 12%.

Para pensar e discutir

1. E se no exemplo você simplesmente dividisse R$ 0,42 (o aumento) por R$ 3,50, qual número decimal você iria obter?
   Iria obter 0,12.
2. Como fica esse número decimal escrito na forma fracionária com numerador e denominador inteiros? E na forma percentual?
   Resposta esperada: 0,12 = 12/100=12%.

As pessoas que trabalham no comércio lidam diariamente com situações que envolvem a variação percentual. Utilizam a calculadora como ferramenta indispensável, sendo a tecla com o símbolo de porcentagem a mais empregada.

Para entender melhor os conceitos destacados, consulte o tópico **Algoritmos e fluxogramas** na **Caixa de ferramentas**.

E como fazemos para utilizar essa tecla na calculadora?

Essa pergunta pode ser feita por alguém que está iniciando o trabalho no comércio. Diante disso, vamos elaborar um **algoritmo** que possibilite, passo a passo, a utilização dessa função na calculadora.

Exemplo 4

Elaborar um algoritmo que calcule na calculadora o valor após um acréscimo de 7% sobre R$ 1.500,00 numa compra. Esse algoritmo deverá utilizar a tecla de porcentagem.

O algoritmo representa aqui as instruções de como proceder nesse cálculo.

1. Digite o valor [1] [5] [0] [0].
2. Aperte [×].
3. Digite [7].
4. Aperte [%].
5. Aperte [+].
6. Aperte [=].

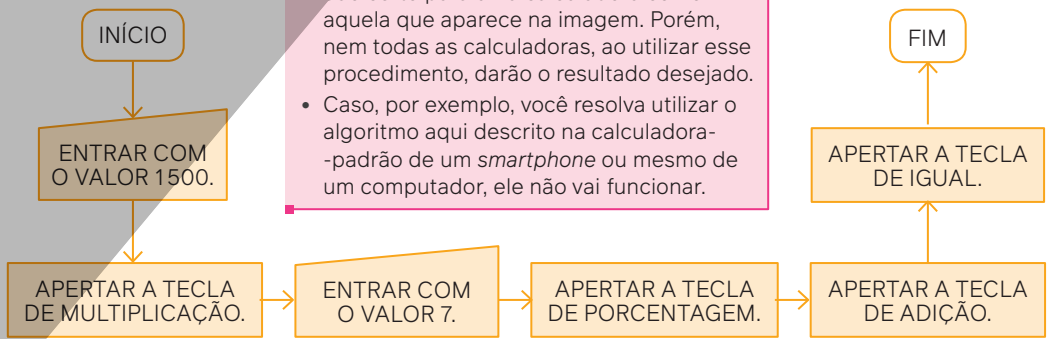
MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

No visor da calculadora deverá aparecer o valor 1605, isto é, o valor após o acréscimo de 7%.

Podemos também utilizar um **fluxograma** para representar esse algoritmo.

Atenção!

- O algoritmo e o fluxograma apresentados dão certo para uma calculadora como aquela que aparece na imagem. Porém, nem todas as calculadoras, ao utilizar esse procedimento, darão o resultado desejado.
- Caso, por exemplo, você resolva utilizar o algoritmo aqui descrito na calculadora-padrão de um *smartphone* ou mesmo de um computador, ele não vai funcionar.



Para explorar

Esta é uma atividade para ser feita em dupla.

1. Utilizando o algoritmo descrito anteriormente para o cálculo de 7% de R$ 1.500,00 na calculadora de um *smartphone*, qual resultado ele apresenta? 210
2. E na calculadora-padrão de um computador? 210
3. Elaborem um algoritmo que possibilite obter o resultado correto utilizando a tecla [%] na calculadora-padrão de um computador ou de um *smartphone*. Resposta no Manual do Professor.

Valentin Valkov/Shutterstock.com

Exemplo de calculadora-padrão de um *smartphone*.

Reinaldo Vignati

Exemplo de calculadora-padrão de um computador.

Assim como você obteve o valor após o acréscimo de 7% sobre R$ 1.500,00, você também poderia obter o valor após o desconto de 7%. Note que o algoritmo apresentado inicialmente mudaria muito pouco.

1. Digite o valor [1] [5] [0] [0].
2. Aperte [×].
3. Digite [7].
4. Aperte a tecla [%].
5. Aperte a tecla [−].
6. Aperte a tecla [=].

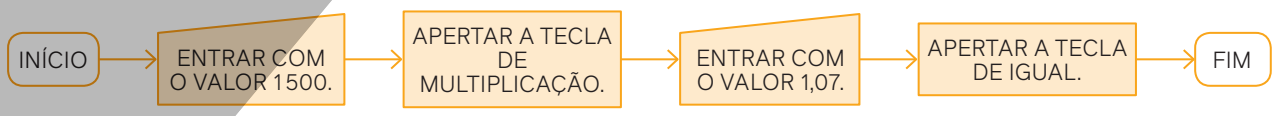
Também aqui você poderia obter esse algoritmo para a calculadora do *smartphone* ou a [illegible] computador. Deixamos para você elaborar. Orientações no Manual do Professor.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

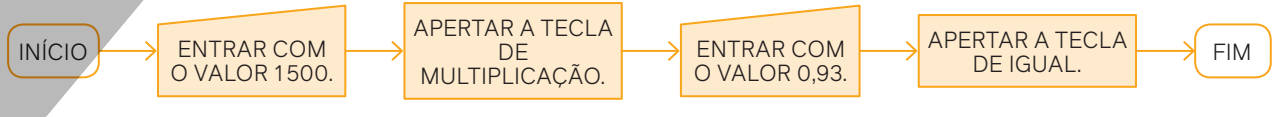
Observe que a tecla porcentagem, seria muito mais simples o procedimento para calcular tanto o novo valor com o acréscimo de 7% quanto o valor com o desconto de 7%:

- multiplicar um valor por 1,07 é o mesmo que calcular 107% desse valor, isto é, os 100% com o acréscimo de 7%;
- multiplicar um valor por 0,93 é o mesmo que calcular 93% desse valor, isto é, os 100% com o decréscimo de 7%.

Observe como ficaria o passo a passo na calculadora para obter o valor com o acréscimo de 7%:



E agora, o novo valor com o decréscimo de 7%:



Atividades

1. a) De 2016 para 2017. O aumento foi de R$ 57,00.
b) De 2016 para 2017. Aproximadamente 6,5%.

1. Observe a tabela abaixo, que apresenta os valores dos salários mínimos praticados no Brasil ao longo de alguns anos.

Ano	2016	2017	2018	2019	2020
Salário mínimo	R$ 880,00	R$ 937,00	R$ 954,00	R$ 998,00	R$ 1.045,00

Responda:

a) Entre dois anos consecutivos, qual período teve o maior aumento do salário mínimo em reais? Qual é esse valor?

b) Entre dois anos consecutivos, qual período teve o maior aumento relativo? Qual é esse percentual?

2. Calcule as seguintes razões com quatro casas decimais utilizando uma calculadora. Em seguida, expresse essas razões na forma de porcentagem.

a) $\frac{4}{5}$ = 80% **c)** $\frac{3}{20}$ = 15% **e)** $\frac{16}{5}$ = 320%

b) $\frac{5}{8}$ = 62,5% **d)** $\frac{125}{100}$ = 125% **f)** $\frac{4}{3}$ = 133,3%

3. Pedro tinha que calcular 17% de R$ 2.500,00. Observe o procedimento dele:

- calculou mentalmente 1% dividindo R$ 2.500,00 por 100: $\frac{2\,500}{100} = 25$
- multiplicou o resultado por 17, $17 \cdot 25 = 425$

Utilizando o procedimento de Pedro, calcule as seguintes porcentagens:

a) 32% de 4500 1440 **c)** 25% de 1000 250

b) 18% de [illegible] 200

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

4. Pesquise a alíquota do Imposto de Renda para recebimentos mensais. Em seguida, calcule o imposto de renda a ser pago por uma pessoa que recebe:

a) R$ 3.500,00; Orientações no Manual do Professor.

b) R$ 1.800,00;

c) R$ 9.000,00.

5. Responda:

a) Multiplicar determinado valor por 0,70 é o mesmo que calcular qual porcentagem desse valor? 70%

b) Multiplicar determinado valor por 1,12 é o mesmo que calcular qual porcentagem desse valor? 112%

6. Num país fictício, o Imposto de Renda (IR) é descontado dos salários mensalmente da seguinte forma.

- Salário de até $ 1.000,00 – O IR é igual a zero.
- Salário maior que $ 1.000,00 e menor ou igual a $ 3.000,00 – O IR é igual a 10% do salário.
- Salário maior que $ 3.000,00 – O IR é igual a 20% do salário.

Calcule o imposto de renda de quem ganha nesse país:

a) $ 990,00; Isento (zero).

b) $ 2.900,00; $ 290,00

c) $ 3.400,00. $ 680,00

7. (UFCE) Manuel compra 100 caixas de laranjas por R$ 2.000,00. Havendo um aumento de 25% no preço de cada caixa, quantas caixas ele poderá comprar com a mesma quantia? 80 caixas

8. Analise as afirmativas abaixo classificando-as em verdadeiro ou falso.

a) 12% de R$ 400,00 correspondem a R$ 4,80. F

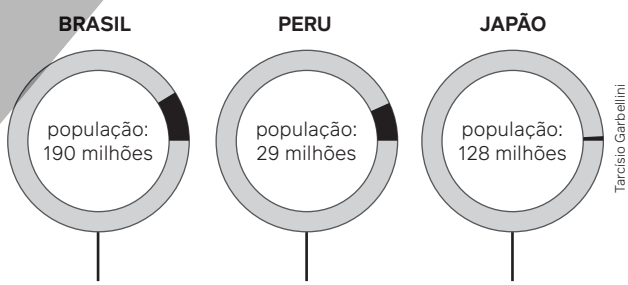
b) Obtém-se 40% de uma quantia multiplicando-a por 0,4. V

c) Três pessoas correspondem a 6% de um grupo de 50 pessoas. V

d) $\frac{2}{5} = 4\%$ F

e) Um preço X que sofre um desconto de 20% passa a ser $0{,}8 \cdot X$. V

9. (UFG-GO) Analise os gráficos a seguir.



SUPERINTERESSANTE, São Paulo, ed. 314, jan. 2013, p. 66. (Adaptado).

De acordo com os gráficos apresentados, o número de pessoas que: Alternativa **a**.

a) sabem ler e escrever no Brasil é maior que no Japão.

b) sabem ler e escrever no Peru é maior que no Brasil.

c) não sabem ler e escrever no Japão é maior que no Peru.

d) não sabem ler e escrever no Japão é maior que no Brasil.

e) não sabem ler e escrever no Peru é maior que no Brasil.

10. (Unicamp-SP) Para repor o teor de sódio no corpo humano, o indivíduo deve ingerir aproximadamente 500 mg de sódio por dia. Considere que determinado refrigerante de 350 mL contém 35 mg de sódio. Ingerindo-se 1 500 mL desse refrigerante em um dia, qual é a porcentagem de sódio consumida em relação às necessidades diárias?
Alternativa **d**.

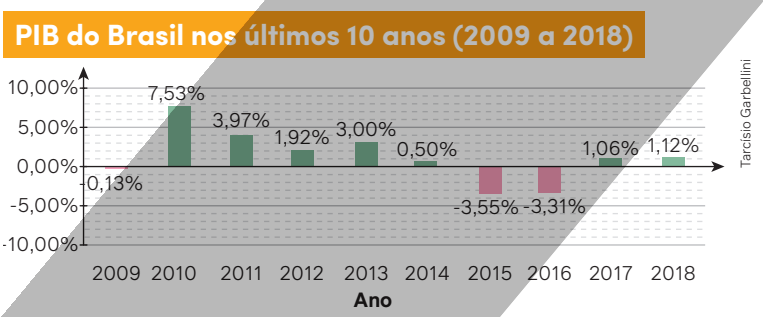
a) 45% **b)** 60% **c)** 15% **d)** 30%

11. (Uerj) Um trem transportava, em um de seus vagões, um número inicial n de passageiros. Ao parar em uma estação, 20% desses passageiros desembarcaram. Em seguida, entraram nesse vagão 20% da quantidade de passageiros que nele permaneceu após o desembarque. Dessa forma, o número final de passageiros no vagão corresponde a 120. Determine o valor de n. 125

12. As informações ao lado foram extraídas de um jornal tendo como fonte o IBGE. Analise os dados e faça o que se pede:

a) Explique o significado de PIB.
Produto Interno Bruto.

b) Escreva uma frase que resuma as informações a respeito do PIB brasileiro no período mencionado.
Resposta pessoal.



Tarcísio Garbellini

Fonte: IBGE. PIB do Brasil: histórico e evolução em gráficos. *In*: GAZETA DO POVO. [Curitiba], 29 abr. 2019. Disponível em: https://infograficos.gazetadopovo.com.br/economia/pib-do-brasil/. Acesso em: 5 maio 2020.

13. Elabore um algoritmo de como uma pessoa com uma calculadora simples, porém com a tecla % quebrada, poderá calcular: Respostas pessoais.

a) 32% de 400 reais; **b)** 112% de 400 reais.

Aumentos e descontos

O comércio de modo geral reflete a situação da economia de um país. Algumas vezes, devido ao baixo movimento do comércio, podemos ter momentos de recessão, em que encontramos lojas vazias, como na imagem abaixo. Isso ocorre pelo baixo poder de compra dos consumidores.

zhu difeng/Shutterstock.com

Os centros comerciais refletem o *status* econômico do país. Na imagem, é possível observar o corredor vazio de um *shopping center*. São Paulo (SP), 2020.

Nesses momentos é comum encontrarmos campanhas publicitárias acenando para bons **descontos**. São campanhas feitas para atrair o consumidor.

Existem outros momentos de euforia no comércio, por conta das datas comemorativas: Dia das Mães, Dia da Criança, Páscoa, Natal etc. Nessas datas também encontramos bons descontos.

Agora, há um cuidado a ser tomado por parte de todos os consumidores. Algumas vezes os descontos são ilusórios, pois perto dessas datas os valores são aumentados em relação aos preços praticados. Nas datas especiais, o que se vê é um desconto sobre o valor recém-aumentado.

Nesse sentido, é fundamental que você compreenda alguns aspectos dessa Matemática Comercial, observando os descontos e acréscimos, por exemplo, de uma compra, e sabendo calculá-los.

Vamos exemplificar!

Exemplo 1

Adriane comprou um computador pelo preço de R$ 1.800,00. Uma semana depois observou que, se tivesse esperado um pouco mais, conseguiria comprar o mesmo computador por um preço menor, pois a loja anunciou um desconto de 7% sobre R$ 1.800,00. Qual é o valor do computador com esse desconto?

Uma maneira de calcular é usar a proporção para descobrir inicialmente o valor do desconto:

Percentual	Valor
100%	R$ 1.800,00
7%	x

$$\frac{100}{7} = \frac{1800}{x} \Rightarrow 100x = 7 \cdot 1800 \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 1800}{100}$$

$$x = \frac{7}{100} \cdot 1800 = 0{,}07 \cdot 1800 \Rightarrow x = 126$$

Fazendo a diferença, podemos obter o valor do computador com o desconto de 7%:

$$1800 - 126 = 1674$$

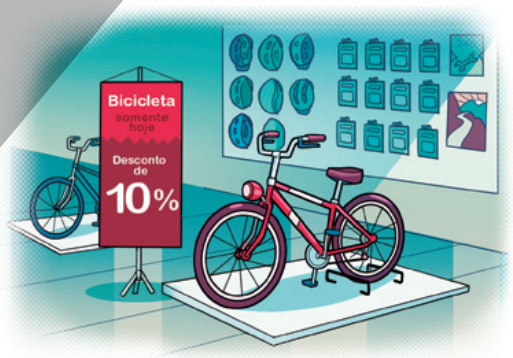
Portanto, o computador custa R$ 1.674,00 com o desconto.

Para pensar e discutir

1. Se o desconto é de 7%, qual percentual corresponde ao valor após o desconto em relação ao valor inicial? 93%
2. Por qual número decimal devemos multiplicar 1800 para obtermos o novo valor após o desconto de 7%? Basta multiplicar por 0,93.

Exemplo 2

Uma bicicleta estava anunciada pelo valor de R$ 300,00, mas o lojista aumentou esse valor em 15%. Uma semana depois, o lojista resolveu dar um desconto de 10% sobre o último preço.



Mauro Salgado

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir Orientações no Manual do Professor.

1. Qual era o valor da bicicleta após o aumento de 15%? Explique como calculou. R$ 345,00.
2. E qual é o valor da bicicleta após o desconto de 10%? Explique como calculou. R$ 310,50.
3. O que ocorreu com esse valor, após o desconto, em relação ao valor praticado na semana anterior antes do aumento? O valor aumentou em R$ 10,50. Houve um aumento de 3,5%.

Na situação apresentada, você teve de calcular um novo valor após o aumento de 15% e também um valor após um desconto de 10%. Observe que, quando aumentamos um valor em 15%, o novo valor passa a ser 115% do valor anteriormente praticado. Sendo assim, bastaria calcular 115% de R$ 300,00:

$$115\% \text{ de } 300 = \left(\frac{100}{100} + \frac{15}{100}\right) \cdot 300 = \frac{115}{100} \cdot 300 = 1{,}15 \cdot 300 = 345$$

Já quando há um desconto de 10%, o novo valor passa a ser 90% do valor anterior:

$$90\% \text{ de } 345 = \left(\frac{100}{100} - \frac{10}{100}\right) \cdot 345 = \frac{90}{100} \cdot 345 = 0{,}90 \cdot 345 = 310{,}5$$

Analise os exemplos a seguir que envolvem aumentos e descontos. Em cada um deles, verifique se você resolveria a situação de uma forma diferente daquela que foi apresentada.

Exemplo 3

Ana comprou um carro por R$ 25.000,00 e, após 1 ano de uso, anunciou a venda com um desconto de 10%. Entretanto, passado algum tempo sem conseguir vender, anunciou um novo desconto de 5% sobre o último valor. Por quanto Ana está vendendo seu carro?

- Cálculo do valor do carro após um desconto de 10% (o carro valerá 90% do valor):

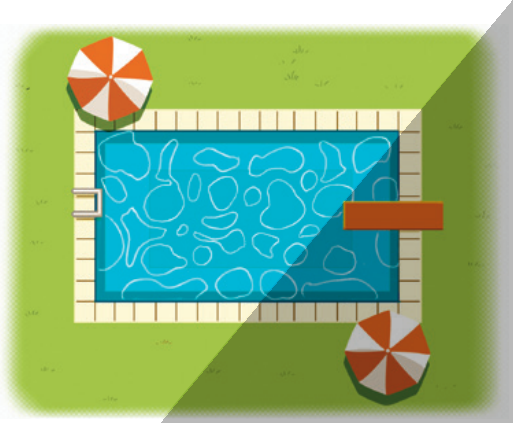
$$90\% \text{ de } 25.000{,}00 = 0{,}90 \cdot 25.000{,}00 = 22.500{,}00 \Rightarrow \text{R\$ } 22.500{,}00$$

- Cálculo do novo valor após um desconto de 5% (o carro valerá 95% do valor anterior):

$$95\% \text{ de } 22.500{,}00 = 0{,}95 \cdot 22.500{,}00 = 21.375{,}00 \Rightarrow \text{R\$ } 21.375{,}00$$

Para pensar e discutir

1. Dois descontos sucessivos de 10% e de 5% correspondem a um único desconto de 15%? Não.
2. Qual será o valor do carro de Ana após um desconto de 15% em relação ao valor R$ 25.000,00? R$ 21.250,00
3. Dois descontos sucessivos de 10% e de 5% correspondem a um só desconto de quantos por cento? Explique.
Um desconto de 14,5%. Orientações no Manual do Professor.



Mauro Salgado

Exemplo 4

O desenho ao lado representa o projeto inicial de uma piscina que deverá ser construída em um terreno de uma casa. Nesse projeto, a piscina terá 8 m de comprimento por 4 m de largura. Antes de construir, o proprietário decidiu ampliar em 3 m o comprimento e em 1 m a largura. Qual será o aumento percentual da área da piscina em relação ao projeto inicial?

Uma maneira é calcularmos a área inicial, a área final e verificarmos quanto de área aumentará:

Área inicial:

$$A_{inicial} = (8 \text{ m}) \cdot (4 \text{ m}) = 32 \text{ m}^2$$

Área final:

$$A_{final} = (8 \text{ m} + 3 \text{ m}) \cdot (4 \text{ m} + 1 \text{ m}) = (11 \text{ m}) \cdot (5 \text{ m}) = 55 \text{ m}^2$$

Aumento:

$$A_{final} - A_{inicial} = 55 \text{ m}^2 - 32 \text{ m}^2 = 23 \text{ m}^2$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para saber quanto percentualmente será o aumento, calculamos o que a área de 23 m² representa em relação à área de 32 m²:

$$p = \frac{23 \text{ m}^2}{32 \text{ m}^2} = \frac{23}{32} = 0{,}71875 \cong 0{,}72 = 72\%$$

Portanto, haverá um aumento de aproximadamente 72% na área da piscina.

Para pensar e discutir

1. De quantos por cento é o aumento no comprimento da piscina? Aumento de 37,5%.
2. E na largura da piscina? Aumento de 25%.
3. Com base nesses percentuais, como você poderá calcular o aumento percentual na área da piscina?
Resposta pessoal.

No exemplo da piscina tivemos de fazer um cálculo para determinarmos em quantos por cento aumentaria a área da piscina. Na Matemática Comercial, esse percentual calculado é conhecido como variação percentual.

Se uma grandeza tem o valor inicial V_i (numa data inicial) e o valor final V_f (numa data futura), chamamos de **variação percentual *p*** dessa grandeza o seguinte quociente:

$$p = \frac{V_f - V_i}{V_i}$$

Observações

1. p é a variação percentual dessa grandeza no período considerado, expressa na forma decimal.
2. Se $p > 0$, dizemos que p representa a taxa percentual de crescimento (ou acréscimo) da grandeza.
3. Se $p < 0$, dizemos que p representa a taxa percentual de decrescimento (ou decréscimo) da grandeza.

Retomando a situação apresentada no exemplo anterior, podemos calcular a variação percentual da área da piscina com o aumento das medidas de comprimento e largura:

$$p = \frac{V_f - V_i}{V_i}$$

$$p = \frac{55 - 32}{32} = \frac{23}{32} = 0{,}71875 = 71{,}875\%$$

Também podemos retomar a questão apresentada no início da unidade sobre o PIB brasileiro:

Para retomar

O **PIB** do Brasil em 2017 foi de 6,6 trilhões de reais.
O **PIB** do Brasil em 2018 foi de 6,9 trilhões de reais.

Qual foi a variação do PIB do Brasil de 2017 para 2018?

- Considerando o PIB de 2017 como valor inicial e o PIB de 2018 como valor final, temos a variação percentual do PIB nesse período dada por:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

V_{2018}, V_{2017}, V_{2017}

$$p = \frac{6{,}9 \text{ trilhões} - 6{,}6 \text{ trilhões}}{6{,}6 \text{ trilhões}}$$

$$p = \frac{6{,}9 - 6{,}6}{6{,}6} = \frac{0{,}3}{6{,}6} \cong 0{,}045 = 4{,}5\%$$

Houve um aumento de 4,5% aproximadamente no PIB do Brasil no período de 2017 para 2018.

Para pensar e discutir

1. Quando multiplicamos uma grandeza X por $(1 + 0{,}07)$, essa grandeza está sendo aumentada em quantos por cento? Estamos aumentando em 7%.
2. Quando multiplicamos uma grandeza X por $(1 - 0{,}07)$, essa grandeza está sendo diminuída em quantos por cento? Estamos diminuindo em 7%.
3. Se i indica um percentual, qual é o significado de multiplicar uma grandeza X por $(1 + i)$? E por $(1 - i)$?

3. Multiplicando uma grandeza por $(1 + i)$, aumenta a grandeza em i por cento. Multiplicando uma grandeza por $(1 - i)$, diminui a grandeza em i por cento.

Atividades

7. No item **a**, basta multiplicar 400 000 por 1,04. No item **b**, basta multiplicar 400 000 por 0,96.

1. Em uma livraria foi feito o lançamento de um livro de Educação Financeira. Observe o cartaz colocado na vitrine da livraria:

Mauro Salgado

Qual desconto percentual está anunciado nessa promoção? 32%

2. Um vendedor de carros informou ao seu cliente que aquele tipo de carro zero que ele estava comprando por R$ 45.000,00 chega a desvalorizar aproximadamente 15% após o primeiro ano de uso. Assim, qual será o valor desse carro após um ano de uso? R$ 38.250,00

3. Numa promoção do tipo "Pague 3 e leve 4", qual desconto é oferecido sobre cada unidade do produto vendida? 25%

4. Utilize uma calculadora para responder:

a) Dois aumentos consecutivos de 5% e de 2% sobre determinado valor é o mesmo que um aumento de quantos por cento? 7,1%

b) Dois descontos consecutivos de 5% e de 2% sobre determinado valor é o mesmo que um desconto de quantos por cento? 6,9%

5. Calcule e escreva na forma decimal em função de V:

a) Quanto vale 20% de 40% de determinado valor V? $0{,}08V$

b) Quanto vale 15% de 30% de determinado valor V? $0{,}045V$

6. O lucro de uma empresa no ano de 2020 foi de R$ 400.000,00.

a) Qual será o lucro dessa empresa no ano de 2021 havendo um crescimento de 4% em relação a 2020? R$ 416.000,00

b) Qual será o lucro dessa empresa no ano de 2021 havendo um decrescimento de 4% ao lucro de 2020? R$ 384.000,00

7. Os dois lucros da atividade anterior podem ser obtidos com o uso de calculadora utilizando em cada caso apenas uma multiplicação. Explique.

8. Luana comprou no início de 2018 um carro pelo valor de R$ 32.000,00. No início de 2019 esse carro sofreu uma desvalorização de 15% em relação ao valor de 2018 e no início de 2020 outra valorização de 9% em relação ao início de 2019. Então:

a) Qual era o valor do carro no início de 2020? R$ 24.752,00

b) Do início de 2018 ao início de 2020, a desvalorização do carro foi de quantos por cento? 22,65%

9. (Uespi) Maria comprou uma blusa e uma saia em uma promoção. Ao término da promoção, o preço da blusa aumentou 30%, e o da saia, 20%. Se comprasse as duas peças pelo novo preço, pagaria no total 24% a mais. Quanto mais caro foi o preço da saia em relação ao preço da blusa? Alternativa **e**.

a) 42% **c)** 46% **e)** 50%

b) 44% **d)** 48%

10. (Ufal) Dois eletrodomésticos foram comprados por um total de R$ 3.500,00. Se um desconto de 10% fosse dado no preço do primeiro eletrodoméstico e um desconto de 8% fosse dado no preço do segundo, o preço total dos eletrodomésticos seria de R$ 3.170,00. Quanto se pagou pelo primeiro eletrodoméstico?

a) R$ 2.400,00 **d)** R$ 2.650,00

b) R$ 2.500,00 **e)** R$ 2.700,00

c) R$ 2.600,00

Alternativa **b**.

11. (IFCE) João gastava mensalmente 10% do seu salário com o plano de saúde da família. Um aumento de 15% no preço desse serviço proporcionou um acréscimo de R$ 120,00 em suas despesas mensais. O salário de João, em reais, é: Alternativa **e**.

a) 12 500. **c)** 10 000. **e)** 8 000.

b) 10 850. **d)** 8 250.

12. Esta é uma atividade para você fazer em dupla com um colega. Resposta pessoal.

- Pesquisem em *sites* de busca o PIB do seu estado e o PIB do Brasil nos anos 2010 e 2020.
- Calculem a variação percentual do PIB do estado e a variação percentual do PIB do Brasil nesse período.
- Elaborem um gráfico ou uma tabela com o auxílio de planilhas eletrônicas contendo os dados de sua pesquisa.
- Escrevam um pequeno texto analisando o PIB do estado nesse período e depois fazendo a comparação com o PIB do Brasil no mesmo período.

13. (Vunesp) Se a taxa de inflação de janeiro é de 6% e a de fevereiro é de 5%, então a taxa de inflação no bimestre janeiro/fevereiro é de: Alternativa **d**.

a) 11%. **c)** 11,2%. **e)** 11,4%.

b) 11,1%. **d)** 11,3%.

14. Elabore uma situação similar à questão anterior alterando o percentual. Apresente a situação para que um colega a resolva. Resposta pessoal.

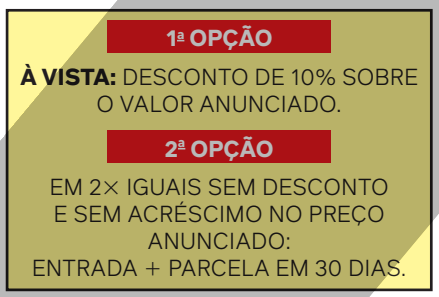
MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Matemática Financeira

2

A compra de uma casa, a aquisição de um aparelho celular, a venda de um terreno, a tomada de decisão de fazer um financiamento numa instituição financeira, o planejamento das finanças ao longo do tempo e o pagamento da multa pelo atraso na quitação da conta de energia são alguns exemplos de situações relacionadas ao estudo de Matemática Financeira.

Considere, por exemplo, que você irá comprar um aparelho de TV e na loja escolhida para essa compra ele está anunciado pelo valor de R$ 1.000,00, mas em duas condições, como mostra a imagem ao lado.



DAE

Para pensar e discutir

1. Qual opção você escolheria?
2. Escolhendo a segunda opção você pagará juros de quantos por cento?

A situação apresentada exige uma tomada de decisão que leva em conta aspectos relacionados ao conhecimento do que vem a ser juros. Voltaremos a ela ainda nesta unidade.

Ao iniciar a presente unidade falamos brevemente sobre uma necessidade cada vez maior de levarmos em conta as questões voltadas à **Educação Financeira**. Nesse sentido, propomos inicialmente a leitura do texto a seguir, que sugerimos ser feita em duplas.

1. Resposta pessoal.

2. Vamos retomar essa situação ainda nesta unidade. Aqui a discussão será muito interessante, além de contribuir bastante para a reflexão dos estudantes quando estiverem diante de uma tomada de decisão que envolva questões financeiras. Aproveite essa discussão para perguntar se sabem o significado de juros. Ainda nesta unidade falaremos de juros simples e juros compostos.

Conheça a importância da educação financeira para jovens

No Brasil, a educação financeira ainda é um assunto pouco debatido, tanto no âmbito das escolas quanto no próprio contexto familiar. Entretanto, muito embora uma discussão aberta a respeito do tema ainda não seja tão comum, esse é um assunto extremamente importante.

Você deve estar se perguntando: "mas, afinal, o que é educação financeira e por que ela é tão importante?".

Educação financeira é todo o processo que envolve o desenvolvimento de uma compreensão a respeito da relação do dinheiro. Ou seja, trata-se do domínio e do conhecimento acerca do dinheiro e da melhor postura a ser adotada quando o assunto é a gestão econômica pessoal.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

A má educação financeira costuma se refletir na dificuldade de controle do dinheiro, no excesso de dívidas e no consumo exagerado e desnecessário. Ninguém deseja isso nem para si e muito menos para os próprios filhos, não é mesmo?

Por isso, educar os jovens desde cedo é de extrema importância para melhorar as suas perspectivas, possibilitando um futuro mais confortável e seguro. Confira a seguir os principais benefícios da educação financeira para os jovens:

Prepara o jovem para o futuro

Investir em educação financeira permite vislumbrar um cenário além do presente, construindo um conhecimento que será útil para toda a vida adulta. Dessa forma, o conhecimento ajuda a preparar o jovem para o seu futuro, entendendo qual deve ser a sua relação com o dinheiro e quais serão as melhores formas de se planejar para usá-lo de maneira inteligente e promissora.

Assim como toda educação, o conhecimento adquirido será empregado durante toda a vida adulta.

Fortalece a capacidade de autoconhecimento

Outro benefício da educação financeira para os jovens é que ela permite o fortalecimento da capacidade de autoconhecimento. Ao lidar com dinheiro o jovem começa a compreender quais são os seus hábitos de consumo e de que forma eles refletem em suas finanças e até mesmo em sua vida pessoal.

Dessa forma, ele tem maiores condições de se planejar e de estipular estratégias que possam ajudá-lo a evitar problemas financeiros, levando em consideração as suas necessidades e suas características individuais.

Desenvolve a autonomia

Os jovens que têm acesso à educação financeira apresentam maior autonomia para lidar com o seu dinheiro. Isso significa que eles têm condições maiores de "se virar" quando o assunto é planejamento, consumo e investimentos.

A autonomia é extremamente importante na formação de indivíduos responsáveis e independentes.

Estimula a Responsabilidade Social

Essencialmente, a responsabilidade social está vinculada à formação de comportamentos, ações e posturas que promovam o bem-estar de um conjunto de pessoas.

Ainda, a orientação financeira está diretamente relacionada à responsabilidade social, uma vez que a gestão econômica é um fator que afeta diretamente o bem-estar de grupos sociais.

Nesse sentido, o estímulo à educação também é um estímulo ao desenvolvimento da responsabilidade social.

A educação financeira pode ser estimulada em diversas frentes, e hoje existem diversos canais que podem ajudar no desenvolvimento de comportamentos sustentáveis por parte dos jovens.

Além disso, a tecnologia é uma grande aliada do assunto, já que hoje é possível contar com diversos aplicativos de controle financeiro que surgiram com o escopo de facilitar a vida das pessoas e auxiliar na gestão financeira pessoal e familiar.

Foi possível entender como a educação financeira é importante para o futuro dos jovens, não é mesmo? É importante para eles ter um controle e uma boa relação com o dinheiro, a fim de garantir uma vida mais confortável e segura no futuro.

CONHEÇA a importância da [...]. *In*: A ESCOLHA CERTA. [*S. l*: *s. n.*], 26 jun. 2018. Disponível em: http://www.aescolhacerta.com.br/conheca-a-importancia-da-educacao-financeira-para-jovens/. Acesso em: 5 maio 2020.

Após a leitura desse artigo, apresente por meio de um pequeno texto um exemplo de sua vida cotidiana que represente:

a) uma situação de má educação financeira;

b) uma situação de boa educação financeira.

Respostas pessoais.

Juros simples

Ao solicitar um empréstimo numa instituição financeira você deverá ter em mente que, além da quantia emprestada, deverá pagar outra, denominada **juros**. O termo juros é bem co[illegible] além da situação de empréstimo, existem outras bem corriqueiras em [illegible] Veja a seguir.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- Se você pagar uma conta de energia elétrica fora de prazo de vencimento, além do valor indicado a ser pago no dia de vencimento, são cobrados multa e juros pelo pagamento em atraso.

Banca Bacana S/A	5000 - 7	5000-7.341254.66691.0122365.5400.409070.7000000					
AGÊNCIA RECEBEDORA Pagável em qualquer agência bancária até a data do vencimento.						VENCIMENTO 01/12/2020	
CEDENTE BANCO BACANA S/A						CÓDIGO DO CEDENTE 5000-7 1234567890	
Documento 25/11/2011	Nº do documento 000123000	Espécie FAT	Aceite N	Processamento 25/11/2011		Nosso n.º 06/0769610257	
USO BANCO	CIP 000	CARTEIRA 06	ESPÉCIE R$	QUANTIDADE 06	VALOR 1.215,00	(*) VALOR DO DOCUMENTO R$ 1.215,00	
INSTRUÇÕES (TEXTO DE RESPONSABILIDADE DO CEDENTE)						(*) OUTROS ACRÉSCIMOS	
APÓS O VENCIMENTO COBRAR MULTA DE 2% MAIS JUROS MORATÓRIOS DE 0.05% AO DIA NÃO RECEBER APÓS 30 DIAS DO VENCIMENTO							
Sacado EMPRESTANDO FELIZ R-VOLTE SEMPRE, 100 - B. RICO S.P.						(*) TOTAL COBRADO	

Tarcísio Garbellini

- Se você deixar uma quantia aplicada durante certo período num banco, seu saldo será acrescido de uma quantia que nada mais é do que os juros.
- Se você está com saldo negativo no banco durante certo período, a instituição financeira cobrará juros, pois "emprestou" dinheiro a você.

Observe ao lado, como exemplo, um boleto fictício de cobrança.

Identifique nesse boleto as seguintes informações: data de vencimento, valor do documento e instruções sobre pagamentos após o vencimento.

Para pensar e discutir Orientações no Manual do Professor.

1. Qual o valor a ser pago pelo sacado se ele pagar em 02/12/2020? Quais serão os valores da multa e dos juros?
2. E se ele pagar com 28 dias de atraso, quais serão a multa, os juros pelo atraso e o valor total a pagar?

Aqui abordaremos o cálculo de juros simples e, logo a seguir, de juros compostos. Nos dois casos utilizaremos algumas denominações da Matemática Financeira com as quais você precisa se familiarizar:

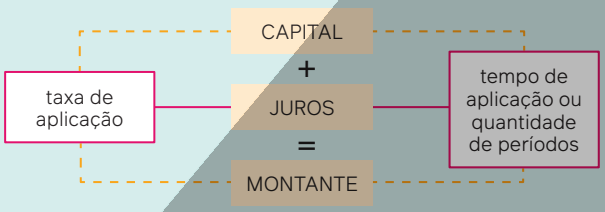
C → CAPITAL: é o valor inicial de um empréstimo, de uma dívida ou de um investimento.

i → TAXA DE JUROS: é a taxa expressa em forma percentual por período. Exemplos: 5% a.a. (5% ao ano); 3% a.m. (3% ao mês).

J → JUROS: é o valor obtido quando aplicamos a taxa sobre o capital no período considerado.

n → TEMPO: quantidade de períodos em que o capital é aplicado.

M → MONTANTE: é o valor correspondente ao capital acrescido dos juros auferidos: $M = C + J$.



Na modalidade de juros simples, o percentual é calculado apenas sobre o valor inicial, isto é, sobre o capital inicial.

Observação

A taxa e a quantidade de períodos de aplicação devem ser expressos na mesma unidade de tempo, ou seja, se o tempo for expresso em anos, a taxa deverá ser em % ao ano (% a.a.); se o tempo for expresso em meses, a taxa deverá ser % ao mês (% a.m.) etc.

Analise a seguir duas situações relacionadas a juros simples!

Exemplo 1

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Considere que você emprestou R$ 10.000,00 de um amigo a uma taxa fixa de 1% na modalidade juros simples, isto é, a cada mês será cobrado 1% sobre o valor R$ 10.000,00. Esse empréstimo será totalmente pago ao final de 5 meses.

No quadro a seguir vamos observar mês a mês os juros e os montantes correspondentes.

Período	Cálculo dos juros	Juros	Montante
1º mês	0,01 · R$ 10.000,00	**R$ 100,00**	**R$ 10.100,00**
2º mês	0,01 · R$ 10.000,00	**R$ 100,00**	**R$ 10.200,00**
3º mês	0,01 · R$ 10.000,00	**R$ 100,00**	**R$ 10.300,00**
4º mês	0,01 · R$ 10.000,00	**R$ 100,00**	**R$ 10.400,00**
5º mês	0,01 · R$ 10.000,00	**R$ 100,00**	**R$ 10.500,00**

Para pensar e discutir

1. Os juros foram calculados, mês a mês, sobre qual valor? R$ 10.000,00
2. Como se dá o crescimento mês a mês do montante? Resposta no Manual do Professor.

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Simule dois empréstimos de um mesmo valor. Um desses empréstimos foi tomado de uma pessoa A com uma taxa mensal fixa de juros simples de 1,2% durante 10 meses. O segundo empréstimo foi tomado de uma pessoa B com taxa fixa mensal de juros simples de 1,1% durante 12 meses. Depois, faça o que se pede:

1. Elabore uma tabela com o auxílio de planilha eletrônica exibindo, mês a mês, os juros e os montantes correspondentes de cada um dos empréstimos.
2. Apresente essa planilha impressa para um colega conferir.
3. Responda: Qual dos dois empréstimos você tomaria tendo apenas como base o fato de que deseja pagar a menor quantia total de juros?
4. Elabore um pequeno texto comentando como calcular o montante de uma aplicação a juros simples e como se dá o crescimento desse montante mês a mês.

Exemplo 2

Um capital de R$ 8.000,00, aplicado a uma taxa de juros simples de 7% ao ano, resultou num montante de R$ 13.040,00 ao final de alguns anos. Determine a quantidade de anos.

- Cálculo dos juros correspondentes:

$$M = C + J$$

$$13040 = 8000 + J \Rightarrow J = 5040$$

- Cálculo dos juros por ano:

$$0{,}07 \cdot 8000 = 560$$

- Quantidade de períodos de aplicação (anos de aplicação):

$$n \cdot 560 = 5040$$

$$n = \frac{5040}{560} \Rightarrow n = 9$$

Portanto, a aplicação foi feita por 9 anos.

Vamos agora generalizar esse tipo de situação envolvendo o cálculo do montante de uma aplicação na modalidade de juros simples. Veja a seguir.

Consideremos um **capital *C***, aplicado a **juros simples** à **taxa de *i*** por período (*i* expresso na forma decimal), durante ***n* períodos**. Vamos calcular o montante correspondente.

- Cálculo dos juros ao longo dos períodos:

1 período: $J_1 = i \cdot C$

2 períodos: $J_2 = (i \cdot C) \cdot 2 = 2iC$

3 períodos: $J_3 = (i \cdot C) \cdot 3 = 3iC$

4 períodos: $J_4 = (i \cdot C) \cdot 4 = 4iC$

⋮

n períodos: $J_n = (i \cdot C) \cdot n = niC$

- Cálculo do montante ao final de n períodos:

$$M_n = C + J_n$$

$$M_n = C + niC \Rightarrow M_n = C \cdot (1 + ni)$$

O montante M gerado por um capital C que foi aplicado na modalidade de juros simples durante n períodos a uma taxa fixa i é dado por

$$\boldsymbol{M_n = C \cdot (1 + n \cdot i)},$$

em que i e n são expressos na mesma unidade de tempo.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir

Respostas no Manual do Professor.

1. Na modalidade juros simples, qual é o resultado de $\frac{J}{n}$, sendo J os juros e n o número de períodos de aplicação?
2. Triplicando a quantidade de períodos de aplicação em juros simples, o que ocorre com os juros?

Juros simples e funções

Vamos analisar agora uma situação de empréstimo a juros simples!

Exemplo

Um empréstimo no valor de R$ 20.000,00 foi feito entre duas pessoas, na modalidade de juros simples, a uma taxa fixa mensal de 1,5%. Vamos obter duas relações matemáticas: juros em função do número n de meses de empréstimo; montante em função do número n de meses de empréstimo.

- Cálculo dos juros J em função do número n de meses:

$J = n \cdot i \cdot C$

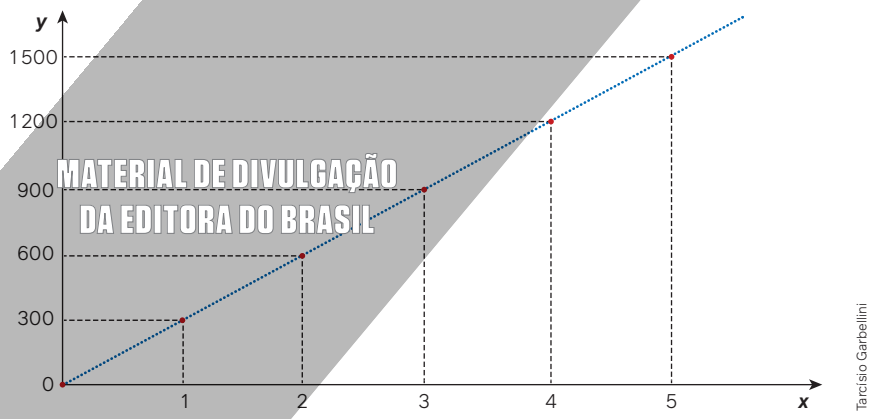
$J = n \cdot 0{,}015 \cdot 20000$

$J = 300n$

juros em função do número de meses de aplicação

- Observe que $J = f(n) = 300n$ é uma função, sendo n um número natural que indica o número de meses. Assim, atribuindo valores a n podemos calcular os juros correspondentes. Veja ao lado.
- Ao representar esses valores num plano cartesiano, observaremos que os pontos correspondentes estarão alinhados, pois estamos diante de uma função conhecida como função linear. Note que, como n é natural, o **gráfico** é constituído de pontos isolados.

n	$J = f(n) = 300n$
0	$J = f(0) = 300 \cdot 0 = 0$
1	$J = f(1) = 300 \cdot 1 = 300$
2	$J = f(2) = 300 \cdot 2 = 600$
3	$J = f(3) = 300 \cdot 3 = 900$
4	$J = f(4) = 300 \cdot 4 = 1200$
5	$J = f(5) = 300 \cdot 5 = 1500$



Tarcísio Garbellini

Para saber mais sobre a representação gráfica de uma função, consulte o tópico **A linguagem das funções** na **Caixa de ferramentas**.

Toda função da forma $y = f(x) = ax$, com a diferente de zero, é dita **função linear**. Se o domínio dessa função é real, o gráfico é uma reta que passa pela origem. Uma função linear é um caso particular de uma função afim da forma $y = f(x) = ax + b$.

Para pensar e discutir

1. Qual é a taxa de crescimento da função afim correspondente? 300
2. As grandezas J e n representadas no gráfico são diretamente proporcionais. Qual é a constante de proporcionalidade? 300

É importante que os estudantes observem que, mesmo havendo um crescimento constante de R$ 300,00 mês a mês e mesmo que os pontos no gráfico estejam alinhados, as grandezas montante e número de meses não são diretamente proporcionais. Caso tenham dúvidas, pergunte: Duplicando o número de meses, o montante também duplica?

n	$M = f(n) = 20000 + 300n$
0	$M = f(0) = 20000 + 300 \cdot 0 = 20000$
1	$M = f(1) = 20000 + 300 \cdot 1 = 20300$
2	$M = f(2) = 20000 + 300 \cdot 2 = 20600$
3	$M = f(3) = 20000 + 300 \cdot 3 = 20900$
4	$M = f(4) = 20000 + 300 \cdot 4 = 21200$
5	$M = f(5) = 20000 + 300 \cdot 5 = 21500$

- Vamos obter o montante M em função do número de meses n:

$M = C + J$

$M = 20000 + 300n$

montante em função do número de meses de aplicação

- Observe que $M = f(n) = 20000 + 300n$ é uma função afim, sendo n um número natural que indica o número de meses. Assim, atribuindo valores a n, podemos calcular os montantes correspondentes. Veja ao lado.

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Analise o quadro anterior para os valores dos montantes M em função do número de meses n e faça o que se pede a seguir.

1. Represente numa folha de papel o plano cartesiano e nele esboce o gráfico de M em função de n.
2. Com base no quadro e no gráfico, elabore um texto explicando como os montantes variam em função do número de meses. Comente a taxa de crescimento da função e analise se as grandezas montante e número de meses são diretamente proporcionais.

Atividades

1. Marcos emprestou R$ 32.000,00 ao seu irmão. Ao final de 1 ano descobriu que a rentabilidade anual foi de 4,6%. Calcule:
   a) os juros que ele recebeu; R$ 1.472,00
   b) o montante correspondente após 1 ano. R$ 33.472,00
2. Laura aplicou R$ 24.000,00 em determinado fundo de investimento e recebeu, 1 ano depois, o montante de R$ 26.500,00. Qual foi a taxa anual recebida? 10,42%
3. Um investidor comprou um terreno em um bairro residencial. Após 4 anos, vendeu esse terreno pelo dobro do valor da compra. Qual foi a taxa percentual de valorização desse terreno nesse período? 100%
4. Um capital C aplicado a juros simples e à taxa de 8% ao ano irá triplicar em quanto tempo? Em 25 anos.
5. Em quantos meses determinado capital aplicado à taxa de 0,8% ao mês na modalidade de juros simples irá duplicar? Em 125 meses.
6. Considere que a quantia de R$ 8.000,00 seja aplicada à taxa de 10% ao ano na modalidade juros simples.
   a) Escreva a lei de formação da função $J = f(n)$, juros em função do número n de anos, correspondente.
   b) Esboce no plano cartesiano o comportamento gráfico dessa função. Orientações no Manual do Professor.
   c) Escreva a lei de formação da função $M = f(n)$, montante em função do número de anos, correspondente. $M = f(n) = 8000 + 800n$
   d) Esboce no plano cartesiano o comportamento gráfico dessa função. Orientações no Manual do Professor.

   6. a) $J = f(n) = 800n$
7. (UFT-TO) Uma pessoa vai a uma loja comprar um aparelho celular e encontra o aparelho que deseja adquirir com duas opções de compra: à vista com 10% de desconto; ou em duas parcelas iguais e sem desconto, sendo a primeira parcela no ato da compra e a outra um mês após.
   Com base nos dados de oferta deste aparelho celular, pode-se afirmar que a loja trabalha com uma taxa mensal de juros de: Alternativa **e**.
   a) 0%. **c)** 5%. **e)** 25%.
   b) 1%. **d)** 10%.
8. (FGV-RJ) Sandra fez uma aplicação financeira, comprando um título público que lhe proporcionou, após um ano, um montante de R$ 10.000,00. A taxa de juros da aplicação foi de 10% ao ano. Podemos concluir que o juro auferido na aplicação foi: Alternativa **d**.
   a) R$ 1.000,00. **c)** R$ 900,00. **e)** R$ 800,00.
   b) R$ 1.009,09. **d)** R$ 909,09.
9. (Fuvest) Há um ano, Bruno comprou uma casa por R$ 50.000,00. Para isso, tomou emprestados R$ 10.000,00 de Edson e R$ 10.000,00 de Carlos, prometendo devolver-lhes o dinheiro, após um ano, acrescido de 5% e de 4% de juros, respectivamente. A casa valorizou 3% durante este período de um ano.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

Sabendo-se que Bruno vendeu a casa hoje e pagou o combinado a Edson e Carlos, o seu lucro foi de:

a) R$ 400,00. **c)** R$ 600,00. **e)** R$ 800,00.

b) R$ 500,00. **d)** R$ 700,00. Alternativa **c**.

10. (PUC-RJ) Um imóvel em São Paulo foi comprado por x reais, valorizou 10% e foi vendido por R$ 495.000,00. Um imóvel em Porto Alegre foi comprado por y reais, desvalorizou 10% e também foi vendido por R$ 495.000,00. Os valores de x e y são:

a) $x = 445\,500$ e $y = 544\,500$.

b) $x = 450\,000$ e $y = 550\,000$. Alternativa **b**.

c) $x = 450\,000$ e $y = 540\,000$.

d) $x = 445\,500$ e $y = 550\,000$.

e) $x = 450\,000$ e $y = 544\,500$.

11. (UFPE) Para comprar um carro, que tem preço à vista de R$ 20.000,00, Júnior optou por um plano de pagamento que consiste de uma entrada no valor de R$ 2.000,00, e o restante, depois de aplicados juros simples de 10% ao ano durante 3 anos, divididos em 36 parcelas iguais. Qual o valor da parcela?

a) R$ 610,00 **c)** R$ 630,00 **e)** R$ 650,00

b) R$ 620,00 **d)** R$ 640,00 Alternativa **e**.

12. (UFCE) José emprestou R$ 500,00 a João por 5 meses, no sistema de juros simples, a uma taxa de juros fixa e mensal. Se no final dos 5 meses José recebeu um total de R$ 600,00, então a taxa fixa mensal aplicada foi de:

a) 0,2%. **c)** 2%. **e)** 6%.

b) 0,4%. **d)** 4%. Alternativa **d**.

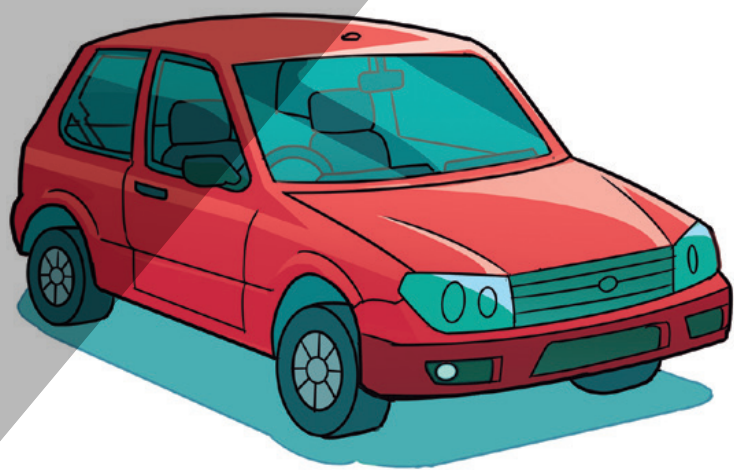
13. Elabore uma situação de empréstimo utilizando como referência a questão anterior, porém com dados diferentes. Resolva a situação e, depois, peça a um colega que a resolva. A ideia é confrontar os resultados e discutir procedimentos de resolução. Resposta pessoal.

Juros compostos

Lorena precisa comprar um carro devido a seu novo trabalho. Depois de pesquisar bastante, resolveu comprar o carro de seu vizinho por R$ 40.000,00 à vista.

Como não tinha toda essa quantia, foi ao banco e conseguiu um financiamento desse valor para ser pago numa taxa de 1%. Combinou com o gerente que, caso não pagasse, seriam cobrados juros sobre juros, ou seja, juros compostos.

O gerente alertou Lorena que uma dívida a juros compostos aumenta constantemente. Para exemplificar, mostrou numa planilha eletrônica explicando como fica o montante da dívida caso ela não pagasse nos primeiros 5 meses. Veja a seguir.



Mauro Salgado

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

Período	Cálculo dos juros	Juros	Montante
1º mês	0,01 · R$ 40.000,00	**R$ 400,00**	**R$ 40.400,00**
2º mês	0,01 · R$ 40.400,00	**R$ 404,00**	**R$ 40.804,00**
3º mês	0,01 · R$ 40.804,00	**R$ 408,04**	**R$ 41.212,04**
4º mês	0,01 · R$ 41.212,04	**R$ 412,12**	**R$ 41.624,16**
5º mês	0,01 · R$ 41.624,16	**R$ 416,24**	**R$ 42.040,40**

Para pensar e discutir

1. De mês a mês, o crescimento do montante em reais é o mesmo? Não.

2. A taxa de 1% é calculada sempre sobre o mesmo valor? Explique.
Não. A taxa de 1% é calculada sobre o montante correspondente à dívida.

3. Qual seria a dívida de Lorena no final do 5º mês se o empréstimo fosse também 1% ao mês, mas na modalidade juros simples? Seria de R$ 42.000,00.

Ao emprestar R$ 40.000,00 a 1% ao mês na modalidade de juros compostos, os juros gerados a cada mês são incorporados ao capital para o cálculo dos juros do mês seguinte. É por isso que dizemos que o crescimento do montante ocorre segundo um regime de capitalização composta.

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Esta é uma atividade para compor parte da avaliação a respeito do estudo desta unidade.

Reúna-se a mais três colegas e, juntos, comparem juros simples e juros compostos utilizando uma **planilha eletrônica**.

Considere um empréstimo de R$ 50.000,00 a uma taxa fixa mensal de juros de 2% ao mês e que não haja qualquer pagamento até o final dos 10 primeiros meses após o empréstimo.

1. Elabore uma tabela com o auxílio de planilha eletrônica exibindo, mês a mês, os juros e os montantes correspondentes considerando as duas modalidades: juros simples e juros compostos.
2. Apresente essa planilha impressa aos demais grupos para conferir os valores mês a mês.
3. Escreva um texto com suas conclusões sobre as duas modalidades de regime de capitalização.

Vamos agora generalizar!

Considere que um capital ***C*** seja aplicado na modalidade de juros compostos a uma taxa fixa ***i*** por período (expressa na forma decimal) durante ***n*** períodos. Vamos calcular os montantes ao longo de n períodos considerando que o período seja compatível com a unidade de tempo da taxa.

1º período: $M_1 = C + \mathbf{i} \cdot C = C \cdot (1 + i)$

2º período: $M_2 = C \cdot (1 + i) + \mathbf{i} \cdot C \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^2$

3º período: $M_3 = C \cdot (1 + i)^2 + \mathbf{i} \cdot C \cdot (1 + i)^2 = C \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^3$

4º período: $M_4 = C \cdot (1 + i)^3 + \mathbf{i} \cdot C \cdot (1 + i)^3 = C \cdot (1 + i)^3 \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^4$

Observando a sequência formada pelos montantes, ao final de n períodos o montante correspondente será dado por:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$

O montante M gerado por um capital C aplicado a uma taxa fixa i durante n períodos e na modalidade de juros compostos pode ser calculado pela relação

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

em que i e n são expressos na mesma unidade de tempo.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Observações

1. O regime de juros compostos é utilizado na maioria das situações que envolvem aplicações financeiras e as chamadas transações comerciais.
2. Apenas ao final do primeiro período de aplicação, os montantes, tanto na modalidade juros simples quanto juros compostos, a uma mesma taxa, são iguais.

Analise as situações a seguir.

Exemplo 1

Qual é o montante correspondente a 6 meses de aplicação da quantia de R$ 50.000,00 na modalidade de juros compostos a uma taxa fixa de 0,5% ao mês?

- Escrevendo 0,5% na forma decimal, temos 0,005. Substituindo na fórmula obtida anteriormente, temos:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$

$$M_6 = 50000 \cdot (1 + 0{,}005)^6$$

$$M_6 = 50000 \cdot 1{,}005^6$$

- Para calcular $1{,}005^6$ com o auxílio de uma calculadora simples, fazemos:

$$1{,}005^6 = 1{,}005 \cdot 1{,}005 \cdot 1{,}005 \cdot 1{,}005 \cdot 1{,}005 \cdot 1{,}005$$

$$1{,}005^6 \cong 1{,}0303775$$

- Voltando, temos:

$$M_6 \cong 50000 \cdot 1{,}0303775$$

$$M_6 \cong 51518{,}88$$

Portanto, o montante após 6 meses de aplicação é: R$ 51.518,88.

Para pensar e discutir Orientações no Manual do Professor.

1. O cálculo desse montante numa calculadora simples pode ser feito digitando 1,005, apertando a tecla da multiplicação (x) e, em seguida, a tecla "=" 5 vezes. Concorda? Verifique.
2. Explique como você calcularia utilizando uma calculadora científica?

Exemplo 2

Um capital de R$ 5.000,00, aplicado durante 4 anos na modalidade de juros compostos, produz um montante de R$ 6.553,98. Calcule a taxa anual dessa aplicação.

- Utilizando a relação para o cálculo do montante, precisamos calcular a taxa i:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$

$$6553{,}98 = 5000 \cdot (1 + i)^4$$

$$\frac{6553{,}98}{5000} = (1 + i)^4$$

$$1{,}310796 = (1 + i)^4$$

$$\sqrt[4]{1{,}310796} = 1 + i$$

$$1{,}07 \cong 1 + i \Rightarrow i \cong 0{,}07 \Rightarrow i \cong 7\% \text{ a.a.}$$

A taxa é de aproximadamente 7% ao ano.

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. Em uma calculadora que possui a tecla raiz quadrada, como você calcularia $\sqrt[4]{1{,}310796}$?
2. E como obteria esse valor na calculadora científica?

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Exemplo 3

No estudo de juros simples, vimos a seguinte atividade: "Em quantos meses determinado capital aplicado à taxa de 0,8% ao mês na modalidade de juros simples irá duplicar?".

Agora, apresentamos a seguinte situação:

Em quanto tempo certa quantia aplicada a juros compostos a uma taxa fixa de 0,8% ao mês irá duplicar?

- Utilizando a relação matemática para o cálculo do montante, temos:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$

como $M_n = 2C$ ⟶

$$2C = C \cdot (1 + 0{,}008)^n \Rightarrow 2 = 1{,}008^n$$

O valor de n (número de meses) que satisfaz essa equação é 87, ou seja, em 87 meses o capital duplicará.

Observação

Você poderá encontrar o valor de n desta situação após o estudo de logaritmos na Unidade 2.

A utilização de planilhas eletrônicas e de calculadoras científicas para a resolução de situações diversas envolvendo Matemática Financeira é fundamental. O *software* para planilha eletrônica tem diversas funções. Entre as categorias de funções, você poderá encontrar a de funções financeiras. Essa categoria apresenta um conjunto de automatizações para a realização de operações matemáticas úteis em Matemática Financeira entre elas o cálculo de juros e o cálculo de rendimento de aplicações, além de outras funções similares às encontradas em calculadoras científicas.

Vale a pena você conhecer de forma autônoma essas funções.

Atividades

1. Um capital de R$ 20.000,00 foi aplicado, na modalidade de juros compostos, a uma taxa de 10% ao ano. Responda:

a) Qual é o montante dessa aplicação após 4 anos? R$ 29.282,00

b) Qual é o rendimento dessa aplicação após 4 anos? R$ 9.282,00

c) O rendimento obtido representa que percentual de ganho em relação ao capital aplicado? 46,41%

2. Ao comprar um terreno em determinada região da cidade, Ana estava fazendo um investimento, pois havia uma tendência de valorização de 14% ao ano. Se Ana pagou R$ 100.000,00 pelo terreno, obtenha:

a) o valor do terreno, segundo a tendência de valorização, em 5 anos; R$ 192.541,46

b) o percentual de valorização dele, segundo a tendência, nesses 5 anos. 92,54%

3. Uma aplicação financeira rende uma taxa fixa de 1,2% a.m. em regime de juros compostos. Se você aplicou a quantia de R$ 1.500,00 e retirou a quantia disponível ao final de 10 meses, responda:

a) Qual foi a quantia retirada? R$ 1.690,04

b) Qual o percentual de aumento do capital investido? Aproximadamente 12,67%.

4. De acordo com as informações a seguir, elabore duas situações. Orientações no Manual do Professor.

Primeira situação – estipule um valor a ser aplicado em caderneta de poupança durante um ano considerando uma taxa fixa (pesquise o rendimento do último mês em caderneta de poupança para saber qual é a taxa). A aplicação é no regime de juros compostos.

Segunda situação – estipule um valor a ser aplicado em uma situação anterior aplicado em um fundo de investimento a uma taxa fixa (também pesquise o rendimento do último mês desse fundo de aplicação para saber qual é a taxa). A aplicação também é no regime de juros compostos.

Agora, escreva um pequeno texto comparando as duas aplicações e apresente-o aos colegas. Enfatize no texto qual das situações é mais vantajosa para um investidor.

5. Uma dívida foi contraída no regime de juros compostos e aumentou de R$ 5.000,00 para R$ 5.306,04 em 3 meses. Admitindo a taxa de juros mensal fixa da dívida, faça o que se pede (utilize calculadora) a seguir.

a) Determine o valor da taxa mensal. Taxa de 2% ao mês.

b) Determine o montante da dívida em 1 ano, caso ela não seja paga. R$ 6.341,21

c) Qual o percentual de aumento dessa dívida em 12 meses? Aproximadamente 27%.

6. Luciana é gerente financeira de uma empresa e precisa pedir um empréstimo bancário de R$ 400.000,00. Ela está analisando duas propostas: Respostas no Manual do Professor.

Banco I – oferece a taxa fixa de juros compostos de 3% ao mês e o prazo de 16 meses para a quitação do empréstimo em parcela única;

Banco II – oferece a taxa fixa de juros compostos de 4% ao mês e o prazo de 12 meses para a quitação do empréstimo em parcela única.

Desconsiderando a inflação nos períodos acima, informe de que banco Luciana deverá contrair o empréstimo, sabendo que a decisão dela depende apenas da menor quantia paga em juros.

7. Uma pessoa deixou de pagar a fatura do cartão de crédito, cujo valor é corrigido a juros compostos. Em 3 meses, o valor devido aumentou em 33,1%.

New Africa/Shutterstock.com

Calcule a taxa de juros mensais cobrada. 10%

8. Esta é uma atividade de pesquisa individual. Converse com alguém de sua família ou vizinhança e verifique qual é a taxa de juros mensais cobrados no cartão de crédito. Com essa taxa, simule uma fatura no valor de R$ 5.000,00 paga somente 3 meses após o vencimento. Orientações no Manual do Professor.

9. Junte-se a um colega para resolver o seguinte problema: Orientações no Manual do Professor.

Bruna tem uma casa para alugar ou vender. O valor de venda da casa é de R$ 750.000,00 à vista e o aluguel que ela consegue mensalmente é de R$ 4.500,00. Analise as opções dela a seguir.

I. Vender a casa e aplicar o valor total na caderneta de poupança que rende 0,5% ao mês.

II. Alugar a casa e, com o dinheiro do aluguel, aplicar todo mês o valor recebido em caderneta de poupança que rende 0,5% ao mês.

No final de 1 ano, considerando que ela não faça nenhum outro depósito além dos valores recebidos (pela venda ou pelo aluguel) nem qualquer retirada, qual opção renderá um saldo maior para Bruna?

10. (UFPE) Se uma pessoa toma emprestado a quantia de R$ 3.000,00 a juros compostos de 3% ao mês, pelo prazo de 8 meses, qual o montante a ser devolvido? Dado: use a aproximação $1{,}03^8 = 1{,}27$ Alternativa **e**.

a) R$ 3.802,00

b) R$ 3.804,00

c) R$ 3.806,00

d) R$ 3.808,00

e) R$ 3.810,00

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

Juros compostos: outras situações

Embora o nosso estudo aqui se refira a tópicos de Matemática Financeira, existem algumas informações importantes que ampliam as aplicações relacionadas a juros compostos. Entre elas, vamos analisar juros compostos com taxas variáveis, juros compostos e taxas equivalentes e, ainda, a relação entre funções e juros compostos.

Em áreas como Economia, Administração e Mercado Financeiro, o conhecimento dos cálculos envolvendo juros compostos faz parte do cotidiano dos profissionais que nelas atuam. O nosso estudo se limita a abordar aspectos relevantes para o seu conhecimento básico envolvendo situações de empréstimos, de financiamentos. Caso queira, poderá ampliar tais conhecimentos a partir do que verá na sequência.

Nos tópicos que apresentamos a seguir, procure refazer exemplos, conferir os procedimentos utilizados nesses cálculos e até elaborar outras situações similares.

Juros compostos com taxas variáveis

Vimos anteriormente como podemos calcular o montante de uma aplicação financeira a uma taxa fixa ao longo de n períodos no regime de juros compostos. Assim, obtivemos a relação:

$$\underbrace{M_n = C \cdot (1 + i)^n}$$

montante para uma taxa fixa i ao longo de n períodos no regime de juros compostos

E como podemos calcular o montante quando a taxa é variável?

Observe que a fórmula do montante acima, para taxa fixa, poderia ser escrita da seguinte maneira:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$

$$M_n = C \cdot \underbrace{(1 + i) \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) \cdot (...) \cdot (1 + i)}_{n}$$

Se as taxas ao longo dos n períodos forem dadas por $i_1, i_2, i_3, i_4, ..., i_n$, o montante resultante pode ser obtido pela relação:

$$\boldsymbol{M_n = C \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \cdot (1 + i_4) \cdot (...) \cdot (1 + i_n)}$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Exemplo

Em 2020, uma empresa teve um faturamento de R$ 300.000,00. Ela está projetando, para os próximos 4 anos, os seguintes aumentos de faturamento anual (sempre em relação ao ano anterior):

Aumento em 2021: 2%

Aumento em 2022: 3%

Aumento em 2023: 1%

Aumento em 2024: 1,5%

Vamos determinar o faturamento projetado para 2024.

- Uma maneira de calcular é obter os faturamentos ano a ano até chegar a 2024. Nesse caso, os capitais sempre serão os montantes dos anos anteriores:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$

$$2021: M_{2021} = 300000 \cdot (1 + 0{,}02)^1 \Rightarrow M_{2021} = 306000$$

$$2022: M_{2022} = 306000 \cdot (1 + 0{,}03)^1 \Rightarrow M_{2022} = 315180$$

$$2023: M_{2023} = 315180 \cdot (1 + 0{,}01)^1 \Rightarrow M_{2023} = 318331{,}80$$

$$2024: M_{2024} = 318331{,}80 \cdot (1 + 0{,}015)^1 \Rightarrow M_{2024} \cong 323106{,}78$$

Portanto, o faturamento projetado para 2024 será de aproximadamente R$ 323.106,78.

- Outra maneira é considerar a relação para taxas variáveis:

$$M_4 = C \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \cdot (1 + i_4)$$
$$M_4 = 300\,000 \cdot (1 + 0{,}02) \cdot (1 + 0{,}03) \cdot (1 + 0{,}01) \cdot (1 + 0{,}015)$$
$$M_4 = 300\,000 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}015$$
$$M_4 \cong 300\,000 \cdot 1{,}077 \Rightarrow M_4 \cong 323106{,}78$$

Para pensar e discutir

1. Aumentos sucessivos de 2%, 3%, 1% e 1,5% correspondem a um único aumento de quantos por cento? Justifique! 7,7%
2. Você investiu R$ 10.000,00 num fundo de ações que rendeu 0,7% no primeiro mês e 1,2% no segundo mês. Qual foi o percentual desse rendimento no final dos dois meses? Aproximadamente 1,91%.

Juros compostos e funções

Nesta unidade observamos que, na modalidade juros simples, tanto os juros quanto os montantes podem ser descritos por meio de uma função afim. Agora, vamos examinar o que ocorre quando a aplicação é no regime de juros compostos. Para isso, consideremos a situação a seguir.

Exemplo

Um capital de R$ 1.000,00 foi aplicado à taxa de 0,8% ao mês no regime de juros compostos. Vamos obter o montante ao final de n meses.

- Utilizando a fórmula do montante para juros compostos, temos:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$
$$M_n = 1000 \cdot (1 + 0{,}008)^n$$
$$M_n = 1000 \cdot 1{,}008^n$$

montante em função do número de meses de aplicação

- Como temos o montante em função da quantidade de meses de aplicação, $M = f(n)$, podemos atribuir valores a n para obter os montantes correspondentes. Arredondando na 2ª casa decimal, temos os seguintes valores:

n	$M = f(n) = 1000 \cdot 1{,}008^n$
1	$M = f(1) = 1000 \cdot 1{,}008^1 = 1008{,}00$
2	$M = f(2) = 1000 \cdot 1{,}008^2 = 1016{,}06$
3	$M = f(3) = 1000 \cdot 1{,}008^3 = 1024{,}19$
4	$M = f(4) = 1000 \cdot 1{,}008^4 = 1032{,}39$
5	$M = f(5) = 1000 \cdot 1{,}008^5 = 1040{,}65$
6	$M = f(6) = 1000 \cdot 1{,}008^6 = 1048{,}97$

Note que o crescimento do montante, mês a mês, não é constante, isto é, o crescimento dele não é linear, como ocorreu na aplicação do regime de juros simples. Como a variável n se apresenta no exponente, dizemos que o montante em função do tempo é descrito por meio de uma função exponencial, ou seja, uma função em que a variável independente está no expoente. Orientações no Manual do Professor.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Esta é uma atividade para compor parte da avaliação a respeito do estudo desta unidade.

Junte-se a mais um colega e, com o auxílio de um ***software* de geometria dinâmica**, faça o que se pede.

1. Elabore no plano cartesiano o gráfico da função exponencial $M = f(n) = 1000 \cdot 1{,}008^n$ da aplicação no regime de juros compostos vista anteriormente.
2. Obtenha a função $M = f(n)$ correspondente à mesma aplicação de R$ 1.000,00 a uma taxa fixa mensal de 0,8% no regime de juros simples. Depois, faça no plano cartesiano o gráfico correspondente.
3. Escreva um texto contendo suas conclusões sobre as duas modalidades de regime de capitalização conforme os dois gráficos.

Para mais informações sobre o uso desse *software*, consulte o tópico **Recursos digitais** na **Caixa de Ferramentas**.

Juros compostos e taxas equivalentes

Brian A Jackson/Shutterstock.com

É preciso sempre verificar se a taxa e o período de uma aplicação financeira estão na mesma unidade de tempo. Caso contrário, será necessário encontrar a taxa equivalente na mesma unidade do período.

Numa aplicação financeira, por exemplo, um investimento, a taxa e o período de aplicação devem estar na mesma unidade de tempo.

Exemplos

- um capital aplicado durante 15 meses a uma taxa de 2% ao mês;
- um capital aplicado durante 3 anos a uma taxa de 5% ao ano.

E quando o período e a taxa não estiverem na mesma unidade de tempo?

Devemos, então, obter a taxa equivalente na mesma unidade do período de aplicação. Vamos exemplificar!

Exemplo 1

Um investimento a juros compostos rende 2% a.m. (ao mês). Qual é a taxa anual correspondente?

- Calculamos o montante de um capital C investido a uma taxa mensal de 2% a.m. no período de 1 ano, porém utilizamos a quantidade do período como sendo 12 (12 meses):

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$

$$M_{12} = C \cdot (1 + 0{,}02)^{12}$$

$$M_{12} = C \cdot 1{,}02^{12}$$

$$M_{12} \cong C \cdot 1{,}2682$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- Como o capital está sendo multiplicado por 1,2682, ele aumentou, em 1 ano, 26,82%. Logo, temos a equivalência de taxas:

2% a.m. equivale a **26,82% a.a.**

- Outra maneira de chegar a esse resultado é considerar que i_a e i_m representam as taxas anual e mensal, respectivamente. Aplicando a fórmula do cálculo do montante, temos:

$$M_1 = C \cdot (1 + i_a)^1$$

$$M_{12} = C \cdot (1 + i_m)^{12} = C \cdot (1 + 0{,}02)^{12}$$

Igualamos os montantes:

$$C \cdot (1 + i_a)^1 = C \cdot (1 + 0{,}02)^{12}$$

$$1 + i_a = (1 + 0{,}02)^{12}$$

$$1 + i_a = 1{,}02^{12}$$

$$1 + i_a \cong 1{,}2682$$

$$i_a \cong 0{,}2682 \Rightarrow i_a \cong 26{,}82\%$$

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

1. A taxa fixa de 12% a.a. é equivalente à taxa fixa de 1% a.m. no regime de juros compostos?
2. Qual é a taxa anual equivalente numa aplicação de juros compostos à taxa mensal fixa de 1%? Explique como você a obteve.

Atividades

1. 18,42%.
Basta efetuar a multiplicação: 1,0431 × 1,0375 × 1,0295 × 1,0629, obtendo 1,1842, isto é, aumentou 18,42%.

6. O montante será de R$ 53.795,00 (aproximando os centavos).

1. O quadro a seguir contém a inflação do Brasil ano a ano, de 2016 a 2019.

Inflação no Brasil				
Ano	2016	2017	2018	2019
Taxa de inflação	6,29	2,95	3,75	4,31

Fonte: IBGE.

Nesses 4 anos, qual é a taxa de inflação acumulada? Explique como você calculou.

2. Faça uma pesquisa do Índice de Preços ao Consumidor (IPC), que mede a inflação no Brasil em relação aos últimos 6 meses. Elabore uma tabela e escreva a taxa percentual correspondente à inflação acumulada no último semestre. Resposta pessoal.

3. (UFRN) Maria pretende comprar um computador cujo preço é R$ 900,00. O vendedor da loja ofereceu dois planos de pagamento: parcelar o valor em quatro parcelas iguais de R$ 225,00, sem entrada, ou pagar à vista, com 5% de desconto. Sabendo que o preço do computador será o mesmo no decorrer dos próximos quatro meses e que dispõe de R$ 855,00, ela analisou as seguintes possibilidades de compra:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Opção 1	Comprar à vista, com desconto.
Opção 2	Colocar o dinheiro em uma aplicação que rende 1% de juros compostos ao mês e comprar, no final dos quatro meses, por R$ 900,00.
Opção 3	Colocar o dinheiro em uma aplicação que rende 1% de juros compostos ao mês e comprar a prazo, retirando todo mês o valor da prestação.
Opção 4	Colocar o dinheiro em uma aplicação que rende 2% de juros compostos ao mês e comprar, três meses depois, pelos R$ 900,00.

Entre as opções analisadas por Maria, a que oferece maior vantagem financeira no momento é a:

a) opção 2.
b) opção 1.
c) opção 4. Alternativa **c**.
d) opção 3.

4. Uma taxa anual de 8% a juros compostos corresponde a uma taxa fixa mensal de quantos por cento? Utilize calculadora. A taxa de 0,643% ao mês.

5. Uma taxa semestral de 5% a juros compostos corresponde a uma taxa fixa mensal de quantos por cento? Utilize calculadora. A taxa de 0,816% ao mês.

6. Calcule o montante resultante de uma aplicação financeira de R$ 45.000,00 na modalidade de juros compostos ao longo de 12 meses, sendo que, nos 6 primeiros meses, a taxa mensal era fixa de 1% e nos 6 últimos meses a taxa mensal era fixa de 2%. Utilize calculadora.

7. (Enem) Considere que uma pessoa decida investir determinada quantia e que sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

Investimento A: 3% ao mês
Investimento B: 36% ao ano
Investimento C: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades.

n	$1{,}03^n$
3	1,093
6	1,194
9	1,305
12	1,426

Para escolher o investimento com maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá: Alternativa **c**.

a) escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.
b) escolher qualquer um dos investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.
c) escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.
d) escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.
e) escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

Financiamentos

O que é mais vantajoso: comprar à vista ou comprar a prazo?

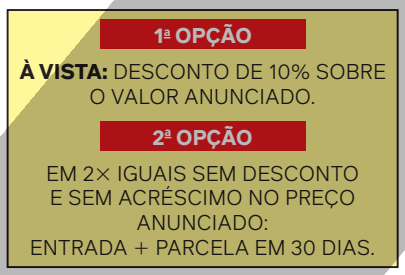
Essa é uma questão que sempre é feita quando estamos diante de uma compra. É evidente que algumas vezes não temos capital suficiente para efetuar a compra à vista, porém devemos ter consciência dos juros que serão pagos na compra a prazo.

Vamos retomar uma situação apresentada quando iniciamos Matemática Financeira para observar que, algumas vezes, mesmo que façamos uma compra com uma entrada e uma parcela para o mês seguinte, podemos estar pagando um juro muito alto.

Para retomar

A compra de uma casa, a aquisição de um aparelho celular, a venda de um terreno, a tomada de decisão de fazer um financiamento numa instituição financeira, o planejamento das finanças ao longo do tempo e o pagamento da multa pelo atraso na quitação da conta de energia são alguns exemplos de situações relacionadas ao estudo de Matemática Financeira.

Considere, por exemplo, que você irá comprar um aparelho de TV e na loja escolhida para essa compra ele está anunciado pelo valor de R$ 1.000,00, mas em duas condições, como mostra a imagem ao lado.



DAE

- **1ª opção –** cálculo do valor à vista com desconto de 10%:

$$V = 0{,}90 \cdot 1000 = 900 \Rightarrow \text{R\$ } 900{,}00$$

- **2ª opção –** devemos pagar R$ 500,00 de entrada e R$ 500,00 após um mês.

Note que, nessa opção, pagamos R$ 500,00 à vista. Assim, o saldo para pagamento à vista é de R$ 400,00 (o que falta para R$ 900,00).

Dívida no momento da compra: **R$ 400,00**

Pagamento 1 mês após a compra: **R$ 500,00**

Nessa opção, deve-se pagar R$ 100,00 de juros em R$ 400,00. Cálculo da variação percentual:

$$p = \frac{500 - 400}{400} \Rightarrow p = \frac{100}{400} = 0{,}25 = 25\%$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir

Orientações no Manual do Professor.

1. Qual é o percentual de juros cobrado no atraso de 1 mês em sua conta de energia elétrica? Pesquise.
2. Qual é o percentual de juros cobrado pelos bancos em 1 mês de saldo negativo no cheque especial? Pesquise.
3. Qual é o juros (em porcentagem) cobrado pelos bancos em 1 mês de atraso no pagamento do cartão de crédito? Pesquise.

Vamos agora analisar duas situações envolvendo compras a prazo.

Exemplo 1

Cálculo do valor à vista com base em uma compra a prazo.

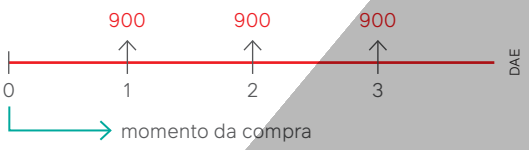
Aline comprou um *laptop* para fazer seus trabalhos em casa. Como não tinha dinheiro suficiente para comprar à vista, negociou com a loja para pagar em 3 parcelas iguais mensais, sem entrada, no valor de R$ 900,00 cada. Observe a oferta na imagem ao lado.

Mauro Salgado

O vendedor informou que os juros compostos que estavam sendo financiados na compra eram de 4% ao mês.

Vamos calcular, com base nas informações, o preço equivalente ao valor à vista desse computador!

- No esquema abaixo, os números 1, 2 e 3 indicam os meses de pagamento das parcelas de R$ 900,00.



- **1º mês:** 900 reais representam o valor da 1ª parcela com juros de 4%, isto é, representam o montante de um valor V_1 depois de 1 mês a juros compostos. Cálculo de V_1:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$

$$900 = V_1 \cdot (1 + 0{,}04)^1$$

$$900 = V_1 \cdot 1{,}04^1 \Rightarrow V_1 = \frac{900}{1{,}04^1}$$

- **2º mês:** 900 reais representam o valor da 2ª parcela com juros de 4%, isto é, representam o montante de um valor V_2 depois de 2 meses a juros compostos. Cálculo de V_2:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n \Rightarrow 900 = V_2 \cdot (1 + 0{,}04)^2$$

$$900 = V_2 \cdot 1{,}04^2 \Rightarrow V_2 = \frac{900}{1{,}04^2}$$

- **3º mês:** 900 reais representam o valor da 3ª parcela com juros de 4%, isto é, representam o montante de um valor V_3 depois de 3 meses a juros compostos. Cálculo de V_3:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n \Rightarrow 900 = V_3 \cdot (1 + 0{,}04)^3$$

$$900 = V_3 \cdot 1{,}04^3 \Rightarrow V_3 = \frac{900}{1{,}04^3}$$

- O valor à vista, dentro das condições apresentadas, é dado por V:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V = \frac{900}{1{,}04^1} + \frac{900}{1{,}04^2} + \frac{900}{1{,}04^3}$$

$$V \cong 865{,}38 + 832{,}10 + 800{,}10$$

$$V \cong 2497{,}58$$

Portanto, o valor equivalente ao valor à vista desse computador é de R$ 2.497,58.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir

O objetivo destas questões é verificar se os estudantes compreenderam a situação exemplificada.

1. Como, do valor V_1, podemos obter o valor da 1ª parcela de R$ 900,00? Basta dividir 900 por $1{,}04^1$.
2. Como, do valor V_2, podemos obter o valor da 2ª parcela de R$ 900,00? Basta dividir 900 por $1{,}04^2$.
3. Como, do valor V_3, podemos obter o valor da 3ª parcela de R$ 900,00? Basta dividir 900 por $1{,}04^3$.

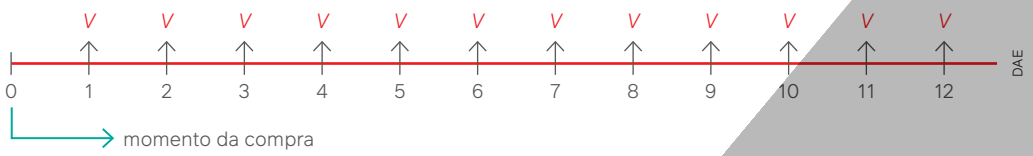
Exemplo 2

Cálculo do valor das parcelas com base no valor à vista.

Carlos foi comprar um automóvel usado. Ao chegar à loja, observou que o preço à vista seria igual a R$ 25.000,00. O vendedor ofereceu outra possibilidade: sem entrada, em 12 parcelas mensais e iguais, com juros de 2% ao mês.

Vamos calcular, considerando as informações da página anterior, os valores das 12 parcelas, lembrando que elas devem ser iguais.

- No esquema abaixo, os números 1, 2, 3, ... e 12 indicam os meses de pagamento das parcelas V_1, V_2, V_3, ..., e V_{12}, sendo que V será o valor de cada uma dessas parcelas.



- **1º mês:** V corresponde ao montante do valor V_1 após 1 mês a juros compostos de 2%:

$$V = V_1 \cdot (1 + 0{,}02)^1$$

$$V = V_1 \cdot 1{,}02^1 \Rightarrow V_1 = \frac{V}{1{,}02^1}$$

- **2º mês:** V corresponde ao montante do valor V_2 após 2 meses a juros compostos de 2%:

$$V = V_2 \cdot (1 + 0{,}02)^2$$

$$V = V_2 \cdot 1{,}02^2 \Rightarrow V_2 = \frac{V}{1{,}02^2}$$

- **3º mês:** V corresponde ao montante do valor V_3 após 3 meses a juros compostos de 2%:

$$V = V_3 \cdot (1 + 0{,}02)^3$$

$$V = V_3 \cdot 1{,}02^3 \Rightarrow V_3 = \frac{V}{1{,}02^3}$$

$$\vdots$$

- **12º mês:** V corresponde ao montante do valor V_{12} após 12 meses a juros compostos de 2% a.m.:

$$V = V_{12} \cdot (1 + 0{,}02)^{12}$$

$$V = V_{12} \cdot 1{,}02^{12} \Rightarrow V_{12} = \frac{V}{1{,}02^{12}}$$

- Como sabemos do valor à vista, podemos calcular o V das parcelas iguais:

$$V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_{12} = 25000$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

$$\frac{V}{1{,}02^1} + \frac{V}{1{,}02^2} + \frac{V}{1{,}02^3} = 25000$$

$$V \cdot (0{,}980 + 0{,}961 + 0{,}942 + 0{,}924 + 0{,}906 + 0{,}888 + 0{,}871 + 0{,}854 + 0{,}837 + 0{,}821 + 0{,}805 + 0{,}789) = 25000$$

$$V \cdot 10{,}578 = 25000 \Rightarrow V \cong 2363{,}40$$

Serão 12 parcelas iguais no valor de R$ 2.363,40.

Para explorar

Respostas no Manual do Professor.

Reúna-se com três colegas e, juntos, façam o que se pede a seguir.

1. Observem o procedimento utilizado nos exemplos anteriores e determinem o preço à vista de um computador que foi vendido em 5 parcelas iguais de R$ 650,00, com juros de 3% ao mês.
2. Determinem o valor de cada parcela de um automóvel que Carlos comprou (ver exemplo 2 anterior) considerando o mesmo valor à vista (R$ 25.000,00), mas financiado a juros compostos de 1,5% ao mês em 24 parcelas iguais.
   Para esta atividade 2, utilizem planilha eletrônica. Ao final, comparem os resultados obtidos com aqueles que os outros grupos obtiveram.

Atividades

1. Calcule o valor à vista de um produto vendido em 4 parcelas de R$ 500,00 com juros de 7% a.m. considerando:

- a 1ª parcela à vista, no momento da compra (1 + 3).

Use uma calculadora para a resolução. R$ 1.812,16

2. Reúna-se a um colega e, com base na situação anterior, elaborem, juntos, outra situação alterando os dados numéricos. Resolvam-na e apresentem-na a outra dupla para que ela também a resolva. Use uma calculadora. Resposta pessoal.

3. Calcule o valor à vista de um produto vendido em 4 parcelas de R$ 500,00 com juros de 7% a.m. considerando que: R$ 1.693,61

- a 1ª parcela será paga apenas daqui a um mês (0 + 4).

Use uma calculadora.

4. Reúna-se a um colega e, com base na situação anterior, elaborem, juntos, outra situação alterando os dados numéricos. Utilizem os dados desenvolvidos na atividade 3, porém, considerem que a 1ª parcela será paga apenas daqui a um mês. Resposta pessoal.

5. (Enem) Uma pessoa se interessou em adquirir um produto anunciado em uma loja. Negociou com o gerente e conseguiu comprá-lo a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês. O primeiro pagamento será um mês após a aquisição do produto, e no valor de R$ 202,00. O segundo pagamento será efetuado um mês após o primeiro, e terá o valor de R$ 204,02. Para concretizar a compra, o gerente emitirá uma nota fiscal com o valor do produto à vista negociado com o cliente, correspondente ao financiamento aprovado.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

O valor à vista, em real, que deverá constar na nota fiscal é de: Alternativa **b**.

a) R$ 398,02.

b) R$ 400,00.

c) R$ 401,94.

d) R$ 404,00.

e) R$ 406,02.

6. (Enem) Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento: Alternativa **d**.

- Opção 1: pagar à vista, por R$ 55.000,00.
- Opção 2: pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 30.000,00 e mais uma prestação de R$ 26.000,00 para dali a 6 meses.
- Opção 3: pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 20.000,00, mais uma prestação de R$ 20.000,00 para dali a 6 meses e outra de R$ 18.000,00 para dali a 12 meses da data de compra.
- Opção 4: pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 15.000,00 e o restante em 1 ano da data de compra, pagando R$ 39.000,00.
- Opção 5: pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R$ 60.000,00.

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor), em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo.

Após avaliar a situação do ponto financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher a opção:

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

7. (FGV-SP) Um aparelho de TV é vendido por R$ 1.000,00 em dois pagamentos iguais, sem acréscimo, sendo o 1º pagamento como entrada e o 2º um mês após a compra. Se o pagamento for feito à vista, há um desconto de 4% sobre o preço de R$ 1.000,00. A taxa mensal de juros simples do financiamento é, aproximadamente, igual a: Alternativa **a**.

a) 8,7%.

b) 7,7%.

c) 6,7%.

d) 5,7%.

e) 4,7%.

8. (FGV-SP) Certo capital foi aplicado em regime de juros compostos. Nos quatro primeiros meses, a taxa foi de 1% ao mês e, nos quatro meses seguintes, a taxa foi de 2% ao mês. Sabendo-se que, após os oito meses de aplicação, o montante resgatado foi de R$ 65.536,00, então o capital aplicado, em reais, foi aproximadamente igual a:

Dado: $65536 = 2^{16}$. Alternativa **e**.

a) $3{,}66^8$.

b) $3{,}72^8$.

c) $3{,}78^8$.

d) $3{,}88^8$.

e) $3{,}96^8$.

1. j) Nos juros simples, o crescimento é linear; nos juros compostos, é exponencial.

Atividades finais

1. Sobre os assuntos desta unidade, responda às questões a seguir.

a) Multiplicar um número por 0,012 significa calcular qual percentual desse número? 1,2%

b) Multiplicar um número por 1,012 significa calcular qual percentual desse número? 101,2%

c) Dois aumentos consecutivos de 2% e de 6% correspondem a um só aumento de que percentual? 8,12%

d) Dois descontos consecutivos de 2% e de 6% correspondem a um só desconto de que percentual? 7,88%

e) Se determinado valor aumentou de R$ 10,00 para R$ 12,00, qual foi a variação percentual? 20%

f) O que é montante em relação a um capital e aos juros correspondentes? O montante é a soma do capital com os juros.

g) Qual a modalidade de regime de juros em que os juros sempre são calculados sobre um valor fixo? Regime de juros simples.

h) Qual a modalidade de regime de juros em que, duplicando-se o período, duplica-se também o juro? Regime de juros simples.

i) Qual a fórmula que permite calcular o montante no regime de juros compostos? $M = C(1 + i)^n$

j) Como ocorre o crescimento dos montantes nos juros simples e nos juros compostos?

2. (Unesp) Em um dia de aula, faltaram 3 alunas e 2 alunos porque os cinco estavam gripados. Dos alunos e alunas que foram à aula, 2 meninos e 1 menina também estavam gripados. Dentre os meninos presentes à aula, a porcentagem dos que estavam gripados era 8% e, dentre as meninas, a porcentagem das que estavam gripadas era 3%. Nos dias em que a turma estiver presente, a porcentagem de meninos nessa turma é de: Alternativa **c**.

a) 52%. **c)** 54%. **e)** 46%.

b) 50%. **d)** 56%.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

3. (Enem) Uma pessoa, que perdeu um objeto pessoal quando visitou uma cidade, pretende divulgar nos meios de comunicação informações a respeito da perda desse objeto e de seu contato para eventual devolução. No entanto, ela lembra que, de acordo com o Art. 1234 do Código Civil, poderá ter que pagar pelas despesas do transporte desse objeto até sua cidade e poderá ter que recompensar a pessoa que lhe restituir o objeto em, pelo menos, 5% do valor do objeto.

Ela sabe que o custo com o transporte será de um quinto do valor atual do objeto e, como ela tem muito interesse em reavê-lo, pretende ofertar o maior percentual possível de recompensa, desde que o gasto total com as despesas não ultrapasse o valor atual do objeto. Nessas condições, o percentual sobre o valor do objeto, dado como recompensa, que ela deverá ofertar é igual a: Alternativa **e**.

a) 20%. **c)** 40%. **e)** 80%.

b) 25%. **d)** 60%.

4. (Enem) Deseja-se comprar determinado produto e, após uma pesquisa de preços, o produto foi encontrado em 5 lojas diferentes, a preços variados. Alternativa **a**.

- Loja 1: 20% de desconto, que equivale a R$ 720,00, mais R$ 70,00 de frete;
- Loja 2: 20% de desconto, que equivale a R$ 740,00, mais R$ 50,00 de frete;
- Loja 3: 20% de desconto, que equivale a R$ 760,00, mais R$ 80,00 de frete;
- Loja 4: 15% de desconto, que equivale a R$ 710,00, mais R$ 10,00 de frete;
- Loja 5: 15% de desconto, que equivale a R$ 690,00, sem custo de frete.

O produto foi comprado na loja que apresentou o menor preço total. O produto foi adquirido na loja:

a) 1. **b)** 2. **c)** 3. **d)** 4. **e)** 5.

5. (Udesc) Cláudio e João, após jogarem 25 partidas de xadrez, apresentavam o placar de 14 vitórias de Cláudio contra 10 vitórias de João. João decidiu melhorar seu desempenho e seu objetivo é ganhar todas as próximas partidas até que sua taxa percentual de vitórias aumente em pelo menos 12%. O número mínimo de vitórias consecutivas para que o objetivo de João seja alcançado é igual a: Alternativa **e**.

a) 10. **b)** 6. **c)** 8. **d)** 9. **e)** 7.

6. (Uego) A capacidade de um tanque é de 1000 L e está cheio de água. Ao abrir o tampão, o volume de água decresce 20% por minuto. Depois de 5 minutos, o volume será de aproximadamente: Alternativa **b**.

a) 258 L. **c)** 376 L. **e)** 512 L.

b) 327 L. **d)** 431 L.

7. (Enem) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o rendimento médio mensal dos trabalhadores brasileiros, no ano 2000, era de R$ 1.250,00. Já o Censo 2010 mostrou que, em 2010, esse valor teve um aumento de 7,2% em relação a 2000. Esse mesmo instituto projeta que, em 2020, o rendimento médio mensal dos trabalhadores brasileiros poderá ser 10% maior do que foi em 2010.

IBGE. *Censo 2010*. Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 13 ago. 2012 (adaptado).

Supondo que as projeções do IBGE se realizem, o rendimento médio mensal dos brasileiros em 2020 será de: Alternativa **e**.

a) R$ 1.340,00.

b) R$ 1.349,00.

c) R$ 1.375,00.

d) R$ 1.465,00.

e) R$ 1.474,00.

8. (IFPE) Segundo o IBGE, o número de desempregados no Brasil foi de 12 milhões de pessoas no terceiro trimestre de 2018. Isso representa queda de 4% em relação ao trimestre anterior.

FREITAS, Evelson de. Desemprego cai para 12,1%, mas ainda atinge 12,7 milhões de pessoas. *Uol notícias*, 28 set. 2018. Disponível em: https://economia.uol.com.br/empregos-e-carreiras/noticias/redacao/2018/09/28/desemprego-pnad-agosto-ibge.htm. Acesso em: 28 set. 2018 (adaptado).

Com base no texto, o número de desempregados no segundo trimestre de 2018 foi igual a: Alternativa **d**.

a) 6,13 milhões de pessoas.

b) 13,23 milhões de pessoas.

c) 11,52 milhões de pessoas.

d) 12,5 milhões de pessoas.

e) 16,8 milhões de pessoas.

9. (IFSC) O Produto Interno Bruto (PIB) é uma representação da soma dos valores monetários de todos os bens e serviços produzidos em determinada região em determinado espaço de tempo. O Balinsky (país fictício) tinha em 2016 um PIB que, em comparação com o PIB de 2015, cresceu 2%. Já em 2017 o PIB de Balinsky diminuiu 5% em relação a 2016. A previsão para 2018 é de um crescimento de 3% em relação a 2017. Se essa previsão para 2018 se confirmar, pode-se afirmar que a variação do PIB de Balinsky do período de 2015 a 2018 foi:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Assinale a alternativa CORRETA. Alternativa **a**.

a) Um decrescimento de aproximadamente 0,2%.

b) Não cresceu nem diminuiu.

c) Um aumento de aproximadamente 1,8%.

d) Um decrescimento de mais de 2%.

e) Um acréscimo de menos de 1%.

10. (Enem) A conta de telefone de uma loja foi, nesse mês, de R$ 200,00. O valor da assinatura mensal, já incluso na conta, é de R$ 40,00, o qual dá direito a realizar uma quantidade ilimitada de ligações locais para telefones fixos. As ligações para celulares são tarifadas separadamente. Nessa loja, são feitas somente ligações locais, tanto para telefones fixos quanto para celulares. Para reduzir os custos, o gerente planeja, para o próximo mês, uma conta de telefone com valor de R$ 80,00.

Para que esse planejamento se cumpra, a redução percentual com gastos em ligações para celulares nessa loja deverá ser de: Alternativa **e**.

a) 25%. **c)** 50%. **e)** 75%.

b) 40%. **d)** 60%.

11. (Unicamp-SP) Os preços que aparecem no cardápio de um restaurante já incluem um acréscimo de 10% referente ao total de impostos. Na conta, o valor a ser pago contém o acréscimo de 10% relativo aos serviços (gorjeta). Se o valor total da conta for p reais, o cliente estará desembolsando pelo custo original da refeição, em reais, a quantia de: Alternativa **b**.

a) $\frac{p}{1{,}20}$. **b)** $\frac{p}{1{,}21}$. **c)** $\frac{p}{0{,}80}$. **d)** $\frac{p}{0{,}81}$.

12. (Uerj) De acordo com a projeção apresentada na tabela, no período de 2011 a 2020, o país com maior aumento percentual na produção de petróleo seria o Iraque. Alternativa **b**.

PROJEÇÃO PARA 2020 DOS MAIORES PRODUTORES DE PETRÓLEO (em milhões de barris/dia)

	2011	2020
Arábia Saudita	12,3	13,2
EUA	8,1	11,6
Rússia	10,2	10,6
Iraque	2,5	7,6
Canadá	3,3	5,5
Brasil	2,0	4,5
China	4,1	4,5
Irã	3,8	3,4
Kuwait	3,0	3,4

Tarcísio Garbellini

Adaptado de fernandonogueiradacosta.wordpress.com.

O segundo país com maior aumento percentual seria:

a) EUA. **c)** Canadá.

b) Brasil. **d)** Arábia Saudita.

13. (IFCE) Certo capital foi aplicado a uma taxa de juros simples de 3% ao mês. Considerando o mês comercial (30 dias), o montante será o triplo do valor inicial no final de: Alternativa **d**.

a) 4 anos, 4 meses e 20 dias.

b) 5 anos, 10 meses e 10 dias.

c) 4 anos, 5 meses e 5 dias.

d) 5 anos, 6 meses e 20 dias.

e) 3 anos, 10 meses e 5 dias.

14. (Enem) Uma empresa divide o balanço anual de vendas de seus produtos em duas partes, calculando o número de vendas dos produtos ao final de cada semestre do ano. Após o balanço do primeiro semestre, foram realizadas ações de *marketing* para os cinco produtos menos vendidos da empresa. A tabela mostra a evolução das vendas desses produtos, do primeiro para o segundo semestre.

Produto	Número de unidades vendidas no primeiro semestre	Número de unidades vendidas no segundo semestre
I	350	600
II	1000	1100
III	4000	4000
IV	850	1200
V	2000	2600

O sucesso de uma ação de *marketing* de um produto é medido pelo aumento percentual do número de unidades vendidas desse produto, do primeiro para o segundo semestre. A ação de *marketing* mais bem-sucedida foi para o produto: Alternativa **a**.

a) I. **b)** II. **c)** III. **d)** IV. **e)** V.

15. (Enem) Para construir uma piscina, cuja área total da superfície interna é igual a 40 m², uma construtora apresentou o seguinte orçamento:

- R$ 10.000,00 pela elaboração do projeto;
- R$ 40.0[illegible]
- R$ 2.500,00 [illegible] para construção da área interna da piscina.

Após a apresentação do orçamento, essa empresa decidiu reduzir o valor de elaboração do projeto em 50%, mas recalculou o valor do metro quadrado para a construção da área interna da piscina, concluindo haver a necessidade de aumentá-lo em 25%. Além disso, a construtora pretende dar um desconto nos custos fixos, de maneira que o novo valor do orçamento seja reduzido em 10% em relação ao total inicial.

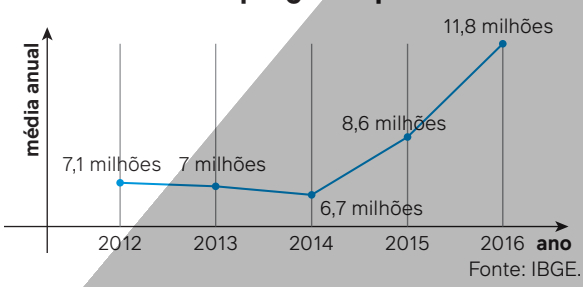
O percentual de desconto que a construtora deverá conceder nos custos fixos é de: Alternativa **d**.

a) 23,3%. **c)** 50,0%. **e)** 100,0%.

b) 25,0%. **d)** 87,5%.

16. (Uerj) A partir do gráfico, o aumento da média anual de desempregados de 2014 para 2016 está mais próximo do seguinte percentual: Alternativa **b**.

Média de desempregados por ano



Tarcísio Garbellini

Fonte: IBGE.

a) 68%. **b)** 76%. **c)** 80%. **d)** 84%.

17. (Enem) A ingestão de sódio no Brasil, que já é normalmente alta, tende a atingir os mais elevados índices no inverno, quando cresce o consumo de alimentos calóricos e condimentos. Mas o sal não é um vilão; ele pode e deve ser consumido diariamente, salvo algumas restrições. Para uma pessoa saudável, o consumo máximo de sal de cozinha (cloreto de sódio) não deve ultrapassar 6 g diárias, ou 2,4 g de sódio, considerando que o sal de cozinha é composto por 40% de sódio e 60% de cloro.

Considere uma pessoa saudável que, no decorrer de 30 dias, consuma 450 g de sal de cozinha. Seu consumo médio diário excede ao consumo máximo recomendado diariamente em: Alternativa **a**.

a) 150%. **c)** 275%. **e)** 625%.

b) 250%. **d)** 525%.

18. (UPE) Diante da crise que o país atravessa, uma financeira oferece empréstimos a servidores públicos cobrando apenas juros simples. Se uma pessoa retirar R$ 8.000,00 nessa financeira, à taxa de juros de 16% ao ano, quanto tempo levará para pagar um montante de R$ 8.320,00? Alternativa **b**.

a) 2 meses **c)** 4 meses **e)** 6 meses

b) 3 meses **d)** 5 meses

19. (UFU-MG) Um comerciante está negociando o valor V da venda à vista de uma mercadoria que foi adquirida com seu fornecedor um mês antes por R$ 1.000,00 com 4 meses de prazo para pagamento (sem pagar juros). Sabe-se que o comerciante aplica esse valor V à taxa de 2% de juros (compostos) ao mês para viabilizar o pagamento futuro da mercadoria. Para que a atualização do valor associado à venda dessa mercadoria forneça, na data do pagamento do fornecedor, um lucro líquido de R$ 200,00, a venda à vista deve ser de:

Observação: use a aproximação 1,0612 para $(1,02)^3$, e, ao expressar um valor monetário, faça o arredondamento na segunda casa decimal, considerando unidades inteiras de centavos. Alternativa **b**.

a) R$ 942,33. **c)** R$ 1.232,89.

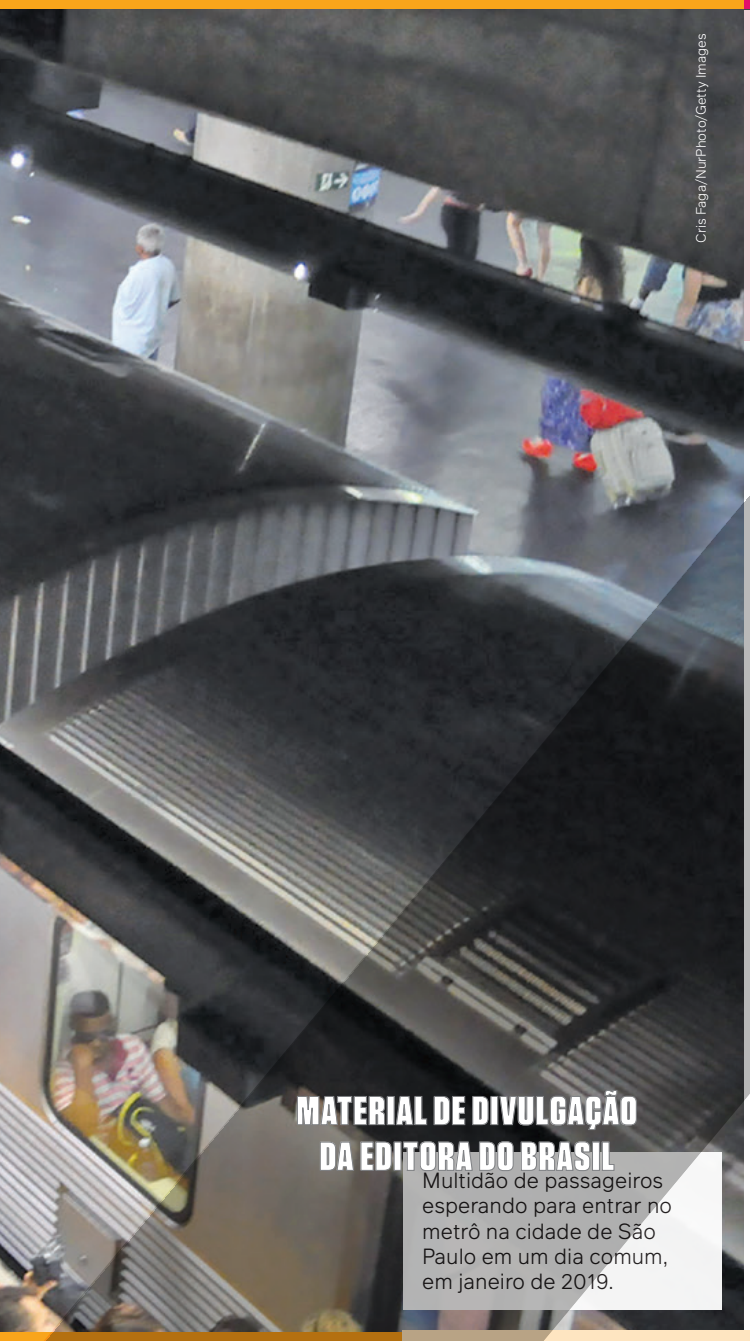
b) R$ 1.130,80. **d)** R$ 1.108,62.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

UNIDADE 2

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

FUNÇÃO EXPONENCIAL E FUNÇÃO LOGARÍTMICA



Cris Faga/NurPhoto/Getty Images

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Multidão de passageiros esperando para entrar no metrô na cidade de São Paulo em um dia comum, em janeiro de 2019.

Nesta unidade, você vai:

- analisar como operações matemáticas se comportam em diferentes conjuntos numéricos;
- conhecer os logaritmos e entender como aplicá-los em diversas situações;
- modelar situações de crescimento e decrescimento utilizando funções exponenciais e logarítmicas;
- resolver problemas modelados por funções exponenciais e logarítmicas.

Quanto uma população pode crescer?

Você já ouviu falar da teoria populacional malthusiana? Ela foi desenvolvida pelo inglês Thomas Robert Malthus, um economista e pastor anglicano que viveu do fim do século XVIII ao início do século XIX.

Segundo Malthus, uma vez que a população humana tem uma curva de crescimento muito mais acentuada do que a de produção de alimentos, no longo prazo não haverá alimento suficiente para a quantidade de pessoas no mundo.

Essa teoria não se concretizou no prazo previsto por Malthus e pôde ser refutada de algumas maneiras, embora ainda seja usada para estudos populacionais. A matemática por trás da teoria é que é irrefutável: se determinado valor variável duplica a cada intervalo de tempo enquanto outro valor é somado a uma constante a cada mesmo intervalo, o primeiro sempre ultrapassará o segundo, mesmo que comece com um valor menor.

Veja um exemplo. Se escrevermos lado a lado duas sequências, uma começando com 0,5 e duplicando a cada termo e outra começando com 10 e somando 10 a cada termo, a primeira ultrapassa a segunda a partir do 9º termo. Observe:

0,5	1	2	4	8	16	32	64	128
10	20	30	40	50	60	70	80	90

1. Suponha que determinada população de insetos cresça a uma razão semanal de 3 : 2. Isso significa que, a cada semana, a quantidade de indivíduos da população é 1,5 vez a população da semana anterior. Se essa população tem hoje 10 mil indivíduos, qual será o tamanho da população daqui a 3 semanas? 33 750 indivíduos

2. Nessas mesmas condições, em quanto tempo a população de indivíduos será de 100 mil? Orientações no Manual do Professor.

1 Crescimento exponencial

Na BNCC

Nesta unidade você vai trabalhar as competências específicas de Matemática 1, 3 e 4 e as habilidades EM13MAT101, EM13MAT304, EM13MAT305, EM13MAT403.

rblfmr/Shutterstock.com

Compradores lotam grande loja em Nova York em busca de promoções, em novembro de 2018.

O crescimento populacional mundial gerou aumento excessivo do consumo em geral e de recursos naturais, causando grande parte dos problemas ambientais que enfrentamos hoje.

Não existe consenso em relação ao impacto da dinâmica demográfica sobre o crescimento econômico, sobre o esgotamento dos recursos naturais e nem sobre seus efeitos no agravamento da degradação dos ecossistemas. Além disto, a relação entre população, economia e meio ambiente mudou ao longo da história e existe um tabu que dificulta a necessária e sensata discussão sobre os problemas populacionais.

[...]

ALVES, José Eustáquio Diniz. A dinâmica demográfica importa no crescimento econômico e na degradação ambiental [...]. *In*: UFJF. Laboratório de Demografia e Estudos Populacionais. Juiz de Fora: Ladem, 3 maio 2019. Disponível em: https://www.ufjf.br/ladem/2019/05/03/a-dinamica-demografica-importa-no-crescimento-economico-e-na-degradacao-ambiental-artigo-de-jose-eustaquio-diniz-alves/. Acesso em: 4 maio 2020.

No exemplo dado na abertura da unidade, foram comparadas duas sequências numéricas crescentes. A primeira delas, que começa no número 0,5, ultrapassa a segunda, que começa no número 10, a partir do 9º termo. Podemos dizer que a primeira tem uma **velocidade de crescimento** maior do que a segunda.

De modo geral, sequências como essas podem ser classificadas de acordo com sua velocidade de crescimento. Dizemos que a primeira tem um **crescimento exponencial**, enquanto a segunda tem um **crescimento linear**. Vamos estudar um pouco mais o crescimento exponencial.

Considere que uma folha de caderno de gramatura comum tem espessura média de 0,2 mm. Se dobrarmos essa folha ao meio e a cortarmos, empilhando os dois pedaços, teremos uma pequena pilha de papel com 0,4 mm de espessura. Ainda parece pouco, mas, se repetirmos essa operação algumas vezes, logo teremos uma pilha muito mais espessa.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para explorar

Respostas pessoais.

Forme dupla com um colega e, juntos, façam a investigação a seguir. Se necessário, utilizem uma calculadora (pode ser a do celular).

1. Dobrem uma folha de papel sulfite ao meio quantas vezes vocês conseguirem. Depois contem quantas dobras foram feitas.
2. Um de vocês deve segurar o papel dobrado e pedir ao colega que meça a espessura do bloco de papel.
3. Calculem a espessura desse bloco multiplicando 0,2 por 2 e por 2 novamente quantas vezes forem as dobras que vocês fizeram.
4. Comparem os resultados das questões 2 e 3. Eles são compatíveis?

Até janeiro de 2002 acreditava-se que o máximo de vezes que era possível dobrar uma folha de papel era 7. Naquele ano, uma jovem chamada **Britney Gallivan** quebrou esse recorde. Usando uma folha de papel higiênico com 1,2 km de comprimento e dobrando sempre no mesmo sentido, ela conseguiu fazer 12 dobras, chegando em um bloco de papel com 40 cm de espessura.

Para trabalhar melhor com conversões de medidas, consulte o tópico **Unidades de medida** presente na **Caixa de ferramentas**.

5. Agora calculem: Qual era a espessura da folha de papel higiênico dobrada por Britney originalmente?
Aproximadamente 0,01 cm ou 0,1 mm.

6. Se fosse possível dobrar essa folha 30 vezes, qual seria a altura do bloco?
Aproximadamente 1 073 741 824 mm, ou 1 073 km.

Nós estamos acostumados a pensar no crescimento como algo linear. Isso porque lidamos diariamente com aumentos lineares, por exemplo, quando medimos o tempo. Sabendo que um ano tem 12 meses, rapidamente entendemos que dois anos têm 24 meses e três anos têm 36 meses. Esse crescimento linear ocorre quando a cada cálculo somamos um valor fixo.

O crescimento exponencial, por sua vez, ocorre quando a cada cálculo multiplicamos um valor, em vez de somar, como estamos fazendo com a espessura da folha de papel.

Para entender melhor a velocidade do crescimento exponencial, podemos utilizar um gráfico.

Suponha que uma notícia falsa (*fake news*) seja passada por um indivíduo para 3 outros em uma hora. Supondo que cada indivíduo que recebe a mensagem também a repassa para 3 outros novos indivíduos (que ainda não receberam a notícia por outras pessoas) a cada hora, o número de novos indivíduos a receber a notícia triplica por hora. Veja:

Tempo (h)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Indivíduos (unidade)	1	3	9	27	81	243	729	2 187	6 561	19 683	59 049

Propagação de *fake news*

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Fonte: Dados fictícios.

Para compreender melhor esse gráfico, consulte o tópico **A linguagem das funções** na **Caixa de ferramentas**.

Note que, embora no início pareça que a propagação da notícia tem uma curva baixa de crescimento, após certo tempo a velocidade de crescimento é cada vez mais visível, originando uma "explosão" de *fake news*.

Para pensar e discutir

1. Quantos novos indivíduos receberão a notícia após passarem mais duas horas? 59 049 · 3 · 3 = 531 441 novos indivíduos

2. Utilizando a notação de potência, podemos dizer que, após 1 hora, o número de pessoas que recebe a notícia é $1 \cdot 3 = 3^1$. Da mesma forma, após 2 horas, o número de novos indivíduos é $1 \cdot 3 \cdot 3 = 3^2$. Utilizando essa mesma notação, qual será o número de novos indivíduos após n horas? (Considere n como um número natural, ou seja, 1, 2, 3, ...) 3^n

3. Os pares ordenados representados na tabela estão todos marcados no gráfico. É possível conectar esses pontos com uma linha contínua como forma de representar a quantidade de indivíduos dessa população ao longo do tempo? Por quê? Não. Representar esse gráfico de forma contínua seria presumir quantidades contínuas de indivíduos, por exemplo, 30,4 pessoas.

Os exemplos anteriores nos mostram que uma forma de obter o crescimento exponencial é multiplicar um número muitas vezes pelo mesmo fator. A essa operação damos o nome de potenciação. Analisando esse exemplo mais a fundo, algumas questões podem ser levantadas:

- É possível determinar quantas pessoas receberão a notícia após 10 minutos?
- Se após 10 horas a quantidade de novas pessoas a receber a notícia é representada por 3^{10}, passadas 10 horas e meia (10,5 horas), podemos representar essa quantidade por $3^{10,5}$? O que significa esse número? Quanto ele vale?

Investigando a potenciação

Na potenciação, chamamos de base o número que aparece na linha e de expoente o número que aparece acima dele:

$$\underbrace{a}_{\text{base}}{}^{b \rightarrow \text{expoente}} = \underbrace{c}_{\text{potência}}$$

Uma forma comum de entender essa operação é vê-la como uma multiplicação de vários fatores iguais à base, sendo o número de fatores definido pelo expoente. Assim:

- $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$
- $1^{10} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
- $(\sqrt{5})^3 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{125}$
- $\left(\frac{2}{5}\right)^5 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{32}{3\,125}$

Para efetuar essas operações é preciso se lembrar das regras de multiplicação com diferentes "tipos" de número, por exemplo, multiplicação de raízes ou frações. Ao expandir o estudo sobre esses diferentes números, veremos que a potenciação pode ser entendida de outras formas. Antes, vamos relembrar as propriedades das potências de expoente natural.

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Junte-se a dois colegas para discutir, com base nos exemplos anteriores, algumas definições e propriedades da potenciação.

1. Para cada uma das afirmações abaixo, sendo n um número natural qualquer (como 0, 1, 2, ...), testem alguns valores de n e digam se a afirmação é verdadeira. Se for verdadeira, expliquem. Se for falsa, mostrem um exemplo que seja contrário a ela e reescrevam-na para que se torne verdadeira.

a) Para qualquer valor de n, $1^n = 1$. Verdadeira.

b) Para qualquer valor de n, $(-1)^n = -1$. Falsa.

c) Para qualquer valor de n natural, $0^n = 0$. Falsa.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

2. Sabemos que a multiplicação e a adição têm suas propriedades (associativa e comutativa, além da distributiva da multiplicação sobre a adição). A potenciação, por sua vez, tem outras, como podem observar a seguir.

Exemplo

Quando multiplicamos duas potências de mesma base, podemos conservar a base e somar os expoentes. Assim:

$$2^3 \cdot 2^2 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ fatores}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2}_{2 \text{ fatores}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{3+2=5 \text{ fatores}} = 2^5$$

De modo geral, sendo a um número real não nulo e sendo m e n números naturais, temos:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ fatores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ fatores}} = a^{m+n}$$

Discutam esse exemplo com os colegas e tentem explicar por que ele é válido. Em seguida, de acordo com o exemplo, expliquem por que as propriedades a seguir são verdadeiras para qualquer número real a não nulo.

a) Sendo m e n números naturais, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

b) Sendo m e n números naturais com $m \geqslant n$, $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Atenção!

Estudaremos mais adiante o que ocorre com as propriedades quando a base é zero. A princípio vamos nos ater em bases não nulas.

3. No item **b** da atividade anterior, foi dada a condição $m \geqslant n$. Vamos investigar o que pode acontecer quando essa condição não é respeitada. Escolham dois valores para m e n com $m < n$.

a) Calculem $2^m : 2^n$.

b) Suponham que a propriedade $a^m : a^n = a^{m-n}$ é válida nesse caso. Qual é o expoente da base 2 no cálculo que vocês fizeram no item **a**?

c) Repitam esse procedimento algumas vezes: escolham dois valores para m e n com $m < n$, calculem $2^m : 2^n$ e igualem o resultado a 2^{m-n}. Vocês conseguem identificar alguma relação entre o resultado e a potência de expoente negativo?

4. Sendo m e n números naturais com $m < n$, sabemos que a operação $m - n$ tem resultado negativo.

a) Descrevam uma possível forma de encontrar o resultado de uma potência com expoente negativo.

b) De acordo com sua proposta, qual é o resultado de 5^{-2}?

Compartilhem suas ideias com a turma. A seguir iremos definir a potenciação com expoentes não naturais.

Potências de expoente racional

Até aqui vimos as definições e propriedades da potenciação com expoente natural. Para seguir nosso estudo, há algumas definições importantes que precisam ser observadas. Elas garantem a validade das propriedades para valores específicos de m e n.

VW Pics/Universal Images Group/Getty Images

A estrela Alpha Centauri A fica a uma distância aproximada de $4 \cdot 10^{14}$ km da Terra.

Vamos ver agora o que acontece com a potenciação quando o expoente não é natural. Para isso vamos considerar que m é um número natural diferente de zero, de modo que $-m$ é um número negativo. Sendo $a \neq 0$, podemos definir a potenciação com expoentes inteiros negativos da seguinte maneira:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

- $a^1 = a$
- Se $a \neq 0$, $a^0 = 1$.
- Se $m \neq 0$, $0^m = 0$.

Atenção!

Note que a operação $0^m = 0$ é válida para qualquer valor de m não nulo. Já 0^0 representa uma indefinição, uma vez que 0 elevado a qualquer número é zero e qualquer número elevado a 0 é 1.

Atenção!

Estudaremos mais adiante o que ocorre com as propriedades e definições quando a base é negativa. A princípio vamos nos ater em valores estritamente positivos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Seguindo, vamos [illegible] levar um número a uma potência não inteira. Considere que m é um número inteiro e n é um natural maior que 1. Sendo a um número real positivo, podemos definir a potenciação com expoentes não inteiros da seguinte maneira:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Para compreender melhor a definição de potência com expoente fracionário e sua relação com as propriedades das potências, é necessário relembrar que a radiciação é uma operação inversa à potenciação. Isso significa que, sendo n um número natural e b um número real com $b \geqslant 0$, tal que $b^n = a$, podemos dizer que a raiz n-ésima (lê-se *enésima*) de a é b. Assim: $\sqrt[n]{a} = b$. Veja como, com base nesse conceito, a definição de potência com expoente fracionário parece ser coerente com o que sabemos sobre radiciação e com as propriedades da potenciação vistas anteriormente.

Sendo a um número real positivo e $\sqrt{a}$ o número tal que $(\sqrt{a})^2 = a$, sabendo que $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, temos:

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow (3^{\frac{1}{2}})^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow (3^{\frac{1}{2}})^2 = 3 = 3^1$$

Como $(3^{\frac{1}{2}})^2 = 3^1$ e $1 = \frac{1}{2} \cdot 2$, podemos afirmar que $(3^{\frac{1}{2}})^2 = 3^{\frac{1}{2} \cdot 2}$. Será que com isso podemos afirmar que $(3^m)^n = 3^{m \cdot n}$ mesmo que m e n não sejam naturais?

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Sugestão de encaminhamento: em duplas

Converse com um colega sobre as definições e as propriedades da potenciação apresentadas a seguir.

Definições

Seja a um número real positivo.

Sejam m e n números naturais não nulos e $n > 1$; sabemos que $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ fatores}}$. Temos então as seguintes definições:

- $a^0 = 1$
- $0^m = 0$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- $a^1 = a$
- $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$

Propriedades

Seja a um número real positivo.

Sejam m e n números naturais não nulos, $m \geqslant n$; temos:

I. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

II. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

III. $a^m : a^n = a^{m-n}$

Com base no estudo dessas definições, faça o que se pede:

1. Por que podemos afirmar que, com essas definições, é possível determinar a^m qualquer que seja o valor de m racional? (Considerando que a base a é um número real positivo.)

2. Escolha valores para m e n que sejam números racionais negativos e não inteiros. Escolha também um valor positivo para a.

a) Utilizando as definições, calcule a^m, a^n, e a^{m+n}. Verifique se $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

b) Utilizando as definições, calcule a^m, $(a^m)^n$ e $a^{m \cdot n}$. Verifique se $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

c) Utilizando as definições, calcule a^m, a^n, e a^{m-n}. Verifique se $a^m : a^n = a^{m-n}$.

3. Com base em suas respostas para a questão 2, você acha que é possível supor que as propriedades I, II e III da potenciação permaneçam válidas para todos os valores de m e n racionais? Quais seriam as restrições para os valores de m e n nesse caso?

Demonstrar que uma propriedade é válida para diversos campos numéricos nem sempre é uma tarefa fácil. Aqui vamos demonstrar apenas que, utilizando as definições e as propriedades dadas, podemos estender a propriedade I para os racionais positivos. Veja:

1. Se m e n são racionais positivos, então ambos podem ser escritos na forma de fração irredutível. Digamos que $m = \dfrac{p}{q}$ e $n = \dfrac{r}{s}$ com p, q, r e s naturais, sendo q e s não nulos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Assim, $a^m = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ e $a^n = a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r}$, com $a > 0$.

3. Utilizando as regras operatórias entre radicais, temos:

$$a^m \cdot a^n = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[q \cdot s]{a^{p \cdot s}} \cdot \sqrt[q \cdot s]{a^{q \cdot r}} = \sqrt[q \cdot s]{a^{p \cdot s} \cdot a^{q \cdot r}}$$

4. Como a propriedade I é válida para naturais e os números $p \cdot s$ e $q \cdot r$ são naturais, então:

$$a^m \cdot a^n = \sqrt[q \cdot s]{a^{p \cdot s + q \cdot r}} = a^{\frac{p \cdot s + q \cdot r}{q \cdot s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}} = a^{m+n}$$

As demonstrações das outras propriedades podem ser feitas de forma análoga a essa e você pode tentar fazê-las. De todo modo, afirma-se que as definições da potenciação para valores negativos ou não inteiros garantem que as propriedades I, II e III são válidas para quaisquer expoentes racionais (sendo a base $a > 0$).

Como vimos, a definição da potenciação como multiplicação de fatores iguais é válida apenas quando o expoente é natural, mas essa operação se estende para os outros conjuntos, mantendo suas propriedades. Assim, quando o expoente é um número negativo ou, ainda, um número não inteiro, não temos como manter essa definição. Afinal, como a utilizaríamos para explicar 5^{-2}?

Atenção!

Note que escolhemos demonstrar primeiro a validade para m e n racionais, antes de demonstrá-la para números negativos. Por isso, a demonstração só é válida para racionais positivos.

Ao demonstrar que as propriedades são válidas também para números negativos, concluímos que são válidas para valores negativos de p e r; sendo assim, valem para racionais negativos também.

Para aprofundar essa ideia, vamos retomar a situação vista anteriormente em que uma notícia falsa era passada para 3 novas pessoas a cada hora.

Para retomar

- É possível determinar quantas pessoas receberão a notícia após 10 minutos?
- Se após 10 horas a quantidade de novas pessoas a receber a notícia é representada por 3^{10}, passadas 10 horas e meia (10,5 horas), podemos representar essa quantidade por $3^{10,5}$? O que significa esse número? Quanto ele vale?

No conjunto dos números naturais, essas questões não têm resposta. Entretanto, quando estudamos potências com expoentes fracionários, podemos encontrar os resultados dessas operações.

Para pensar e discutir

Respostas no Manual do Professor.

Considere o contexto das notícias falsas apresentado anteriormente para responder às questões a seguir.

1. Como podemos representar 10 minutos em horas? Utilize uma fração. $\frac{1}{6}$
2. Como podemos representar de maneira fracionária o número 10,5? $\frac{21}{2}$
3. Utilizando a definição $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ e uma calculadora científica, calcule o número de novas pessoas impactadas pelas *fake news* em 10 minutos e em 10 horas e meia.
4. Esses resultados são condizentes com o contexto do problema? Por quê?
5. Com base no que estudamos até aqui, como você definiria a operação de potenciação?

Para entendermos a passagem da potenciação do conjunto dos naturais para o conjunto dos reais, é preciso estudar outros modelos, mas para isso é necessário avançar um pouco mais e verificar a existência da potenciação com expoentes irracionais.

Potências de expoente irracional

Vimos até aqui que é possível definir a potenciação mesmo quando o expoente é um número negativo, uma fração ou um inteiro. Observamos também que as propriedades da potenciação que valem para expoentes naturais permanecem válidas para outros expoentes **racionais**. Ainda falta entender o que acontece quando utilizamos expoentes **irracionais**. Para isso, vamos retomar um pouco o conceito desses números.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Ao longo do Ensino Fundamental (e da história da Matemática), os números vão ganhando significados diversos de acordo com os campos em que são aplicados.

De modo geral, utilizamos os números naturais para contar quantidades. Assim, quando aprendemos a contar, criamos a ideia de que nada pode ser menor que zero até conhecermos os números negativos. Ao ampliar nosso conhecimento para os números inteiros, percebemos que podemos usar números também para contar dívidas e quantidades faltantes.

Além dos inteiros, aprendemos que existem número racionais, que nos ajudam a comparar e medir grandezas. Aprendemos também que todos esses números podem ser ordenados em uma reta numerada e escritos na forma decimal, mesmo que alguns racionais não possam ser representados na forma decimal com uma notação exata: Podemos entender $\frac{1}{3}$ como o resultado da divisão de 1 por 3 e, em escrita decimal, podemos representar esse resultado por 1,333... ou $1,\overline{3}$. Em ambos os casos, utilizamos um símbolo (as reticências no primeiro caso e a barra sobre o 3 no segundo) para mostrar que esse resultado é infinito e periódico, ou seja, não pode ser escrito de maneira finita utilizando a notação decimal.

Ocorre, entretanto, que nem todos os pontos da reta numerada podem ser marcados por um número racional. Já sabemos que existem segmentos que medem π (por exemplo,

Para relembrar o que são números racionais e irracionais, consulte o tópico **Conjuntos numéricos** na **Caixa de ferramentas**.

o comprimento do círculo cujo raio mede $\frac{1}{2}$ unidade) ou $\sqrt{2}$ (por exemplo, a diagonal do quadrado cujo lado mede 1 unidade). Sabemos também que esses números não podem ser escritos na forma de fração. Como podemos, então, saber o valor de $\sqrt{2}$? Como saber onde ele se encaixa na reta numerada? Como uma calculadora escreve $\sqrt{2}$ como um número decimal?

A resposta para todas essas perguntas é a mesma: por aproximação. Veja:

- Sabemos que $(\sqrt{2})^2 = 2$.
- Como $1^2 = 1$ e $2^2 = 4$ e $1 < 2 < 4$, podemos afirmar que $1^2 < (\sqrt{2})^2 < 2^2$.
- Conclui-se que $1 < \sqrt{2} < 2$.
- Tirando-se a média entre 1 e 2, obtemos $3 : 2 = 1{,}5$. Temos que $1{,}5^2 = 2{,}25 > 2$.
- Logo, $1 < \sqrt{2} < 1{,}5$.
- Repetindo o processo, temos que a média entre 1 e 1,5 é 1,25. Além disso, $1{,}25^2 = 1{,}5625 < 2$.
- Logo, $1{,}25 < \sqrt{2} < 1{,}5$.

Repetindo esse processo várias vezes, chega-se à aproximação $\sqrt{2} \cong 1{,}41421356...$

Note que, mesmo usando as reticências, não podemos utilizar o sinal "=", pois não há indicação de quais serão as próximas casas decimais.

Para explorar

As **calculadoras**, para criar aproximações dos números irracionais, não utilizam um processo investigativo como o exposto acima, mas uma fórmula que define uma sequência de aproximações para cada número. No caso da $\sqrt{2}$, uma fórmula que aproxima seu valor é:

$$a_n = \frac{(a_{n-1})^2 + 2}{2 \cdot a_{n-1}},\ a_1 = 1$$

Para entender melhor as calculadoras consulte o tópico **Recursos digitais** na **Caixa de ferramentas**.

Em duplas, sigam o exemplo para calcular aproximações de $\sqrt{2}$. Utilizando essas aproximações, vamos verificar o que acontece quando tentamos calcular $2^{\sqrt{2}}$. Utilizem para essa atividade uma calculadora científica ou uma planilha eletrônica.

Reproduzam a tabela abaixo e preencham até $n = 7$. Em seguida, respondam às questões.

n	$a_n \cong \sqrt{2}$	$2^{a_n} \cong 2^{\sqrt{2}}$
1	$a_1 = 1$	$2^1 = 2$
2	$a_2 = \left(\frac{a_1^2 + 2}{2 \cdot a_1}\right) = \left(\frac{1^2 + 2}{2}\right) = 1{,}5$	$2^{1{,}5} \cong 2{,}8284271...$
3	$a_2 = \left(\frac{a_2^2 + 2}{2 \cdot a_2}\right) = \left(\frac{2{,}25 + 2}{3}\right) = 1{,}41666...$	$2^{1{,}4166...} \cong 2{,}6696796...$
⋮	⋮	⋮

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1. Quantas casas decimais aparecem na calculadora? Resposta pessoal. Em geral são 8 casas.

2. A partir de qual valor de n as linhas da tabela passaram a ficar iguais? Por que vocês acham que isso acontece?
Resposta pessoal. Em geral, a calculadora trunca o resultado após 8 casas e arredonda o processo, mesmo que seja repetido inúmeras vezes.

3. Com base nesse exercício, vocês acham que é possível determinar o valor de uma potência com expoente irracional? Resposta pessoal.

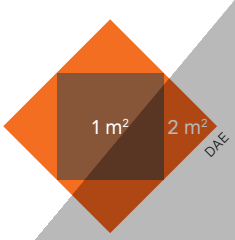
Quando utilizamos calculadoras para fazer operações que envolvam números irracionais ou dízimas periódicas, a calculadora arredonda o número para a última casa que é possível exibir no leitor. Por isso a divisão 2 : 3 resulta normalmente em 0,66666667. Isso acontece porque processadores precisam encerrar o cálculo em algum momento, diferentemente do nosso cérebro, que é capaz de conceber a ideia da escrita 0,666...

Ainda assim, as aproximações são bastante úteis, como vimos nesse experimento. Os resultados indicam que potências de expoente irracional têm um valor definido, mesmo que esse valor possa ser irracional e por isso só possa ser escrito com números decimais, por aproximação.

Agora, interpretando as potências de expoente real, podemos verificar como o crescimento exponencial se aplica a um modelo. Ainda que esse modelo seja imaginário, pode auxiliar na representação dessa operação.

Imagine que uma pequena faísca atinja uma enorme área coberta de palha e inicie um incêndio. Considere que, em determinado instante, a área atingida pelo fogo seja de 1 m². A partir desse ponto, essa área cresce constantemente, duplicando a cada minuto.

Note que, após 1 minuto, a área atingida será de 2 m². Após 2 minutos, teremos 4 m². Após 3 minutos, teremos 8 m² e após n minutos teremos uma área incendiada de 2^n m².



DAE

Mauricio Simonetti/Pulsar Imagens

Queimada em pasto no município de Torrinha, no interior do estado de São Paulo, 2019.

Para pensar e discutir

1. Como podemos representar a área atingida pelo fogo após 3,5 minutos (3min30s)? $2^{3,5} = 2^{\frac{7}{2}} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$
2. Como podemos representar a área atingida pelo fogo 30 segundos antes do incêndio ocupar 1 m²? $2^{-0,5} = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. Nesse modelo, o que significa uma área de $2^{\sqrt{2}}$ m²? Resposta no Manual do Professor.

Esse modelo ilustra como a operação de potenciação pode se estender de um conjunto discreto para um conjunto contínuo. Vamos retomar, a seguir, o que aprendemos.

- A potenciação, inicialmente definida para expoentes naturais, tem três propriedades, que são válidas para qualquer base não nula.
- Podemos definir a potenciação também para expoentes inteiros negativos e para expoentes racionais não inteiros, sejam eles positivos, sejam negativos.
- As três propriedades da potenciação se estendem para quaisquer expoentes racionais, desde que tenhamos restringido a base para valores estritamente positivos.
- As potências com expoente irracional podem ser obtidas por aproximações de potências com expoentes racionais. É intuitivo supor que as propriedades permanecerão válidas.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Vamos assumir que as três propriedades permanecem válidas para expoentes irracionais, considerando que a base é ainda um real positivo. Embora a noção intuitiva não seja válida como demonstração, a afirmação é verdadeira. Para demonstrá-la seria preciso recorrer a técnicas que escapam do escopo desta etapa de ensino.

Vamos registrar essas conclusões.

Definições da potenciação

Sendo a, m e n números reais, temos:

- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$ para todo $a \neq 0$
- $0^m = 0$ para todo $m \neq 0$
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ para todo $a \neq 0$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ para todo $a > 0$, com n inteiro e $n > 1$

Propriedades da potenciação

Sendo a, m e n números reais, com $a > 0$, temos:

I. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

II. $a^m : a^n = a^{m-n}$

III. $a^{(m)^n} = a^{m \cdot n}$

Para pensar e discutir

Para fazer as operações a seguir, utilize uma calculadora científica. Antes, garanta que você compreendeu as definições da potenciação com expoentes reais.

1. Como você calcularia $3^{1,5}$ utilizando uma calculadora comum? (Utilize apenas as operações de multiplicação e a raiz quadrada.) $3^{1,5} = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3} \cong 5{,}20$
2. Usando uma calculadora científica, determine um valor para $\sqrt{3}$ e um valor de $3^{\sqrt{3}}$. $\sqrt{3} \cong 1{,}73$ e $3^{\sqrt{3}} \cong 6{,}705$
   a) Compare os valores de 1,5 e $\sqrt{3}$. Qual é maior? $1{,}5 < \sqrt{3}$
   b) Compare os valores de $3^{1,5}$ e $3^{\sqrt{3}}$. Qual é maior? $3^{1,5} < 3^{\sqrt{3}}$
3. O que os resultados anteriores podem dizer acerca do significado da potenciação com expoentes irracionais e o crescimento exponencial?
   Escreva um parágrafo para explicar o que você acha que significa elevar uma base qualquer a um expoente real. Orientações no Manual do Professor.

Investigando as bases da potenciação

Agora que vimos que a operação da potenciação pode ser efetuada com expoentes reais, vamos ver o que acontece quando variamos as bases.

Você deve ter notado que, nas definições anteriores, restringimos a base primeiro a valores não nulos e, em seguida, a valores estritamente positivos. Isso acontece porque algumas operações não são definidas ou não têm resultados reais para alguns números. Veja a seguir.

- Em qualquer conjunto numérico, é impossível dividir por zero.
- A operação 0^0 não está definida em nenhum conjunto numérico.
- Embora seja possível calcular a^m para quaisquer valores reais de a e m, excetuando quando $a = m = 0$, a radiciação não tem a mesma condição. De fato, definimos $\sqrt[m]{a}$ para m natural e maior que 1 e, ainda assim, é preciso destacar que, quando a é negativo, m deve ser ímpar.

Vamos investigar como essas restrições influenciam as definições dadas anteriormente.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir

Orientações no Manual do Professor.

Veja as definições apresentadas na página anterior e responda:

1. Por que na definição $a^0 = 1$ devemos ter $a \neq 0$?
2. Por que na definição $0^m = 0$ devemos ter $m \neq 0$?
3. Por que na definição $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ devemos ter $a \neq 0$?
4. Por que na definição $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ devemos ter $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$?
5. Por que na definição das propriedades, devemos ter $a > 0$?

Note que a restrição das propriedades para o caso em que $a > 0$ é necessária para que possamos considerar m e n reais. Se m e n forem inteiros, as propriedades são válidas para valores negativos de a. Entretanto, se queremos considerar valores racionais para m e n, é preciso que $\sqrt[n]{a^m}$ exista sempre, e isso só é garantido para $a > 0$. Além disso, a definição das potências de expoente irracional é feita por aproximação de potências com expoente racional, ou seja, também depende de termos $a > 0$.

Seguindo a investigação, vamos ver como essas restrições influenciam o crescimento exponencial.

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Reúna-se com um ou dois colegas para fazer as operações a seguir. Escolham valores para a base a de acordo com as condições dadas e investiguem o que acontece com as potências quando aplicamos os expoentes determinados.

Expoente	Base $a < 0$	Base nula ($a = 0$)	Base $0 < a < 1$	Base unitária ($a = 1$)	Base $a > 1$
-2					
-1					
0					
1					
2					

Discutam os resultados e escrevam um parágrafo para explicar as questões a seguir.

1. Por que quando estudamos crescimento exponencial não consideramos bases negativas ou nulas?

2. O que acontece com o crescimento exponencial (com base positiva) quando:

a) a base é menor que 1?

b) a base é 1?

c) a base é maior que 1?

3. Considerem agora dois valores a e b reais positivos e m um real qualquer. Expliquem por que as afirmações são verdadeiras.

a) $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

b) $a^m : b^m = (a : b)^m$

Estamos finalizando a investigação da potenciação. Em seguida veremos como o crescimento exponencial se aplica a diversos contextos. Antes, para formalizar o que vimos sobre as diferentes bases, vamos definir mais algumas propriedades.

Primeiro considere que, se $a^n = 1$, então $n = 0$. Isso deve ser garantido, uma vez que, caso existisse algum $n \neq 0$, para esse a, haveria infinitos valores x para os quais $a^x = 1$. Vamos partir dessa premissa para as demonstrações e conclusões.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, temos $a^n = a^m$ se e somente se $n = m$. Demonstrando:

$$a^n = a^m \Leftrightarrow \frac{a^n}{a^m} = 1 \Leftrightarrow a^{n-m} = 1 \Leftrightarrow n - m = 0 \Leftrightarrow n = m$$

Além disso, podemos observar que, se $a > 1$, as potências de a aumentam quando aumentamos o expoente. Assim:

Se $a > 1$ e $n > m$, então $a^n > a^m$.

Se $0 < a < 1$ e $n > m$, então $a^n < a^m$.

Note que, quando $a > 1$, ao aumentarmos o valor do expoente, aumentamos a potência. Essa ideia é condizente com o modelo da área incendiada visto anteriormente. Entretanto, se $0 < a < 1$, a potência diminui quando aumentamos o expoente. Uma forma de aplicarmos isso ao modelo é considerarmos uma ideia análoga.

Suponha uma situação em que ocorre um incêndio, exatamente como vimos no modelo anterior. Considere agora que, em determinado instante, a área que **não está queimada** tem 1 m^2 e que, a cada minuto, essa área é reduzida pela metade.

Outras propriedades da potenciação

Sendo a, b, m, $n \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $b > 0$, temos:

I. Se $a^m = a^n$, então $m = n$.

II. Para $0 < a < 1$, se $m > n$, então $a^m < a^n$.

III. Para $a > 1$, se $m > n$, então $a^m > a^n$.

IV. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

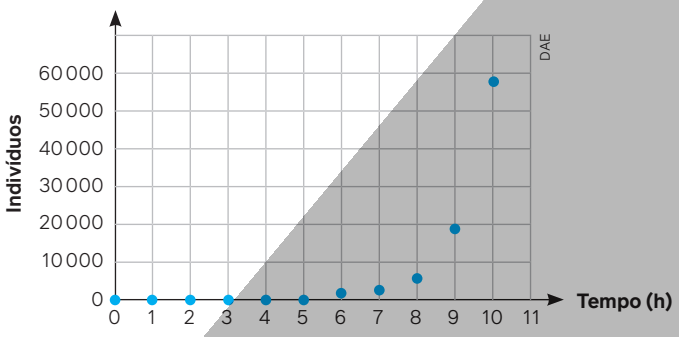
V. $a^m : b^m = (a : b)^m$

2 A função exponencial

Você deve estar lembrado que uma função é uma relação entre duas variáveis. Vamos usar esse conceito na análise da relação que utilizamos para exemplificar o crescimento exponencial. Para isso vamos retomar o crescimento das *fake news* visto no início da unidade.

Para retomar

Propagação de *fake news*



Fonte: Dados fictícios.

Os pares ordenados representados na tabela da página 49 estão todos marcados no gráfico ao lado. É possível conectar esses pontos com uma linha contínua como forma de representar a quantidade de indivíduos dessa população ao longo do tempo? Por quê?

Orientações no Manual do Professor.

Para auxiliar nas atividades a seguir, consulte o tópico **A linguagem das funções**. na **Caixa de ferramentas**

GLOSSÁRIO

Variável contínua: é aquela que assume valores racionais ou irracionais e representa grandezas que, de modo geral, só podem ser quantificadas escolhendo-se uma unidade de medida compatível.

Variável discreta: é aquela que assume valores inteiros e representa grandezas contáveis.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

Analisando essa situação, podemos dizer que a quantidade de novas pessoas que recebem a notícia falsa aumenta com o tempo. Utilizando t para tempo e q para a quantidade de indivíduos, podemos dizer que as variáveis q e t estão relacionadas. Note que o tempo, embora seja uma **variável contínua**, está assumindo aqui apenas valores inteiros, uma vez que consideramos "1 hora" como o tempo que cada pessoa demora para espalhar as notícias. A quantidade de indivíduos impactados, por sua vez, é uma **variável discreta** que só pode assumir valores naturais.

Reveja a resposta para a pergunta retomada no gráfico. Com base no que vimos sobre variáveis discretas e contínuas e sobre a potenciação em diversos conjuntos, como você incrementaria sua resposta?

Para explorar

Resolva as questões 1, 2 e 3 a seguir. Depois, reúna-se com um colega para comparar os resultados e escrevam juntos uma conclusão para a questão 4.

1. Com base na definição de função, explique por que podemos dizer que a relação entre a quantidade de novas pessoas impactadas pelas *fake news* está em função do tempo. Resposta pessoal.
2. Determine o domínio e o contradomínio dessa função. $D = CD = \mathbb{N}$
3. Escreva a lei de formação dessa função. Utilize a linguagem simbólica apropriada. $q: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $q(t) = 3^t$
4. Suponham que vocês trabalham em uma agência de combate à *fake news* e receberam a informação dada no início da unidade, de que "uma notícia falsa é passada por um indivíduo para 3 outros em uma hora". Vocês acham que as respostas que vocês encontraram para as questões 1, 2 e 3 podem ajudar a tomar decisões acerca do combate às *fake news*? Como vocês usariam essas informações? Respostas pessoais.

As funções exponenciais são usadas para modelar situações em que ocorre o crescimento exponencial. Conhecer o funcionamento dessas relações pode ser útil para analisar e compreender uma série de situações, descobrindo como agir nesses casos.

De modo geral, denominamos **função exponencial** as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do tipo:

$$f(x) = a^x, \text{ com } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Note que, na lei da função, x é a variável e a é um valor determinado. Quando usamos letras para representar valores na função que não são variáveis, damos a essas letras o nome de **parâmetro**.

Observe que a característica principal da função é o fato de que a variável figura no expoente. Assim, não podemos chamar de exponencial uma função em que a variável não esteja no expoente. Além disso, como vimos em contextos anteriores, essas funções podem ter como domínio outros subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Para pensar e discutir

Orientações no Manual do Professor.

Com base na definição dada para a função exponencial, faça o que se pede.

1. Explique por que o parâmetro a não pode ser negativo, 0 ou 1.
2. Mostre que, sendo $f(x) = a^x$, então $f(1) = a$ para todo a.
3. Mostre que, sendo $f(x) = a^x$, então $f(m + n) = f(m) \cdot f(n)$ para todo a.

Como vimos anteriormente, entender o crescimento exponencial e a potenciação é fundamental para compreender a função exponencial. Por exemplo, uma definição da função exponencial pode ser dada com base na seguinte propriedade:

Seja f: uma função tal que
- $f(m + n) = f(m) \cdot f(n)$ e
- $f(1) = a$, com $a > 0$,

então f é uma exponencial do tipo $f(x) = a^x$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Vamos ver [illegible] função exponencial para analisar um contexto de crescimento ex[illegible]

Para explorar

Junte-se a dois colegas para fazer algumas investigações. Considerem para isso que vocês estão organizando um experimento em que foi colocada uma única bactéria da espécie *Escherichia coli* em uma placa em condições favoráveis para sua reprodução. Sabe-se que nessas condições cada indivíduo dessa espécie se duplica em 20 minutos. O experimento consistirá em observar a quantidade de bactérias a cada 20 minutos.

1. Suponham que as bactérias se reproduzam de acordo com a velocidade citada no texto. Chamando de n a quantidade de intervalos de 20 minutos em que a observação será feita e $f(n)$ a quantidade de bactérias observadas, completem a tabela a seguir indicando os valores esperados para o experimento.

Cortesia Manfred Rohde, Helmholtz-Zentrum fuer Infektionsforschung (HZI)/Getty Images

Colônia da bactéria *Escherichia coli*, fotografada por microscópio eletrônico com ampliação aproximada de 330 vezes.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$											
	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024

2. Determinem a lei de formação de $f(n)$. $f(n) = 2^n$

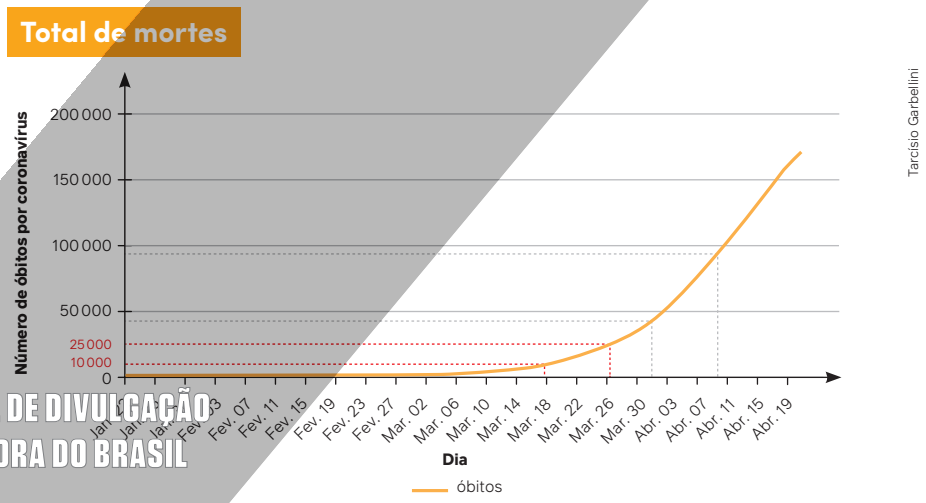
3. Considerando que o experimento durará exatamente duas horas, quais devem ser o domínio e a imagem da função? $D = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ e $Im = \{1; 2; 4; 8; 16; 32; 64\}$.

4. Considere que o experimento tenha durado mais de duas horas e que, na 20ª observação, notou-se que as bactérias haviam ocupado toda a placa. Em qual observação as bactérias teriam ocupado metade da placa?
Na 19ª observação.

O experimento das bactérias nos auxilia a relacionar o crescimento exponencial com a função exponencial, exibindo um modelo em que é possível restringir o domínio e a imagem da função de acordo com o contexto. Uma forma de aprofundar esse estudo é observar o gráfico das funções exponenciais.

O gráfico da função exponencial

Observe o gráfico a seguir. As variáveis envolvidas são o número de mortes por semana, entre janeiro e abril de 2020, devido à pandemia de covid-19 que assolou o mundo naquele ano.



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Fonte: CORONAVIRUS worldwide graphs. *In*: WORLDOMETER. [*S. l.*], [2020]. Disponível em: https://www.worldometers.info/coronavirus/worldwide-graphs/#total-deaths. Acesso em: 21 abr. 2020.

Apenas observando a curva, podemos supor que o gráfico apresente um crescimento exponencial. Entretanto, para verificar essa informação, é preciso estudar os valores com mais profundidade.

Antes de analisar o gráfico, devemos considerar algumas informações.

- Esse é um gráfico estatístico que mostra a progressão do número de mortes ao longo dos dias. Diferentemente dos gráficos de função, gráficos estatísticos não têm domínio, imagem e lei de formação.
- Quando modelamos situações reais usando funções, é preciso escolher as funções que melhor representem os dados estatísticos. Isso inclui definir o domínio e a lei de formação de acordo com o contexto e os dados apresentados.
- Para escolher a lei de formação da função e seu domínio é preciso observar as unidades e a natureza dos dados apresentados. Aqui, consideramos que o eixo horizontal está demarcado em dias (cada trecho representa 4 dias) e o eixo vertical está demarcado em milhares de mortes (cada linha cinza representa 50 000 mortes).

Para pensar e discutir

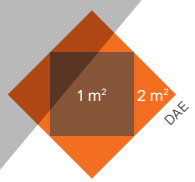
Considere que no dia 0 (22 de janeiro) ocorreu a primeira morte e no dia 56 (18 de março) já haviam morrido 10 000 pessoas, como mostra a primeira linha vermelha do gráfico. Responda às questões a seguir.

1. Sendo $f(x) = a^x$ uma função utilizada para modelar esse problema, qual deve ser o valor de a, de modo que esses dois pares de dados pertençam à função? $f(x) = (\sqrt[56]{10\,000})^x = 10\,000^{\frac{x}{56}} = (10^4)^{\frac{x}{56}} = 10^{\frac{4x}{56}} = 10^{\frac{x}{14}}$
2. Qual pode ser o domínio dessa função para termos como imagem apenas valores naturais? Por que as imagens devem ser números naturais? Justifique suas respostas. Resposta no Manual do Professor.
3. Utilizando a função que você elaborou nos itens anteriores, determine o número aproximado de mortes que seria registrado no dia 1º de abril, 14 dias após o dia 18 de março. $f(70) = 10\,000^{\frac{70}{56}} = 10\,000^{1,25} = 100\,000$
4. De acordo com o gráfico, quantas mortes foram registradas no dia 1º de abril? Comparando a resposta que você obteve na questão 3 com os dados do gráfico apresentado, o que você pode afirmar sobre o uso dessa função para modelar o problema? Respostas pessoais.

Quando usamos uma função para modelar uma situação real, é comum observarmos discrepância entre o modelo e os fatos. Isso nos ajuda a adequar o modelo ou a interferir nos fatos. De qualquer modo, conhecer o gráfico da função ajuda a tomar essas decisões. Vamos investigar como se comporta o gráfico da função exponencial.

Para retomar

Imagine que uma pequena faísca atinja uma enorme área coberta de palha e inicie um incêndio. Considere que, em determinado instante, a área atingida pelo fogo seja de 1 m². A partir desse ponto, a área atingida pelo fogo cresce constantemente.



Vamos retomar o modelo visto anteriormente. Nesse caso, vamos considerar diferentes velocidades de crescimento da área queimada.

Para explorar

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Reúna-se com mais dois colegas para fazer as atividades a seguir utilizando um *software* de construção de gráficos. Antes, garantam que todos compreenderam o modelo a ser utilizado.

1. Determinem, usando o parâmetro a, a função $f(t)$ que define a medida em m² da área queimada em função do tempo em minutos. Determinem também o domínio e o contradomínio dessa função.
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = a^t$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Como o tempo e a área são variáveis contínuas, o domínio e o contradomínio são reais.
2. Quais valores não podem ser atribuídos ao parâmetro a? Justifiquem a resposta. Resposta no Manual do Professor.
3. Vamos supor dois valores para a base a: 3 e $\frac{1}{3}$. Representem no *software* as seguintes funções:

I. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **II.** $g(x) = 3^x$

   a) Qual é o valor de cada função quando $t = 0$? 1
   b) Qual é o conjunto imagem de cada uma das funções?
Em ambas, a imagem é $\mathbb{R}$ (reais positivos).
   c) Como podemos saber o valor da função quando $t = 40$ segundos? Deem um valor aproximado em cada caso.
Resposta no Manual do Professor.
4. Leiam as definições a seguir.

- Dizemos que uma função é crescente quando, dados dois valores x_1 e x_2, pertencentes ao domínio, e tais que $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$.
- Dizemos que uma função é decrescente quando, dados dois valores x_1 e x_2, pertencentes ao domínio, e tais que $x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$.

Com base nessas definições e nos gráficos das funções f e g que vocês elaboraram na atividade anterior, classifiquem as funções como crescente ou decrescente. A função f é decrescente e g é crescente.

5. Para que valores de a vocês acham que a função $f(x) = a^x$ é crescente? E para quais ela é decrescente? Justifiquem a resposta. Pelo que estudamos no crescimento exponencial, se $0 < a < 1$, então $m < n \Rightarrow a^m > a^n$. Por outro lado, se $a > 1$, então $m < n \Rightarrow a^m < a^n$. Logo, para valores de a entre zero e 1, a função é decrescente. Para valores maiores que 1, a função é crescente.

6. Vamos interpretar as funções f e g de acordo com o modelo. Orientações no Manual do Professor.

a) O que significa para o modelo o valor "3" que é base da função exponencial g?

b) Por que esse modelo não pode ser representado pela função f?

c) Elaborem um modelo que possa ser representado pela função f.

7. Citem ao menos três características que os gráficos de f e g têm em comum. Vocês acham que essas características se mantêm para qualquer função exponencial? Resposta pessoal.

De acordo com as análises feitas até aqui, algumas conclusões podem ser tiradas. Consideremos para isso uma função exponencial genérica do tipo $f(x) = a^x$ com $a > 0$ e $a \neq 1$. Temos:

1. O gráfico de f passa pelo ponto $(0; 1)$.

De fato, considerando as restrições dadas, temos $f(0) = a^0 = 1$, independentemente do valor de a.

2. $f(m + n) = f(m) \cdot f(n)$

Podemos demonstrar essa característica usando as propriedades das potências:

$f(m + n) = a^{m+n} = a^m \cdot a^n = f(m) \cdot f(n)$

3. Se $f(m) = f(n)$, então $m = n$.

Podemos demonstrar essa característica usando as propriedades do crescimento exponencial:

Como vimos anteriormente, temos $a^m = a^n$, se e somente se $m = n$. Logo, se $f(m) = f(n) \Rightarrow \Rightarrow m = n$.

A esse tipo de função damos o nome de **injetora**.

4. Se $0 < a < 1$, a função é decrescente.

Podemos demonstrar essa característica usando as propriedades do crescimento exponencial:

Para $0 < a < 1$, se $m > n$, então $a^m < a^n$. Logo, para $m > n$, $f(m) < f(n)$. Isso define a função decrescente.

5. Se $a > 1$, a função é crescente.

Podemos demonstrar essa característica usando as propriedades do crescimento exponencial:

Para $a > 1$, se $m > n$, então $a^m > a^n$. Logo, para $m > n$, $f(m) > f(n)$. Isso define a função crescente.

6. Se f tem domínio real, a imagem de f é $\mathbb{R}_+$.

Para todo $x \in \mathbb{R}$, então $a^x > 0$. Além disso, não existe x tal que $a^x = 0$. Logo, a imagem é estritamente positiva.

Ademais, no caso da função crescente com domínio real, dado um valor qualquer para n sempre será possível encontrar um valor $m > n$ tal que $f(m) > f(n)$.

Analogamente, no caso da função decrescente com domínio real, dado um valor qualquer para n sempre será possível encontrar um valor $m < n$ tal que $f(m) > f(n)$.

De modo geral, para todo a, a imagem não tem limite superior.

Resumindo:

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ uma função exponencial do tipo $f(x) = a^x$ com $a > 0$ e $a \neq 1$.

- Para todo valor de a, $f(0) = 1$
- $f(m + n) = f(m) \cdot f(n)$
- f é injetora
- Se $0 < a < 1$, f é decrescente
- Se $a > 1$, f é crescente
- f é sobrejetora

GLOSSÁRIO

O símbolo $\mathbb{R}_+$ representa os reais não negativos.

Atenção!

Ao restringir o contradomínio de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}_+$ o igualamos à imagem, transformando f em sobrejetora. Como f é também injetora, podemos dizer que f é bijetora.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

Atividades

1. Considere a função exponencial $f(x) = \left(\frac{9}{4}\right)^x$ definida no domínio $D = \{-1{,}5;\ -1;\ -0{,}5;\ 0;\ 0{,}5;\ 1;\ 1{,}5\}$. Determine o conjunto imagem de f. $Im(f) = \left\{\frac{8}{27}; \frac{4}{9}; \frac{2}{3}; 1; \frac{3}{2}; \frac{9}{4}; \frac{27}{8}\right\}$

2. Com o avanço cada vez mais rápido das novas tecnologias, o valor de um celular reduz em média 40% do valor inicial a cada ano. Com base nessa informação, responda às questões a seguir.

a) Qual será o valor, após um ano de uso, de um celular que foi comprado por R$ 1.000,00? R$ 600,00

b) Qual será o valor após dois anos de uso desse celular. R$ 360,00

c) Sendo $f(1)$ a razão em porcentagem entre o valor do celular após um ano e o valor de compra, determine $f(1)$. $f(1) = \frac{60}{100} = 60\%$

d) Sendo $f(2)$ a razão em porcentagem entre o valor do celular após dois anos e o valor de compra, determine $f(2)$. $f(2) = \frac{36}{100} = 36\%$

e) Determine a lei de formação da função $f(x)$. $f(x) = \frac{3^x}{5}$

3. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função exponencial tal que $f(x) = a^x$. Se $f(10) = 50$, qual é o valor de a? $a = \sqrt[10]{50}$

Vamos ver como essas características se comportam quando alteramos um pouco a lei da função.

Outras funções exponenciais e seus gráficos

Ao definir função exponencial, afirmamos que todas as funções desse tipo têm a variável no expoente. Vamos ver agora outros tipos de função, além da $f(x) = a^x$, que também são chamadas de exponenciais.

Para pensar e discutir

Para resolver a atividade 1, considere como contexto o crescimento populacional de uma colônia de bactérias que começa com 1 indivíduo e triplica a cada hora.

1. Considere a função $f(x) = 3^x$. Como visto anteriormente, o gráfico dessa função passa pelo ponto (0; 1).

a) Que alteração podemos fazer na lei da função para que tenhamos $f(0) = 2$? Apresente duas alterações possíveis na função. Pode-se somar 1 à lei da função ou multiplicá-la por 2. $f(x) = 2 \cdot 3^x$ ou $f(x) = 3^x + 1$

b) Descreva como essas alterações podem influenciar o gráfico e o conjunto imagem da função. (Se achar necessário, esboce o gráfico atribuindo alguns valores para x na função que você descreveu.)

c) Descreva [illegible] significam para o contexto que estamos utilizando como referência.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Sem desenhar o gráfico, [illegible] questões 2 e 3. Em seguida, se julgar necessário, elabore os gráficos para verificar suas respostas. No caso de somar 1 à lei da função, estamos afirmando que a população começa com 2 indivíduos, mas um deles não se reproduz. No caso de multiplicá-la por 2, estamos afirmando que a população começa com 2 indivíduos e ambos se reproduzem.

2. Considere a função $m(x) = 2^{x+1}$ e estas outras funções:

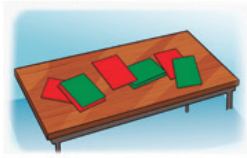
I. $n(x) = 2 \cdot 2^x$ **II.** $p(x) = 3 \cdot 2^x$ **III.** $q(x) = 2 + 2^x$

a) Dizemos que duas expressões são equivalentes quando representam a mesma função, com o mesmo gráfico. Qual das três funções é equivalente à função m? A função n, pois $2 \cdot 2^x = 2^{x+1}$.

b) Qual é a diferença no gráfico das outras duas funções em relação à função m? A função p tem um crescimento mais acentuado, e a função q tem um crescimento igual, mas seu gráfico é trasladado em 2 unidades no sentido vertical para cima.

3. Para cada uma das situações descritas abaixo, escreva a lei de formação da função, classifique-a como crescente ou decrescente e determine o ponto onde o gráfico corta o eixo das ordenadas.

a) Uma pilha de papel contém folhas verdes e vermelhas. A pilha de folhas verdes atinge uma altura de 1 mm. A pilha de folhas vermelhas atinge a metade disso. A cada ação cortam-se todas as folhas vermelhas ao meio e empilham-se as metades sobre as folhas verdes. Sendo x a quantidade de ações e $f(x)$ a altura total da pilha, determine a lei da função f. $f(x) = 1 + 0{,}5 \cdot 2^x$. A função f é crescente e corta o eixo das ordenadas no ponto (0; 1,5).



Ilustrações: Mauro Salgado

b) Considere a variação do valor de uma moto que foi comprada por R$ 5.000,00, mas desvaloriza 1% ao mês. Sendo x o tempo passado e $f(x)$ o valor da moto, determine a função. $f(x) = 5\,000 \cdot 0{,}99^x$. A função f é decrescente e corta o eixo das ordenadas no ponto (0; 5 000).

1. b) No caso de somar 1 à lei da função, o gráfico será trasladado de uma unidade no sentido vertical para cima. O conjunto imagem será $]1, +\infty[$. No caso de multiplicá-la por 2, a curvatura será levemente alterada, mas o conjunto imagem permanecerá o mesmo.

Como você deve ter imaginado, os gráficos das funções exponenciais têm essencialmente o mesmo formato, sendo influenciados pelos parâmetros que utilizamos na função e pela escolha do domínio e do contradomínio que melhor representam a situação em questão.

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Em duplas e utilizando um *software* de elaboração de gráficos, escrevam algumas funções do tipo $f(x) = b \cdot ax + c$ com $a > 0$ e $a \neq 1$ e $b > 0$. Variem os valores de b e c, fixando o valor de a. Por fim, escrevam um parágrafo para explicar o que cada um desses parâmetros altera no gráfico e quais características se mantêm em todos eles.

GLOSSÁRIO

Translação: é uma transformação geométrica em que a imagem muda de posição sem alterar sua forma, sem rotacionar e sem alterar suas medidas.

Em uma função do tipo $f(x) = b \cdot a^x + c$ com $a > 0$ e $a \neq 1$ e $b > 0$, temos que:

- O valor de $b + c$ determina o ponto onde a função intersecta o eixo y.

  De fato, $f(0) = b \cdot 1 + c = b + c$.

- O valor de c traslada verticalmente o gráfico de $f(x) = b \cdot a^x$.

  Como estamos somando um valor constante à cada ponto da função, toda a imagem da função sofrerá o mesmo acréscimo. Quanto maior o valor de c, maior a **translação**. Quando $c > 0$, a translação é no sentido do eixo y. Quando $c < 0$, a translação é no sentido oposto ao do eixo.

- O valor de $b > 0$ altera a curvatura do gráfico $f(x) = a^x$ mas não seu conjunto imagem.

  De fato, o parâmetro b interfere no ponto em que a curva cruza o eixo vertical, mas as características do crescimento exponencial se mantêm.

  Além disso, se $b < 0$, a função é refletida em relação ao eixo x, tornando-se decrescente.

Além dos parâmetros b e c estudados, há outras interferências que podem ser feitas na lei da função. Vamos ver dois exemplos a seguir.

Exemplo 1

Considere que uma função exponencial será usada para modelar uma situação em que uma população começa com um indivíduo e duplica de tamanho a cada meia hora. Se o eixo das ordenadas for representado em horas, podemos dizer que, quando $x = 1$, terão passado 2 intervalos de 30 min. Para representar essa ideia na lei da função, podemos escrever $f(x) = 2^{2x}$. (Note que essa função é equivalente à $f(x) = 4^x$.)

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Exemplo 2

Considere que uma função exponencial será usada para modelar uma situação em que uma população começa com um indivíduo que demora uma hora para começar a se desenvolver e, a partir daí, duplica de tamanho a cada hora. Se o eixo das ordenadas for representado em horas, podemos dizer que, quando $x = 1$, ainda teremos 1 indivíduo. Para representar essa ideia na lei da função, podemos escrever $f(x) = 2^{x-1}$. (Note que essa função é equivalente à $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2^x$.)

Vamos ver aplicações desses conceitos nas duas situações a seguir.

Situação 1

Vamos representar a quantidade de indivíduos de uma população de bactérias que começa com 14 indivíduos. Dois deles não se reproduzem, mas os outros se duplicam a cada 18 minutos. A quantidade de indivíduos varia em função da quantidade de intervalos de 18 minutos transcorridos durante 3 horas.

Descrição da função

y = quantidade de indivíduos

x = quantidade de intervalos de 18 min

$y = f(x)$

$D(f) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

(nº de intervalos de 18 min em 3 horas)

$CD(f) = \mathbb{N}$

Representação algébrica: $f(x) = 12 \cdot 2^x + 2$

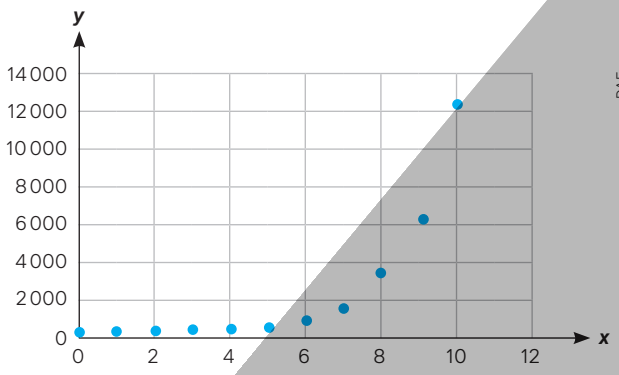
Determinando pontos da função

$f(0) = 12 \cdot 2^0 + 2 = 14$

$f(2) = 12 \cdot 2^2 + 2 = 50$

$f(10) = 12 \cdot 2^{10} + 2 = 12290$

Representação gráfica



DAE

Situação 2

Vamos representar a área coberta por uma população de algas que começa ocupando 12 m² e duplica esse espaço a cada 18 dias. A medida da área varia em função do tempo em dias corridos durante 6 meses (180 dias).

Descrição da função

y = quantidade de indivíduos

x = tempo

$y = f(x)$

$D(f) = [0; 180]$

$CD(f) = \mathbb{R}_+$

Representação algébrica: $f: [0,180] \to \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = 12 \cdot 2^{\frac{x}{18}}$

Determinando pontos da função

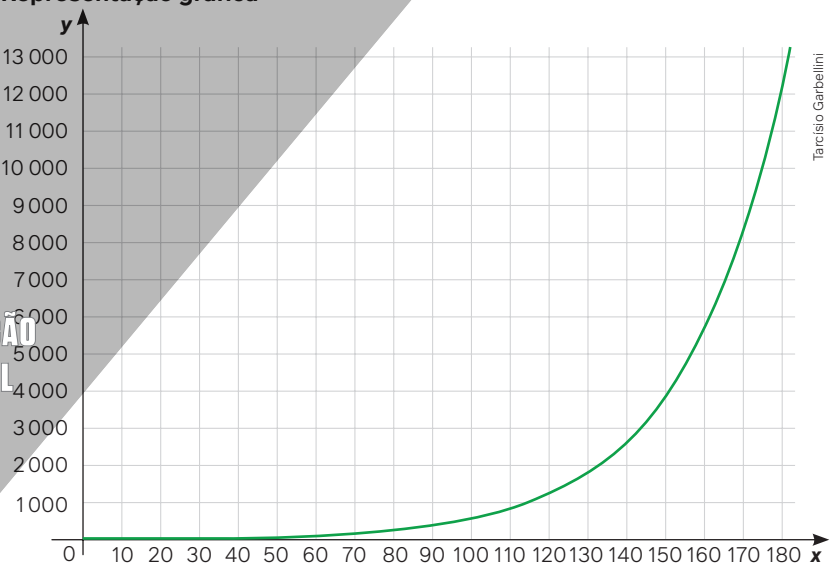
$f(0) = 12 \cdot 2^0 = 12$

$f(9) = 12 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 12\sqrt{2}$

$f(30) = 12 \cdot 2^{\frac{5}{3}} = 12\sqrt[3]{2^5} = 24\sqrt[3]{4}$

Observe que, embora os gráficos sejam parecidos, eles sofrem influência das definições de domínio e contradomínio.

Representação gráfica



Tarcísio Garbellini

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para pensar e discutir

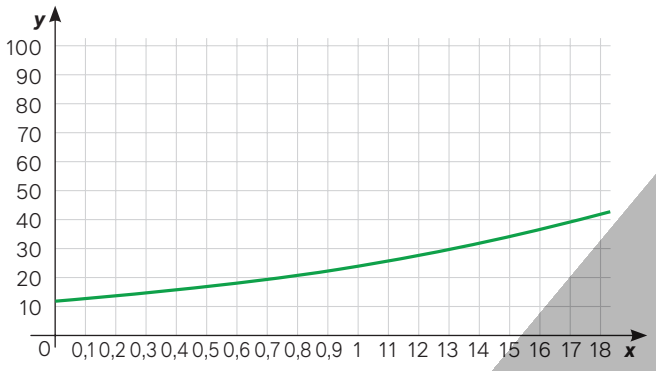
1. Por que na representação algébrica do segundo caso o expoente aparece dividido por 18?
2. Se a escala do eixo x fosse feita em segundos, a expressão algébrica mudaria? O que isso influenciaria no gráfico?

1. Porque o tempo está em minutos e os valores da função dobram a cada 18 minutos. Logo, a cada minuto os valores são multiplicados por $\sqrt[18]{2}$.

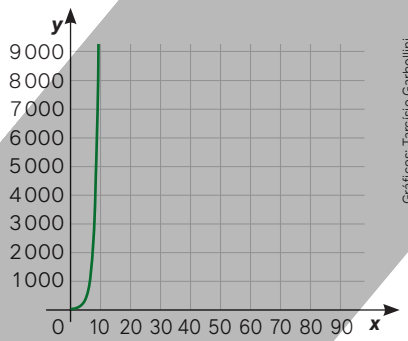
2. A expressão precisaria multiplicar o denominador 18 por 60. No gráfico, a curva pareceria crescer mais lentamente.

Essas situações nos mostram o quanto é importante fazer escolhas coerentes com o modelo ao representar uma função, para que possamos explicitar as informações mais relevantes. Nas duas situações anteriores, por exemplo, parece que o gráfico se inicia no ponto (0; 0), mas isso só acontece porque os valores iniciais são muito pequenos se comparados à escala do gráfico. Sabemos, por exemplo, que o gráfico da situação 1 passa pelo ponto (0; 14), enquanto o da situação 2 passa pelo ponto (0; 12).

Veja nas imagens abaixo o mesmo gráfico da situação 2 utilizando diferentes escalas:



Aproximando o *zoom*.



Afastando o *zoom*.

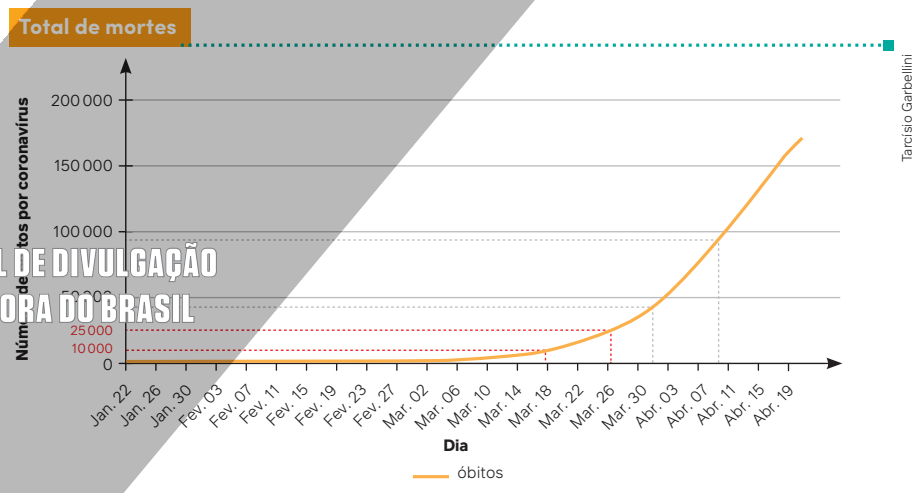
Gráficos: Tarcísio Garbellini

Os dois gráficos são da mesma função e exemplificam o que é o crescimento exponencial: uma curva que se inicia com crescimento bastante lento e cuja velocidade de crescimento, após algum tempo, aumenta intensamente.

Operações inversas à potenciação

Para finalizar nosso estudo sobre os gráficos das funções exponenciais, precisamos ainda responder a uma questão que ficou em aberto.

Para retomar



Tarcísio Garbellini

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Quando analisamos esse gráfico, utilizando os pontos (0; 1) e (56; 10 000) concluímos que ele poderia ser modelado pela função $f(x) = 10^{\frac{x}{14}}$, indicando que o número de mortes era multiplicado por 10 a cada duas semanas.

Ao final da análise discutimos se essa função poderia ou não modelar essa situação. Vamos ver agora um exemplo de contexto em que essa função seria útil.

Para explorar

Considere que a Organização Mundial de Saúde (OMS) esteja acompanhando os dados registrados e tenha observado que até o dia 18 de março os registros tenham se comportado exatamente como na função $f(x) = 10^{\frac{x}{14}}$.

A partir desse dia, a organização preparou uma série de ações de combate à disseminação do vírus e passou a utilizar a função para comparar o número de registros com o número de mortes esperadas, caso as ações não tivessem sido realizadas.

Para fazer uma avaliação da eficácia das ações, a OMS pode utilizar dois parâmetros:

I. calcular o número de mortes esperado pela função em determinado dia e comparar com o número de mortes registrado para ver quantas mortes foram evitadas;

II. determinar em que dia certo número de mortes seria atingido pela função e comparar com o dia em que esse número foi realmente atingido para ver em quantos dias as ações estão retardando o crescimento da quantidade de mortes.

Reúna-se com um colega para discutir as questões a seguir.

1. Utilizando a função $f(x) = 10^{\frac{x}{14}}$ e sabendo que o dia 22 de janeiro é considerado como dia 0, expliquem como a OMS pode determinar valores para fazer a análise do parâmetro I. Considerem como exemplo o dia 27 de março. (Para auxiliar na contagem dos dias, observe que cada intervalo no eixo horizontal do gráfico corresponde a 4 dias.) $f(65) = 10^{\frac{65}{14}} \cong 43\,940$. Note que o resultado deve ser um número natural. $43\,940 - 25\,000 = 18\,940$ mortes evitadas.

2. Alguns resultados obtidos pela função não serão números naturais, embora o número de mortes seja contado em unidades. Por que podemos considerar, neste caso, o gráfico da função f como um gráfico contínuo?
Neste caso, a função representa uma tendência e não o número exato de mortes.

3. Vamos ver um exemplo de análise do parâmetro II:

> Sabemos que, no dia 1º de abril, o número de mortes esperado pela função era de 100 000, mas esse número só foi atingido no dia 10 de abril, o que indica um atraso de 9 dias no crescimento.

Fazendo $f(x) = 10^{\frac{x}{14}} = 50\,000$, é preciso descobrir a qual expoente devemos elevar a base de modo a obter 50 000.
Expliquem como a OMS pode determinar outros valores para fazer a análise do parâmetro II. Considerem como exemplo o número 50 000 e tentem descobrir em que dia ele seria atingido pela função.

Logaritmos

Para encontrar o valor incógnito em uma igualdade normalmente utilizamos operações inversas. No caso da última atividade que você resolveu, onde a incógnita está no expoente, a operação inversa que deve ser utilizada chama-se logaritmo.

Definimos o logaritmo de um número em determinada base como sendo o expoente a que a base deve ser elevada para se obter o número. Simbolicamente, escrevemos $\log_a b$ (lê-se "log de b na base a") para representar o expoente ao qual elevamos a para resultar em b. Assim:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Logaritmos: definição e condição de existência

Sendo a e b números reais positivos com $a \neq 1$, temos:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Nessa operação, a é a base, c é o logaritmo de b na base a e b é o logaritmando.

Com base nessa definição, o cálculo dos logaritmos auxilia na resolução de equações em que conhecemos a base e a potência, mas queremos descobrir o expoente. Por exemplo, utilizando a definição de log apresentada, é possível resolver a equação $10^{\frac{x}{14}} = 50\,000$.

Há algumas formas de resolver essa equação, como veremos ao longo da unidade. A princípio, vamos primeiro organizar a igualdade, assim:

$$10^{\frac{x}{14}} = \sqrt[14]{10^x} = 50\,000 \Rightarrow 10^x = 50\,000^{14}$$

Para pensar e discutir

1. Com base no que estudamos sobre a potenciação, explique as questões a seguir. Respostas no Manual do Professor.

a) Por que o $\log_b a$ só existe quando a e b são números reais positivos com $b \neq 1$?

b) Como podemos saber o $\log_a a$ e $\log_a 1$ mesmo sem saber o valor de a?

2. Escreva x como logaritmo de $50\,000^{14}$ na base 10. $x = \log_{10} 50\,000^{14}$

3. A tecla [log] da calculadora determina o logaritmo de um número na base 10. Basta digitar o número e apertar [log] em seguida. Utilizando essa informação, determine uma aproximação do valor de x considerando apenas valores naturais. $x \cong 66$

4. Utilize o valor aproximado de x para analisar o parâmetro II definido pela OMS nas atividades da página anterior. Segundo o gráfico, o valor de 50 000 foi atingido no 70º dia e não no 66º. Isso representa, de acordo com o parâmetro II, um atraso de 4 dias.

Nota-se que os logaritmos funcionam como uma operação inversa à potenciação. Como dissemos anteriormente, a potenciação, diferentemente da adição e da multiplicação, não é uma operação linear. Por isso admite duas operações inversas: a radiciação e a logaritmação. Veja:

$$7^3 = 343 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{343} = 7 \\ \log_7 343 = 3 \end{cases}$$

Assim, quando conhecemos a potência e o expoente e queremos descobrir o valor da base, utilizamos a radiciação para isolá-la sempre que o expoente é um número natural. Já quando a incógnita está no expoente, utilizamos o logaritmo para isolá-la. Para fazer isso, entretanto, é preciso atentar às condições de existência dos logaritmos: o log só é calculado entre valores positivos e só pode ser usado se a base for diferente de 1. Assim, sendo a um número positivo diferente de 1, temos:

Consequências da definição

Para todo a real tal que $a > 0$ e $a \neq 1$,

- $\log_a b = 1$
- $\log_a 1 = 0$

Ao compreender as funções exponenciais como funções contínuas crescentes ou decrescentes com imagem $\mathbb{R}_+$, temos de lidar com o fato de que, dado um número positivo qualquer e uma função do tipo $f(x) = a^x$, existe um valor de x para o qual a^x resulta no número dado. Por exemplo, se escolhemos o número 5 e a função $f(x) = 10^x$, podemos garantir que existe um valor de x tal que $10^x = 5$. Se tivéssemos escolhido o número 100, seria fácil observar que $x = 2$. Mas, se escolhido o 5, é necessário o uso dos logaritmos para descobrir o valor de x. Vamos estudar um pouco mais essa operação.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Atividades

1. Com base na definição, calcule os logaritmos a seguir.

a) $\log_2 8$ 3 **b)** $\log_{10} 10\,000$ 4 **c)** $\log_3 9$ 2

2. Utilize a notação log para escrever o valor de x nos seguintes casos:

a) $3^x = 15$ $x = \log_3 15$ **b)** $22^x = 11^2$ $x = \log_{22} 11^2$ **c)** $5^x = \pi + 1$ $\log_5 (\pi + 1) = x$

3. Utilizando uma calculadora, calcule os logaritmos de base 10 a seguir.

a) log 2 Aproximadamente 0,30103. **b)** log 30 Aproximadamente 1,47712. **c)** log 500 Aproximadamente 2,69897.

4. Utilizando as propriedades da potência, reescreva as funções a seguir para que fiquem na forma: $f(x) = b \cdot a^x + c$

a) $f(x) = 5^{x-1} + 1$ $f(x) = 0{,}2 \cdot 5^x + 1$

b) $f(x) = 4 \cdot 0{,}3^{x+1}$ $f(x) = 1{,}2 \cdot 0{,}3^x + 0$

c) $f(x) = (2^{x+1})^2$ $f(x) = 4 \cdot 4^x + 0$

d) $f(x) = 20^{\frac{x}{2}} + 3$ $f(x) = 1 \cdot (2\sqrt{5})^x + 3$

A função logarítmica

3

Antes de definir a função logarítmica, vamos estudar um pouco mais a operação da logaritmação. Junte-se com dois colegas para ler o texto abaixo, sobre logaritmos. Vocês irão utilizá-lo para resolver as atividades pertinentes a ele. Vocês perceberão pelo texto que o desenvolvimento dos logaritmos se relaciona bastante com as propriedades da potenciação.

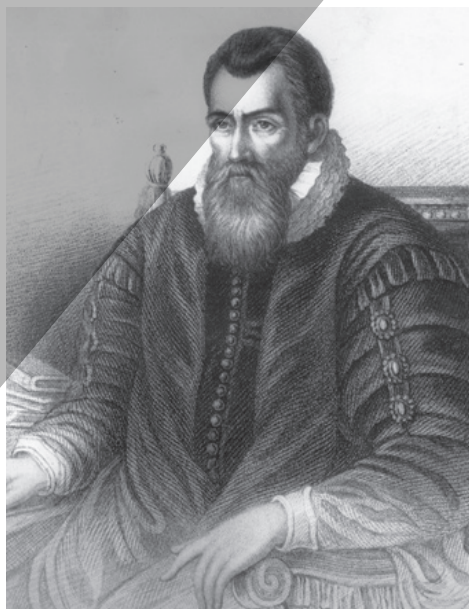
Um pouco da história dos logaritmos

Os intelectuais dos séc. XVI e XVII, em diversas áreas do conhecimento (astronomia, física, navegação etc.), ansiavam pela realização de cálculos cada vez mais elaborados e consequentemente mais complexos e demorados. A demora na realização desses cálculos exigia muito tempo, o que impedia o desenvolvimento de outras teorias. [...]

[...] Diante desse contexto, se alguém criasse alguma técnica que simplificasse esses cálculos, economizaria muito tempo para os cientistas da época, uma vez que poderia ser utilizada em outras atividades mais criativas, como descrever as órbitas dos planetas em torno do sol, por exemplo.

Encerramos essa seção com uma frase da pessoa que se propôs a encarar esse problema, e que apresentaremos na próxima seção: o matemático, físico, teólogo e astrônomo escocês John Napier (1550-1617):

> Já que não existe nada mais enfadonho, colegas matemáticos, na prática da arte matemática do que o grande atraso sofrido no tédio de extensas multiplicações e divisões, de encontrar razões, e na extração de raízes quadradas e cúbicas e os muitos erros traiçoeiros que podem surgir: eu estive pensando, que arte segura eu poderia ser capaz de aperfeiçoar para tais mencionadas dificuldades. No final, após muito pensar, finalmente descobri uma surpreendente maneira de abreviar os procedimentos... e é uma tarefa prazerosa apresentar o método para o uso público dos matemáticos. (MACCALLUM)



Hulton Archive/Getty Images

John Napier (1550-1617).

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

REIS, Sa[illegible] SILVA, Silvia Regina V. da. Logaritmos: de sua invenção até a sala de aula. *Ciência e Natura*, Santa Maria, v. 37, n. 3, p. 889-897, set./dez. 2015. Disponível em: https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/view/17318/pdf. Acesso em: 3 abr. 2020.

A base do método de Napier consistia em uma relação entre dois valores que ele chamou de logaritmo (*logos*, que é razão, e *arithmos*, que é número). Sua técnica relacionava duas sequências numéricas, uma de crescimento linear e outra de crescimento exponencial, assim:

1	2	3	4	5	6
5	25	125	625	3 125	15 625

Por meio dessas tabelas de sequência (ou tábuas, como eram chamadas), Napier conseguia resolver multiplicações com mais facilidade utilizando a propriedade das potências. Veja a seguir.

Para calcular $625 \cdot 25$, basta observar que 625 se associa a 4, assim como 25 se associa a 2. O resultado da multiplicação será o número associado a $4 + 2 = 6$, ou seja, $625 \cdot 25 = 15\,625$.

Note que a adição feita é bem mais simples do que a multiplicação. A simplicidade da regra se justifica pelo fato de que 25 se associa a 2 pela potência ($5^2 = 25$), da mesma forma que 625 se associa a 4 porque $5^4 = 25$. Logo, $625 \cdot 25 = 5^4 \cdot 5^2 = 5^{4+2} = 5^6 = 15\,625$.

Nesse exemplo, usamos uma progressão exponencial de base 5. O inconveniente dessa tábua é que ela não auxilia uma série de cálculos, já que as potências de 5 crescem rapidamente. Por esse motivo não foi essa a base usada por Napier.

Os logaritmos de Napier

Seguindo uma prática usada na trigonometria da sua época, Napier dividiu o raio de um círculo unitário em 10^7 partes. A seguir escolheu $q = 1 - 10^{-7}$ ou 0,9999999 como a razão para construir sua tabela. Por exemplo, 0, 1 e 2 são, respectivamente, os logaritmos neperianos de 10^7, de 9.999.999 e de 9.999.998,0000001. O número que tinha logaritmo neperiano 100 era aproximadamente 9.999.900.

Henry Briggs (1561-1631), professor de geometria em Oxford, foi um dos admiradores mais entusiásticos de Napier, tanto que o visitou na Escócia em 1615. Durante a visita discutiram possíveis modificações no método dos logaritmos e inclusive concordaram em fazer o logaritmo de 1 igual a zero e o logaritmo de 10 igual a 1. Isto significa que se um número positivo N for escrito como $N = 10^L$, então L é o logaritmo "comum" de N, escrito como $\log_{10} N$, ou simplesmente, $\log N$. Assim, nasceu o conceito de base.

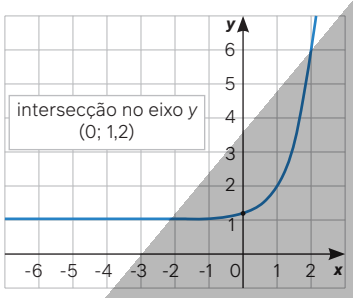
Com a morte de Napier, em 1617, coube a Briggs a tarefa de construir a primeira tabela de logaritmos decimais ou comuns. Iniciando com $\log 10 = 1$, encontrou outros logaritmos tomando raízes quadradas sucessivas (aproximadas).

PRECIOSO, Juliana Conceição; PEDROSO, Hermes Antonio. História do número *e*: gênese e aplicações. *Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco*, Uberlândia, v. 1, n. 1, p. 31-44, jun. 2013. Disponível em: http://www.seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/13913. Acesso em: 24 abr. 2020.

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

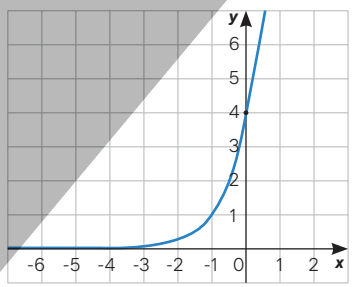
Retome a atividade 4 da página 68. Relacione os gráficos a seguir com as funções daquela atividade e escreva um parágrafo explicando como as propriedades das potências podem auxiliar no cálculo dos logaritmos.

a)



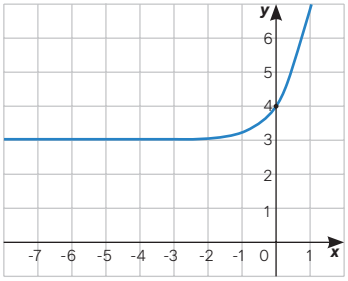
b)

c)



Gráficos: Tarcisio Garbellini

d)



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Propriedades dos logaritmos

Veja, por exemplo, como Briggs descobriu o log 2, ou seja, o expoente que aplicamos à base 10 para resultar em 2:

- Vamos chamar, em linguagem atual, log 2 de x. Assim, $10^x = 2$.
- Como $1 < 2 < 10$, então $10^0 < 10^x < 10^1$.
- Lembrando que a função exponencial de base 10 é crescente, temos $0 < x < 1$.
- Sabendo que $\sqrt{10} = 10^{0,5} \cong 3{,}16$ e que $3{,}16 > 2$, podemos melhorar a aproximação.
- Como $1 < 2 < 3{,}16$, então $10^0 < 10^x < 10^{0,5}$.
- Ajustando o intervalo, temos $0 < x < 0{,}5$.

Após inúmeras repetições e aproximações para cada número, Briggs adaptou as tabelas de Napier e criou as tábuas de logaritmo decimal que fizeram parte dos livros de cálculo durante séculos, até que as calculadoras as substituíssem. Veja:

Tábua de valores aproximados dos logaritmos decimais dos números de 1 a 100

n	log *n*	*n*	log *n*	*n*	log *n*	*n*	log *n*	*n*	log *n*
1	0	21	1,322	41	1,613	61	1,785	81	1,908
2	0,301	22	1,342	42	1,623	62	1,792	82	1,914
3	0,477	23	1,362	43	1,633	63	1,799	83	1,919
4	0,602	24	1,38	44	1,643	64	1,806	84	1,924
5	0,699	25	1,398	45	1;653	65	1,813	85	1,929
6	0,778	26	1,415	46	1,663	66	1,82	86	1,934
7	0,845	27	1,431	47	1,672	67	1,826	87	1,94
8	0,903	28	1,447	48	1,681	68	1,833	88	1,944
9	0,954	29	1,462	49	1,69	69	1,839	89	1,949
10	1	30	1,477	50	1,699	70	1,845	90	1,954
11	1,041	31	1,491	51	1,708	71	1,851	91	1,959
12	1,079	32	1,505	52	1,716	72	1,857	92	1,964
13	1,114	33	1,519	53	1,724	73	1,863	93	1,968
14	1,146	34	1,531	54	1,732	74	1,869	94	1,973
15	1,176	35	1,544	55	1,74	75	1,875	95	1,978
16	1,204	36	1,556	56	1,748	76	1,881	96	1,982
17	1,23	37	1,568	57	1,756	77	1,886	97	1,987
18	1,255	38	1,58	58	1,763	78	1,892	98	1,991
19	1,279	39	1,591	59	1,771	79	1,898	99	1,996
20	1,301	40	1,602	60	1,778	80	1,903	100	2

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Utilizando a tabela dada, você e um colega vão investigar as propriedades dos logaritmos. Para agilizar os cálculos, usem uma calculadora simples.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1. Escrevam um número qualquer como produto de dois fatores. Verifiquem, na tabela, quais são os valores dos logaritmos de 12 e de cada um de seus fatores. Que relação existe entre os números encontrados? Essa relação se mantém para outras fatorações de 12? Escolham outros números, fatorem-nos e explorem relações entre seus logaritmos. Discutam com os colegas as relações encontradas e escrevam as conclusões.
2. É possível encontrar alguma relação análoga envolvendo a divisão? Experimentem com alguns números, discutam com a turma e registrem suas conclusões.
3. Investiguem o logaritmo de uma potência. Escrevam, por exemplo, o número 8 por meio de uma potência. Que relação é possível encontrar entre os logaritmos dos números envolvidos nessa potenciação? Tentem com outras potências. A relação se mantém? Escrevam as conclusões.
4. Discutam com os colegas como ficariam as expressões abaixo aplicando as conclusões que vocês tiraram. Escolham uma delas para escrever um parágrafo explicando-a e argumentando sobre suas conclusões.

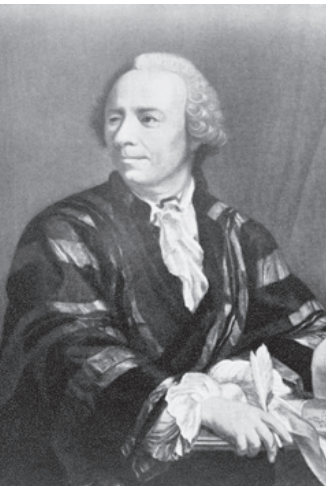
a) $\log (b \cdot c)$ **b)** $\log \left(\frac{b}{c}\right)$ **c)** $\log b^c$

Você deve ter reparado que algumas propriedades dos logaritmos são análogas às das potências. Há ainda uma quarta propriedade que precisamos conhecer. Vamos aprofundar um pouco esse estudo antes de formalizar todas as propriedades.

Como já dissemos, a maior parte das calculadoras utiliza o logaritmo comum (na base 10) como base de cálculo para programar a tecla log. Talvez você tenha reparado que há também uma tecla ln, que representa a logaritmação em outra base, a qual apresentaremos a seguir. Conhecendo essas duas bases e sabendo como mudar as bases de um logaritmo qualquer, completaremos nosso estudo das propriedades dos logaritmos.

Logaritmo natural e a mudança de base

O *e* na obra de Euler



Acervo Bettmann/Getty Images

Leonhard Euler (1707-1783).

Leonhard Euler (1707-1783) nasceu em Basel, Suíça, e iniciou seus estudos com a intenção de se tornar ministro religioso, como seu pai. Adquiriu gosto pela matemática e fez dela sua principal ocupação após as aulas que frequentou como estudante de Johann Bernoulli (1667-1748) na universidade local. Passou a maior parte de sua vida nas cortes de São Petersburgo (1727-1741 e de 1766 até sua morte) e de Berlim (1741-1766). A produção científica de Euler é extensa e variada, superando a de qualquer outro matemático e distribuindo-se por diversas áreas, tais como matemática, física, astronomia, engenharia e construção naval.

O mais influente entre os numerosos trabalhos de Euler foi sua *Introductio in analysin infinitorum*, obra em dois volumes publicada em 1748 e considerada o alicerce da moderna análise matemática. Neste trabalho Euler resumiu suas numerosas descobertas sobre séries infinitas, produtos infinitos e frações contínuas e, pela primeira vez, chamou a atenção para o papel central do número *e* e da função e^x ao dizer: "Para o número cujo logaritmo é a unidade, anotemos *e* que é 2,718281...".

PRECIOSO, Juliana Conceição; PEDROSO, Hermes Antonio. História do número *e*: gênese e aplicações. *Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco*, Uberlândia, v. 1, n. 1, p. 42, jun. 2013. Disponível em: http://www.seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/13913. Acesso em: 24 abr. 2020.

A fala de Euler nos indica que, se o logaritmo de e é 1, a base que ele está utilizando é o próprio e, uma vez que, pela definição, $\log_e e = 1$.

O número e é de grande importância na Matemática, assim como o π. No momento, não vamos nos estender sobre as aplicações desse número, mas é interessante observar que o valor de e é obtido por meio da sequência

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Observe:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

n	Expressão de a_n	Valor de a_n
1	$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1$	2
10	$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10}$	2,59374246...
100	$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}$	2,70481283...

Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

Verifique o valor de e dado pela sua calculadora. Em seguida, aumentando as potências de 10 para o valor de *n*, complete a tabela acima com mais algumas linhas, até obter esse número. Note que o valor de n pode ser qualquer número natural, mas estamos trabalhando com potências de 10 para chegar mais rapidamente ao valor de e dado na calculadora.

1. Quantas linhas foram necessárias? Foram mais linhas ou menos linhas do que a quantidade de dígitos que aparecem no mostrador da sua calculadora?
2. Você acha que o número e é racional ou irracional? Justifique sua resposta.

Há uma relação entre o número de Euler e o logaritmo neperiano, como é conhecido o log estudado por John Napier. Embora Napier não utilizasse formalmente o conceito de base (devemos lembrar que, quando ele criou os logaritmos, a ideia da escolha de base não existia), estudos posteriores puderam confirmar que a utilizada pelo seu sistema de logaritmos equivale a $\frac{1}{e}$.

Napier estudava movimentos astronômicos, o que nos dá indício da importância da constante *e* (que é, sim, um número irracional, uma vez que a sequência que a forma não pode ser igualada a nenhum número racional).

Então, temos até agora três importantes bases para o cálculo dos logaritmos: a base $\frac{1}{e}$ do logaritmo neperiano, importante pelo valor histórico; a base 10 do logaritmo decimal, importante pela praticidade de cálculos; e a base *e* do logaritmo natural, importante para algumas aplicações na Matemática superior. Dessas, duas apresentam notação específica, veja a seguir.

spiber.de/Shutterstock.com

I. Quando escrevemos log 3, sem especificar a base, estamos querendo dizer $\log_{10} 3$. A tecla log das calculadoras está programada nessa base. Esse é o chamado logaritmo comum.

II. Quando escrevemos ln 3, em vez de log, estamos querendo dizer $\log_e 3$. A tecla ln das calculadoras está programada nessa base. Esse é o chamado logaritmo natural.

Ocorre, entretanto, que qualquer número maior que zero e diferente de 1 pode servir de base para um logaritmo, como vimos na definição. Quando precisamos calcular um logaritmo em uma base qualquer, podemos recorrer à quarta propriedade dos logaritmos, chamada de "mudança de base". Vamos ver como essa propriedade funciona.

Suponha que quero calcular $\log_3 2$ e só tenho uma calculadora com a tecla log. Para obter $\log_3 2$, basta dividir log 2 por log 3. Veja por que isso funciona:

- Chamando $\log_3 2$ de n, podemos afirmar que $3^n = 2$.
- Sendo $x = \log 2$ e $y = \log 3$, podemos concluir que $10^x = 2$ e $10^y = 3$.
- Substituindo na igualdade da primeira linha, temos $(10^y)^n = 10^x$.
- Logo, $10^{ny} = 10^x$.
- Assim, $ny = x \rightarrow n = \frac{x}{y}$.
- Como $x = \log 2$ e $y = \log 3$, temos $\log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3}$

Note que o número 10 foi uma escolha aleatória, mas conveniente. A propriedade é válida para qualquer base que se queira, desde que se satisfaça a condição de existência dos logaritmos. Note também que podemos trocar 2 e 3 por quaisquer valores positivos (desde que a base do logaritmo seja 1). Sem perda de generalidade. Assim, essa propriedade vale sempre: existindo $\log_c b$, $b > 0$, $c > 0$ e $c \neq 1$. Ela é análoga à divisão $\log_a b : \log_a c$, escolhendo um valor conveniente para *a*.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Antes de demonstrar as outras propriedades, vamos conhecer mais uma consequência direta da definição a seguir.

Se o logaritmo é o valor do expoente ao qual devemos elevar a base para obter o logaritmando, então, para todo *a* e *b* positivos com $a \neq 1$, $a^{\log_a b} = b$. Veja:

$$\text{(i) } \log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \text{ (ii)}$$

Substituindo $= \log_a b$ da igualdade (i) no expoente da igualdade (ii), temos:

$$a^{\log_a b} = b$$

Uma forma de interpretar essa igualdade é:

$x = \log_a b \rightarrow$ "*x* é o expoente ao qual devo elevar *a* para obter *b*"

$a^{\log_a b} = b \rightarrow$ "elevando *a* ao 'expoente ao qual devo elevar *a* para obter *b*', obtenho *b*"

Podemos agora demonstrar facilmente as propriedades usando essa definição e o fato já conhecido de que, para qualquer *m* e *n* reais, $m = n \Leftrightarrow a^m = a^n$. Nessa e nas demonstrações seguintes, estamos considerando $a > 0$ e $a \neq 1$.

I. Vamos demonstrar que, sendo *b* e *c* reais positivos, $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

$$a^{\log_a b + \log_a c} = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = b \cdot c \Leftrightarrow \log_a (b \cdot c) = \log_a b + log_a c$$

II. Vamos demonstrar que, sendo b e c reais positivos, $\log_a (b : c) = \log_a b - \log_a c$

$$a^{\log_a b - \log_a c} = a^{\log_a b} : a^{\log_a c} = b : c \Leftrightarrow \log_a (b : c) = \log_a b - \log_a c$$

III. Vamos demonstrar que, sendo b um real positivo, $\log_a (b^c) = c \cdot \log_a b$

$$a^{c \cdot \log_a b} = a^{(\log_a b) \cdot c} = (a^{\log_a b})^c = b^c \Leftrightarrow \log_a (b^c) = c \cdot \log_a b$$

Assim, temos todas as propriedades de que precisamos para conhecer a função logarítmica.

Logaritmos: definição e condição de existência

Sendo a e b números reais positivos com $a \neq 1$, temos: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

Nessa operação, a é a base, c é o logaritmo de b na base a e b é o logaritmando.

Consequências da definição

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $a^{\log_a b} = b$

Propriedades

Sendo a, b e c números reais positivos com $a \neq 1$, temos:

- logaritmo de um produto:
  $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- logaritmo de um quociente:
  $\log_a (b : c) = \log_a b - \log_a c$

Sendo a e b números reais positivos com $a \neq 1$, temos, para todo c real:

- logaritmo de uma potência:
  $\log_a (b)^c = c \cdot \log_a b$

Sendo a, b e c números reais positivos com $a \neq 1$ e $b \neq 1$, temos:

- mudança de base, sendo a uma escolha conveniente: $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$.

Veja alguns exemplos de como as propriedades podem auxiliar no cálculo de logaritmos. Para os dois exemplos a seguir, vamos calcular o mesmo logaritmo usando três técnicas diferentes.

Exemplo 1

Vamos calcular $\log_5 0{,}8$ usando a tabela de logaritmos da página 71.

Aplicando a propriedade da mudança de base, temos: $\log_5 0{,}8 = \dfrac{\log\ 0{,}8}{\log\ 5}$

Como na tabela só há números naturais, podemos transformar 0,8 em uma fração e usar a propriedade do logaritmo do quociente: $\log_5 0{,}8 = \dfrac{\log 0{,}8}{\log 5} = \dfrac{\log\left(\dfrac{8}{10}\right)}{\log 5} = \dfrac{\log 8 - \log 10}{\log 5}$

Substituindo pelos valores da tabela: $\log_5 0{,}8 = \dfrac{\log 8 - \log 10}{\log 5} \cong \dfrac{0{,}903 - 1}{0{,}669} \cong -0{,}145$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Exemplo 2

Vamos calcular $\log_5 0{,}8$ usando uma informação dada, por exemplo, $\log_5 2 = 0{,}431$

Mais uma vez podemos transformar 0,8 em uma fração: $\log_5 0{,}8 = \log_5 \left(\dfrac{8}{10}\right) = \log_5 \left(\dfrac{4}{5}\right)$

Aplicando a propriedade do logaritmo do quociente:

$\log_5 0{,}8 = \log_5 \left(\dfrac{4}{5}\right) = \log_5 4 - \log_5 5$

Sabendo que $4 = 2^2$ e que $\log_a a = 1$, podemos escrever:
$\log_5 0{,}8 = \log_5 2^2 - 1$

Aplicando a propriedade do logaritmo da potência: $\log_5 0{,}8 = 2 \cdot \log_5 2 - 1$

Substituindo pelo valor dado: $\log_5 0{,}8 = 2 \cdot 0{,}431 - 1 = -0{,}138$

Importante ressaltar que, nos dois exemplos, os valores são aproximados – foram arredondados para a casa dos milésimos. O exemplo 1 é o que tem maior margem de erro, já que os arredondamentos foram usados duas vezes: primeiro, ao criar a tabela; depois, ao aplicá-la. De todo modo, se arredondarmos os resultados dos dois exemplos para a casa dos centésimos, temos: $\log_5 0{,}8 \cong -0{,}14$.

Atenção!

Note que, no exemplo 1, usamos a fração $\dfrac{8}{10}$ e, no exemplo 2, simplificamos para $\dfrac{4}{5}$. Fizemos isso porque, no exemplo 2, era mais interessante usar o denominador 5, que era igual à base do logaritmo que foi dado. De modo geral, utilizar diferentes fatorações do mesmo número pode ser importante na resolução de alguns problemas envolvendo logaritmos.

Para pensar e discutir Orientações no Manual do Professor.

Agora é com você. Utilizando os diversos contextos que podem ser modelados por funções exponenciais, crie uma situação que envolva duas variáveis cuja relação possa ser representada por uma função desse tipo.

Descreva a situação com detalhes, de modo que seja possível determinar a lei da função exponencial, seu domínio e seu contradomínio.

Em seguida, elabore um problema que, para ser resolvido, seja necessário usar ao menos uma das propriedades dos logaritmos. Você pode também definir o modo de resolução que quer abordar indicando o que será preciso para isso: uma calculadora, uma tabela ou um dado disponibilizado por você.

Troque seu problema com um colega: você deve resolver o problema proposto por ele, e vice-versa. No final, compartilhem as estratégias que utilizaram tanto para elaborar quanto para resolver o problema.

A função logarítmica e seu gráfico

No início da unidade, estudamos um experimento que dizia que, dobrando uma folha de papel 30 vezes, atingiríamos uma espessura de 10 quilômetros. Para modelar essa situação, estudamos a relação entre duas variáveis: a quantidade de dobras e a espessura da folha dobrada.

Ao estudar o crescimento exponencial, consideramos que a espessura da folha variava em função da quantidade de dobras. Mas o que aconteceria se quiséssemos fazer o contrário? Como podemos analisar a variação da quantidade de dobras necessária para atingir determinada espessura?

Para explorar

Respostas no Manual do Professor.

Em duplas, discutam as atividades a seguir.

1. Considerem que uma folha de papel tem inicialmente 1 mm de espessura. Queremos saber como descobrir quantas dobras precisamos fazer para atingir uma espessura qualquer. Para isso, vamos chamar de x a espessura que queremos atingir e de y a quantidade de dobras que precisamos fazer.

a) Completem a tabela abaixo com os valores de y.

X (mm)	1	2	4	8	16	32	64	128

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

b) Determinem a lei da formação da função $y = f(x)$.

c) Representem em um plano cartesiano os pontos da tabela para esboçar o gráfico da função $f(x)$.

d) Como vocês descreveriam o crescimento dessa função?

Você já deve ter notado que estamos conceituando a função logarítmica. Para entender melhor essa função vamos estudar o conceito de função inversa.

Função inversa

Considere uma função $f\colon A \to B$ bijetora que associa cada elemento x de A a um elemento y de B, formando os pares $(x; y)$. Chamamos de inversa de f e representamos por f^{-1} a função $g\colon B \to A$ que associa cada elemento y de B a um elemento x de A, de modo que cada par $(y; x)$ de g é exatamente simétrico a um par $(x; y)$ de f.

Particularmente, se duas variáveis x e y se relacionam por alguma lei que põe y em função de x formando uma bijeção, podemos utilizar operações inversas para escrever x em função de y, formando assim a lei da função inversa.

Atenção!

Estamos usando o conceito de par ordenado simétrico para denominar os pares cujas coordenadas são trocadas. Por exemplo: (1; 2) é simétrico a (2; 1).

Veja alguns exemplos:

Exemplo 1

Seja $f: A \to B$ uma função que leva os elementos do conjunto $A = \{1; 2; 3\}$ aos elementos do conjunto $B = \{0; -7; \pi\}$ formando os pares $(1; 0)$; $(2; -7)$; $(3; \pi)$, sua inversa será a função $g: B \to A$, que forma os pares $(0; 1)$; $(-7; 2)$; $(\pi; 3)$. Podemos afirmar que $g = f^{-1}$.

Atenção!

Por convenção, usamos as variáveis x e y para escrever funções e, de modo geral, escrevemos y em função de x. Como as letras utilizadas para representar variáveis são escolhas, podemos usar a mesma letra ***x*** para representar a variável independente tanto na função f quanto na função f^{-1}, como vimos no exemplo 2.

Exemplo 2

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada pela lei $y = f(x) = 2x - 5$. Para determinar sua inversa, precisamos escrever x em função de y, assim:

$$2x - 5 = y \Leftrightarrow 2x = y + 5 \Leftrightarrow x = 0{,}5y + 2{,}5$$

Logo, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada pela lei $g(x) = 0{,}5x + 2{,}5$. Temos também $g = f^{-1}$.

Como vimos nas seções anteriores, a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ cuja lei é $f(x) = a^x$ é bijetora, ou seja, pode ser invertida. Considerando essa afirmação, vamos investigar a inversa da exponencial.

Para explorar

Respostas no Manual do Professor.

Reúna-se com um colega para resolver as atividades a seguir.

1. Com base na definição de função inversa dada, determinem a inversa da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ cuja lei é $f(x) = a^x$.
   Determinem a lei de formação da função, seu domínio e sua imagem.
2. Sabendo que na função $f(x) = a^x$ o parâmetro a deve ser positivo e diferente de 1, descrevam as condições de existência da sua função inversa.
3. Considerem as seguintes condições sobre o parâmetro a da função exponencial:

   Se $0 < a < 1$, a função é decrescente. Ou seja, se $m > n$, então $f(m) < f(n)$.
   Se $a > 1$, a função é crescente. Ou seja, se $m > n$, então $f(m) > f(n)$.

   Escrevam condições semelhantes para a função inversa.
4. Ao definir a função inversa, afirmamos que, se o par $(x; y)$ pertence à função f, então o par $(y; x)$ pertence a sua inversa. Representem em um plano cartesiano alguns pontos de $f(x)$ e, em seguida, representem os pares ordenados simétricos. Que relação vocês observam entre o gráfico de uma função e o gráfico de sua inversa?

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

O gráfico da função logarítmica

Você já deve ter observado que a inversa da função exponencial é a função logarítmica. Podemos definir essa função da seguinte maneira:

De modo geral, denominamos **função logarítmica** às funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do tipo:

$$f(x) = \log_a x \text{ com } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

A seguir, vamos ver como as propriedades que estudamos podem ser usadas para nos ajudar a compreender essa função e seu gráfico.

Para pensar e discutir

1. Com base nas discussões sobre funções exponenciais, escreva um parágrafo explicando:
   a) por que a base do logaritmo deve ser positiva e diferente de 1; Respostas pessoais.
   b) por que o domínio da função logarítmica deve ser positivo;
   c) por que em toda função $f(x) = \log_a x$ temos $f(a) = 1$ e $f(1) = 0$.

2. Utilize um *software* para elaboração de gráficos e represente as seguintes funções: Respostas no Manual do Professor.

a) $f(x) = \log x$

b) $f(x) = \log_{0,1} x$

c) $f(x) = \log_5 x$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{e}} x$

e) $f(x) = \ln x$

3. Observando os gráficos, responda:

a) Os gráficos estão de acordo com suas respostas para a atividade em dupla que você fez anteriormente?

b) O que acontece com o gráfico da função quando a base está entre 0 e 1? A curva do gráfico é decrescente.

c) O que acontece com o gráfico da função quando a base é maior que 1? A curva do gráfico é crescente.

4. Com base nas discussões sobre funções exponenciais, escreva um parágrafo explicando o que, em sua opinião, será alterado no gráfico de $f(x) = \log x$ para obter o gráfico de:

a) $g(x) = 1 + \log x$ **b)** $h(x) = 2 \cdot \log x$ **c)** $m(x) = \log_2 x$

5. Empregando as propriedades dos logaritmos, reescreva as três funções da atividade 4 de modo a obter um único logaritmo de base 10. **a)** $\log (10x)$ **b)** $\log x^2$ **c)** $\log x^{\frac{1}{\log 2}}$

6. Ao estudarmos logaritmos, vimos que eles foram criados para transformar multiplicações em adições. Mostre que, dada uma função $f(x) = \log_a x$, temos $f(b \cdot c) = f(b) + f(c)$. Orientações no Manual do Professor.

Com base nas características das funções exponenciais, podemos listar as propriedades das funções logarítmicas:

Seja $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uma função logarítmica do tipo $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, temos:

- $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é bijetora;
- se $m = n$, $f(m) = f(n)$;
- $f(1) = 0$ e $f(a) = 1$;
- $f(m \cdot n) = f(m) + f(n)$;
- Se $0 < a < 1$, f é decrescente; se $a > 1$, f é crescente.

4. a) O gráfico deve ser trasladado em uma unidade na vertical para cima.

b) A curva do gráfico será alterada (o crescimento será mais rápido).

c) A curva do gráfico será alterada (o crescimento será ainda mais rápido que na função h).

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Atividades

1. Empregando as propriedades, descubra o valor de $\log_{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{5}\right)$. -2

2. Mostre que, sendo a um número real positivo com $a \neq 1$, temos $\log_{a^n} a^m = \frac{m}{n}$.
Orientações no Manual do Professor.

3. Mostre que, sendo a e b números reais positivos com $a \neq 1$ e $b \neq 1$, temos $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.
Orientações no Manual do Professor.

4. Escreva a expressão $\log 5 - 3 \cdot \log 2 + 1{,}5 \cdot \log 9$ na forma de um único logaritmo. $\log \frac{135}{8}$

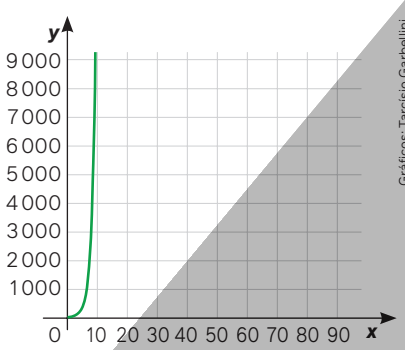
5. Sabendo que $\log 2 \cong 0{,}3$, determine o valor de $\log 0{,}25$. $-0{,}6$

Escala logarítmica

Um uso comum para a função log ocorre quando se deseja medir e classificar crescimentos exponenciais. Vamos retomar uma situação exponencial já vista, por exemplo.

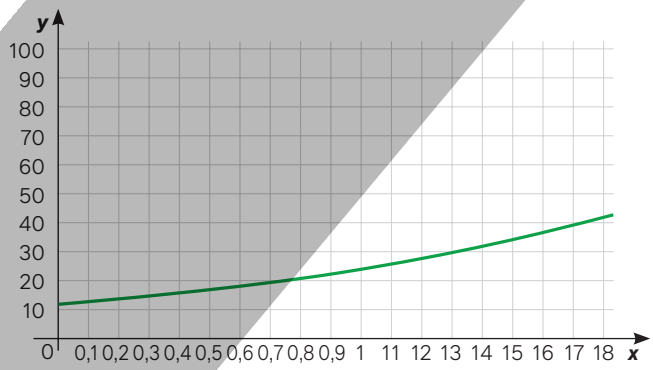
Para retomar

Vamos representar a área coberta por uma população de algas que começa ocupando 12 m² e duplica esse espaço a cada 18 dias. A medida da área varia em função do tempo em dias corridos durante 6 meses (180 dias).



Gráficos: Tarcísio Garbellini

No momento em que foi feita a análise desse gráfico, foi possível notar que, aumentando-se a escala, os dados poderiam ser observados de maneira bem distinta. Veja ao lado.



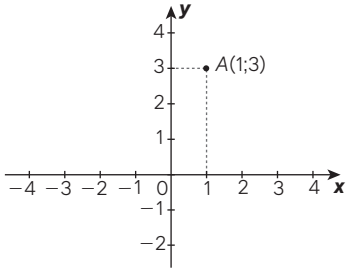
Isso acontece porque a função tem um crescimento muito acelerado, o que dificulta a observação dos dados de forma global. Quando olhamos um pequeno trecho do domínio, observamos um pedaço do crescimento da função, mas perdemos a noção do todo. Quando vemos um trecho maior do domínio, perdemos o detalhamento.

Para resolver essa questão foi desenvolvida a escala logarítmica. Esse tipo de escala é utilizado quando precisamos observar um crescimento exponencial em um intervalo significativo do domínio, mas não podemos perder informações sobre o que acontece no trecho inicial do crescimento.

A construção da escala é simples. Em um plano cartesiano, dispõem-se os valores do eixo horizontal de forma linear, como feito normalmente. No eixo vertical, utiliza-se uma escala logarítmica em alguma base.

Para exemplificar, vamos utilizar a base 10. No plano cartesiano abaixo, os valores de x (1, 2, 3, 4, 5...) representam as [illegible] de y representam os logaritmos da base 10. Assim, a unidade [illegible] representa 10 unidades, $y = 2$ representa $10^2 = 100$ unidades, e assim por diante.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

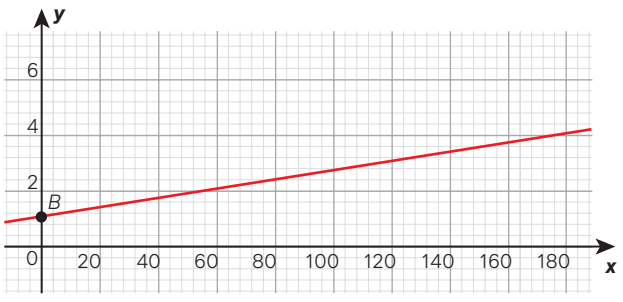


Isso significa que, se uma função passa pelo ponto (1; 1000), ao representá-la nesse plano, seu gráfico passará pelo ponto (1; log 1000) = (1; 3). Esse é o ponto A representado ali.

Veja como fica o gráfico da função $f(x) = 12 \cdot 2^{\frac{x}{18}}$, que representa a situação que acabamos de retomar.

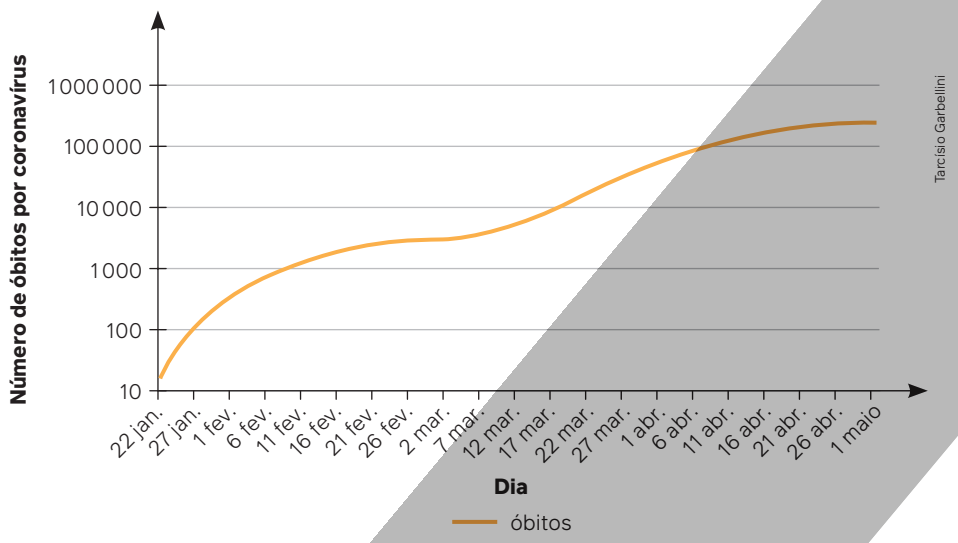
Note que agora é possível enxergar o domínio inteiro da função e analisar seu crescimento de forma global, sem precisar ajustar a escala. Veja o gráfico a seguir.

Essa é uma técnica bastante empregada para representar relações entre grandezas em que uma pequena alteração na variável independente gera um grande impacto na variável dependente. De modo geral, sempre que uma função exponencial é representada em um gráfico em escala logarítmica, a figura formada no gráfico é uma reta. Isso permite também analisar relações entre grandezas para avaliarmos se são modeladas por funções exponenciais.



Outra situação que pode ter o crescimento analisado em escala logarítmica é a quantidade de mortes causadas pelo vírus covid-19 entre 22 de janeiro e 1º de maio de 2020. Observe o gráfico abaixo.

Total de mortes (escala logarítmica)



Fonte: CORONAVIRUS worldwide graphs. *In*: WORLDOMETER. [*S. l.*], [2020]. Disponível em: https://www.worldometers.info/coronavirus/worldwide-graphs/#total-deaths. Acesso em: 2 maio 2020.

A análise dele mostra que o crescimento exponencial no início do ano aparentava ser bastante acelerado, mas diminuiu ao longo do mês de fevereiro e voltou a aumentar a partir da segunda quinzena de março. Esse exemplo mostra como a escala logarítmica e a relação entre as funções logarítmicas e exponenciais podem auxiliar no estudo de diversos fenômenos naturais e sociais.

Atividades

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

1. (Enem) Com [illegible] Computação, estamos próximos do momento em que o número de transistores no processador de um computador pessoal será da mesma ordem de grandeza que o número de neurônios em um cérebro humano, que é da ordem de 100 bilhões.

Uma das grandezas determinantes para o desempenho de um processador é a densidade de transistores, que é o número de transistores por centímetro quadrado. Em 1986, uma empresa fabricava um processador contendo 100 000 transistores distribuídos em 0,25 cm^2 de área. Desde então, o número de transistores por centímetro quadrado que se pode colocar em um processador dobra a cada dois anos (Lei de Moore).

Considere 0,30 como aproximação para log 2.

Em que ano a empresa atingiu ou atingirá a densidade de 100 bilhões de transistores? Alternativa **c**.

a) 1999 **c)** 2022 **e)** 2146

b) 2002 **d)** 2026

2. (Enem) Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador *tsunami* no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por $M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$ sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente. Qual a relação entre E_1 e E_2? Alternativa **c**.

a) $E_1 = E_2 + 2$

b) $E_1 = 10^2 \cdot E_2$

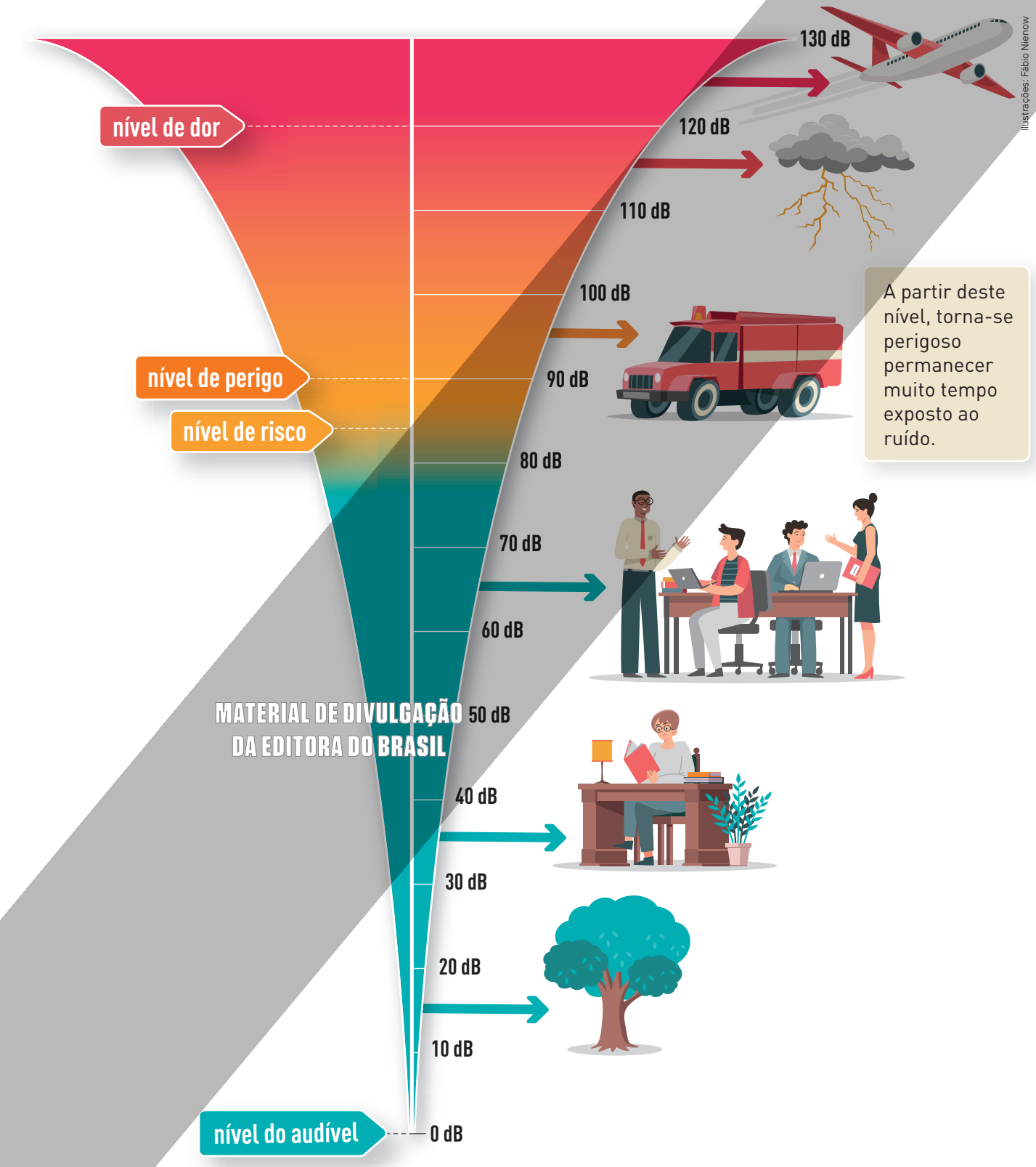
c) $E_1 = 10^3 \cdot E_2$

d) $E_1 = 10^{\frac{9}{7}} \cdot E_2$

e) $E_1 = \frac{9}{7} \cdot E_2$

INFOGRÁFICO

Intensidade e amplitude



Ilustrações: Fábio Nienow

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

4 Equações e inequações exponenciais e logarítmicas

Como vimos na unidade anterior, a Matemática Financeira se baseia na utilização de recursos aritméticos, algébricos e gráficos para estudar, analisar, compreender e modelar situações monetárias, auxiliando no cálculo de juros, inflação, multas, impostos, parcelamento de contas, lucro, prejuízo etc.

Em algumas dessas situações, ao envolver juros compostos, a relação entre o montante e o tempo é dada por $M = C(1 + i)^t$. Note que podemos calcular o montante em função do tempo usando uma função exponencial, desde que saibamos os valores de C e i.

Como funciona o rendimento da poupança?

Como funciona a poupança em poucas palavras?

A caderneta ou conta poupança é disponibilizada por todos os bancos. O rendimento de todos é o mesmo, porque a taxa é préestabelecida pelo governo. Portanto, investir no banco X ou Y não faz diferença nesse sentido.

Quando o rendimento da poupança acontece?

O valor investido recebe juros a cada aniversário. Sim, a data [em] que você aplicou o dinheiro é marcada como aniversário. Na mesma data do mês seguinte, seu dinheiro receberá um valorzinho extra.

Exemplo: se você investir R$ 100 dia 5 do mês, no próximo dia 5 o valor vai ter rendido.

Qual o valor do rendimento?

Desde 2012, o rendimento da poupança passou por uma mudança. A regra agora é a seguinte: Quando a Selic (taxa básica do juros) estiver abaixo de 8,5% ao ano, a poupança rende 70% do valor da taxa básica mais a Taxa Referencial (TR). Quando estiver maior do que 8,5% ao ano, o rendimento passa a ser de 0,5% ao mês mais a TR. Essa regra vale para todos os depósitos que foram feitos na poupança a partir de 2012, quando houve a mudança.

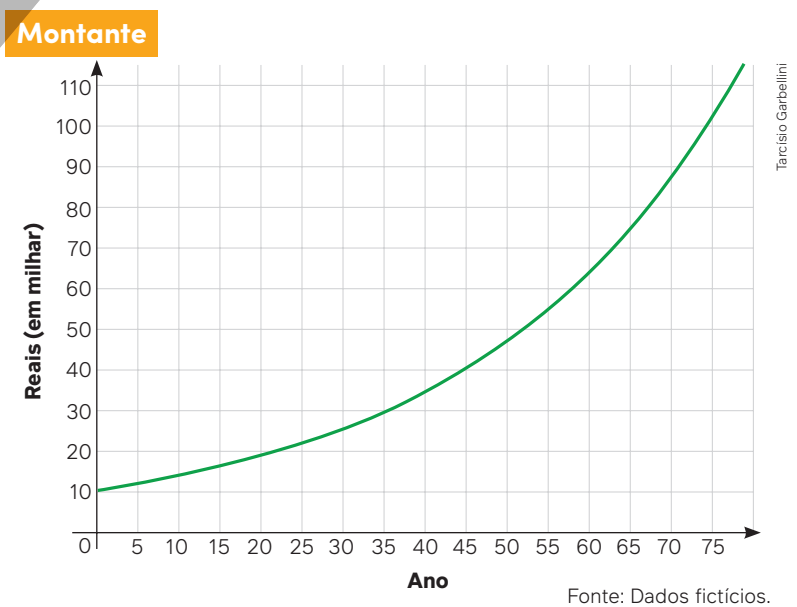
ARAÚJO, [...]. Como funciona o rendimento da poupança. *In*: SERASA ENSINA. São Paulo: Serasa Experian, [2013?]. Disponível em: https://www.serasaconsumidor.com.br/ensina/como-ganhar-dinheiro/rendimento-da-poupanca/. Acesso em: 2 abr. 2020.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Vimos como a função Montante pode ser utilizada para representar uma aplicação de R$ 10.000,00 na poupança. Nesse gráfico, o eixo vertical representa a quantidade M de dinheiro em milhares de reais obtida ao longo dos t anos em uma aplicação na poupança. O eixo horizontal representa o tempo em anos.

$$M(t) = 10(1 + i)^t$$

Utilizamos aqui o multiplicador 10 porque o eixo vertical do gráfico ao lado está graduado em milhares de reais.



Fonte: Dados fictícios.

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Considere que a taxa Selic nos últimos anos se manteve fixada em torno de 4,5% ao ano, enquanto a TR permanece fixada em 0%. **Considerando esses dados e as informações dadas no texto, junte-se a dois colegas para explorar essa situação fazendo o que se pede a seguir.**

1. Calculem a taxa de juro anual da poupança usando os dados do texto. Com o resultado, calculem $M(2)$.
   3,15%; $M(2) \cong 10{,}64$ (aproximadamente R$ 10.640,00)
2. Calculem $M(0)$. Qual ponto representa esse valor no gráfico? O que cada uma das coordenadas desse ponto representa no contexto?
3. Qual é o conjunto imagem da função? $Im(M) = [10\,000; +\infty[$
4. Com o auxílio de uma calculadora, determinem o montante após 13 e 14 anos de aplicação.
   Aproximadamente R$ 14.965,80 e R$ 15.437,22.
5. Como vocês fariam para descobrir a quantidade de anos necessária para que o montante seja R$ 15.000,00? Esse valor pode ser um número inteiro?

Nas atividades anteriores, você deve ter notado que, dado um valor de x, basta substituí-lo na função para encontrar o valor de $M(x)$. Mas quando sabemos o valor de $M(x)$ e queremos determinar o x, precisamos resolver uma equação. Em anos anteriores, você certamente resolveu equações de primeiro grau e deve ter percebido que há algumas técnicas que permitem que se isole a variável. Vamos ver agora algumas formas de isolar a variável no caso de uma equação exponencial.

Resolução de equações exponenciais

Dada uma função exponencial, para determinar algum valor da variável dependente, basta fazer o cálculo com base no valor dado para a variável independente. Entretanto, quando temos a variável dependente e queremos descobrir a independente, o processo pode ser mais complicado. Observe o exemplo a seguir.

Exemplo

Dada a função $f(x) = 2 \cdot 5^x + 4$, calcule o valor de x para o qual $f(x)$ é 254.

- Primeiro, vamos montar a equação: $f(x) = 2 \cdot 5^x + 4 = 254$.
- Então, vamos isolar o termo que está elevado a x:

$2 \cdot 5^x + 4 = 254 \Rightarrow 2 \cdot 5^x = 254 - 4 \Rightarrow 5^x = 250 : 2 \Rightarrow 5^x = 125$

- Vamos decompor 125 em fatores primos: $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$.
- Vamos resolver a equação: $5^x = 5^3$.
- Lembrando que, se $a \neq 0$ e $a^b = a^c$, então $b = c$, podemos igualar os expoentes. Temos $x = 3$.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Reúna-se com um colega para um desafio. Com base nos exemplos e nas propriedades de potências, façam o que se pede em cada caso.

1. Expliquem como vocês podem resolver a equação abaixo. Não se preocupem com os cálculos, mas expliquem o que fazer em cada etapa.

$$7 - 3^{x-1} = 2 \cdot 3^x$$

2. Utilizem a notação log para escrever o resultado das seguintes equações exponenciais:
   a) $3^x = 4$ $\log_3 4$
   b) $3{,}1 \cdot 11^x = 31$ $\log_{11} 10$
   c) $5^x + 5^{x+1} = 12$ $\log_5 2$

3. Com base nas técnicas desenvolvidas, façam o que se pede.
Escolha a e c, tais que $a^b = c$. Troque os valores de a e c com o colega e tente descobrir o valor de b que ele escolheu, enquanto ele deverá fazer o mesmo com o valor de b escolhido por você. Sempre que necessário, utilizem uma calculadora para encontrar o valor de b. Repitam o desafio cinco vezes respeitando as condições a seguir.

a) a é um número natural maior que 1 e c é uma potência de a maior que 1.

b) a é 1 e c é 1.

c) a é um número qualquer e c é 1.

d) a é um número par e c é um número ímpar maior que 1.

e) a é 0,5 e c é uma potência de 2 maior que 1.

f) a é uma dízima periódica e c é uma potência de 2 maior que 1.

g) a é um número qualquer maior que 1 e c é raiz quadrada de uma potência desse número, com $c > 1$.

Como vimos, podemos utilizar os logaritmos para resolver equações exponenciais. Por exemplo, podemos responder à questão: Quanto tempo é necessário para que um capital de R$ 10.000,00 aplicado na poupança gere um montante de R$ 20.000,00?

Nesse caso, temos: $10\,000 \cdot (1{,}035)^x = 20\,000 \Rightarrow 1{,}035^x = 2 \Rightarrow x = \log_2 1{,}035$

Usando uma calculadora, obtemos $x \cong 22{,}34945...$

Lembrando que x é o número de anos, podemos concluir que o tempo necessário para esse capital duplicar é de aproximadamente 22 anos e 4 meses.

Resolução de equações logarítmicas

A resolução de equações logarítmicas se assemelha bastante com a resolução de equações exponenciais. De fato, podemos transformar uma equação logarítmica em uma exponencial e vice-versa. Para entender melhor esse funcionamento, vamos ver alguns exemplos.

Exemplo 1

Assim como as equações exponenciais, quando temos dois logaritmos de mesma base – lembrando que $\log b = \log c \Leftrightarrow b = c$ – podemos igualar os logaritmandos. Veja:

$$\log_3 5x = \log_3 (x + 2) \Rightarrow 5x = x + 2 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = 0{,}5$$

Exemplo 2

Assim como nas equações exponenciais, algumas vezes é preciso usar fatoração para isolar o logaritmo antes de resolver a equação. Veja:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

$$(\log_3 5x)^2 - \log_3 5x = 0 \Rightarrow \log_3 5x \cdot (\log_3 5x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \log_3 5x = 0 \Rightarrow 5x = 3^0 = 1 \Rightarrow x = 0{,}2 \\ \log_3 5x = 1 \Rightarrow 5x = 3^1 = 3 \Rightarrow x = 0{,}6 \end{cases}$$

Para pensar e discutir

Com base nos exemplos e nas propriedades estudadas, faça o que se pede em cada caso.

1. Utilize as propriedades para reduzir as expressões a um único logaritmo.

a) $\log_2 12 + \log_2 3x - \log_2 3$ **b)** $\log x^3 - 2\log x$ **c)** $\ln (x + 1) + \ln (x - 1) - 3\ln 2$

2. Empregue a propriedade de mudança de base para resolver a equação $2 \log_4 3x + \log_2 x = 0$.

Resposta no Manual do Professor.

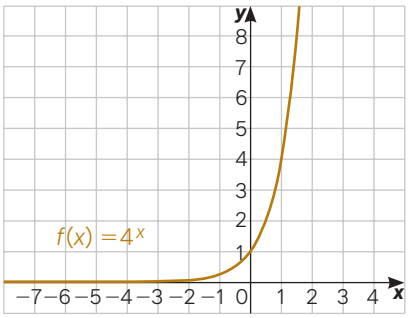
1. a) $\log_2 (12x)$ **b)** $\log x$ **c)** $\ln \frac{x^2 - 1}{8}$

Inequações exponencial e logarítmica

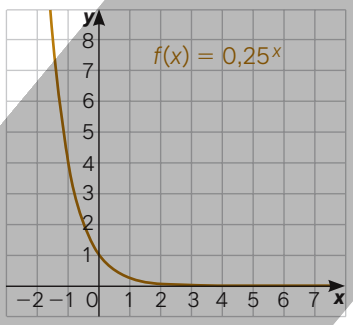
Você já deve ter resolvido uma inequação do primeiro grau e talvez se lembre que essas inequações são solucionadas da mesma forma que as equações, utilizando-se as mesmas manipulações algébricas. O mesmo acontece nas inequações exponenciais e logarítmicas, excetuando o fato de que, nesses casos, é essencial observarmos a base usada na inequação.

Para entender melhor a influência da base na inequação, veja, a seguir, os gráficos de algumas funções.

Função exponencial com base $a > 1$

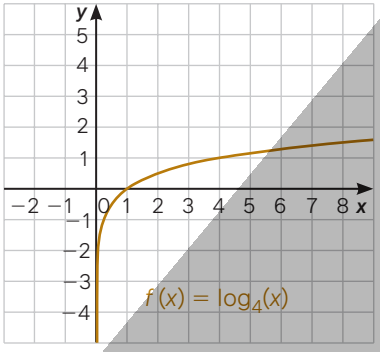


Função exponencial com base $0 < a < 1$

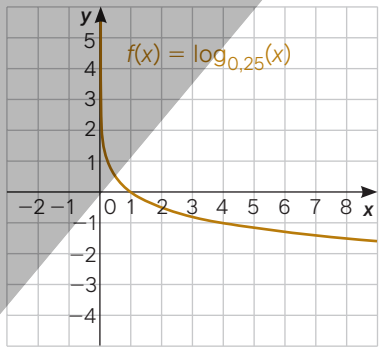


Gráficos: Tarcísio Garbellini

Função logarítmica com base $a > 1$



Função logarítmica com base $0 < a < 1$



Para pensar e discutir Respostas no Manual do Professor.

Observe os gráficos e responda:

1. Considerando a função $f(x) = 4^x$, para que valores de x temos:

a) $f(x) < 1$? **b)** $f(x) > 1$? **c)** $f(x) < 4$? **d)** $f(x) > 4$?

2. Considerando a função $f(x) = 0{,}25^x$, para que valores de x temos:

a) $f(x) < 1$? **b)** $f(x) > 1$? **c)** $f(x) < 4$? **d)** $f(x) > 4$?

3. Considerando a função $f(x) = \log_4 x$, para que valores de x temos:

a) $f(x) < 1$? **b)** $f(x) > 1$? **c)** $f(x) < 0$? **d)** $f(x) > 0$?

4. Considerando a função $f(x) = \log_{0,25} x$, para que valores de x temos:

a) $f(x) < 1$? **b)** $f(x) > 1$? **c)** $f(x) < 0$? **d)** $f(x) > 0$?

5. O que você observa entre o sinal da desigualdade na inequação e o sinal da desigualdade na resposta em cada item?

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

As funções exponenciais e logarítmicas com base maior que zero e menor que 1 são decrescentes. Assim, ao resolver inequações com essas bases, é preciso lembrar que quanto menor a função, maior o valor de x. Isso significa que, ao resolver a inequação, será preciso inverter o sinal das desigualdades no momento de igualar os expoentes ou logaritmandos.

Veja alguns exemplos em que usamos as mesmas técnicas das equações exponenciais e logarítmicas, tomando cuidado apenas para que o sinal da desigualdade respeite o crescimento ou decrescimento da função.

Exemplo 1

$$\log_{\sqrt{2}} x^2 - \log_{\sqrt{2}} 3x < 12$$

Aqui é preciso utilizar as propriedades para organizar a inequação:

$$\log_{\sqrt{2}} \left(\frac{x^2}{3x} \right) < 12$$

Agora, como $\sqrt{2} > 1$, podemos manter a desigualdade entre os logaritmandos. Convém notar que $x^2 : x = x^{2-1} = x$. Podemos fazer essa divisão uma vez que, para que o log exista, temos $x > 0$.

$$\frac{x}{3} < 12 \Rightarrow x < 36$$

Exemplo 2

$$2 \cdot 5^x + 4 > 254$$

Nessa inequação, precisamos primeiro isolar o termo em que o x aparece:

$$2 \cdot 5^x > 250 \Rightarrow 5^x > 125$$

Agora, como a base é $5 > 1$, podemos manter o sinal da desigualdade entre os expoentes:

$$5^x > 5^3 \Rightarrow x > 3$$

Exemplo 3

$$3^{2-x} > 90$$

Nessa inequação, precisamos primeiro aplicar as propriedades. Note que quando um expoente é negativo, significa que podemos inverter a base para deixá-lo positivo:

$$3^2 \cdot 3^{-x} > 90 \Rightarrow 9 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^x > 90 \Rightarrow \left(\frac{1}{3} \right)^x > 10$$

Agora, como a base é $\frac{1}{3} < 1$, precisamos considerar que a maior potência tem o menor expoente. Além disso, como não podemos escrever 10 como potência de 3 com expoente inteiro, vamos usar log:

$$x < \log_{\frac{1}{3}} 10$$

Finalizado o estudo da unidade, podemos voltar à questão 1 da abertura.

Para retomar

1. Suponha que determinada população de insetos cresça a uma razão semanal de 3 : 2. Isso significa que, a cada semana, a quantidade de indivíduos da população é 1,5 vez a população da semana anterior. Se essa população tem hoje 10 mil indivíduos, qual será o tamanho da população daqui a 3 semanas?

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Para essa situação, após estudar os exemplos de inequação, responda: Em quanto tempo a população de insetos ultrapassará os 100 000 indivíduos? $10\,000 \cdot 1{,}5^x > 100\,000 \Rightarrow 1{,}5^x > 10 \Rightarrow x > \log_{1,5} 10 \cong 5{,}68$ semanas, ou seja, a partir da 6ª semana

Atividades

1. Resolva as seguintes inequações:

a) $4^x + 5 > 6$ $x > 0$

b) $2 \cdot 4^{-x} < 8$ $x > -1$

c) $\log_4 x^2 + 2 < 2$ $0 < x < 1$

d) $\log_{0,25} x + \log_{0,25} 4 > 0$ $0 < x < \frac{1}{4}$

2. (UFF) The Internet Archive (http://www.archive.org/) é uma organização sem fins lucrativos com o objetivo de catalogar e armazenar todas as páginas WEB da Internet, desde 1996. Atualmente, o sistema é gerenciado por cerca de 800 computadores pessoais e ele dispõe de aproximadamente 3 petabytes de memória para armazenamento. Cada petabyte equivale a 2^{20} gigabytes.

Admitindo-se que um DVD comum é capaz de armazenar 4 gigabytes (na verdade, ele armazena um pouco mais), então o número de DVDs necessários para armazenar 3 petabytes é: Alternativa **e**.

a) menor que 2^{17} e maior que 2^{16}.

b) maior que 2^{20}.

c) menor que 2^{19} e maior que 2^{18}.

d) menor que 2^{18} e maior que 2^{17}.

e) menor que 2^{20} e maior que 2^{19}.

Atividades finais

1. (Cesgranrio) O número de algarismos do produto $5^{17} \cdot 4^9$ é igual a: Alternativa **b**.

a) 17. **b)** 18. **c)** 26. **d)** 34. **e)** 35.

2. O número $x = \left[(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$ é racional.

a) Usando as propriedades das potências, calcule x. $x = 2$

b) Prove que existem dois números irracionais α e β, tais que α^β é racional. Resposta no Manual do Professor.

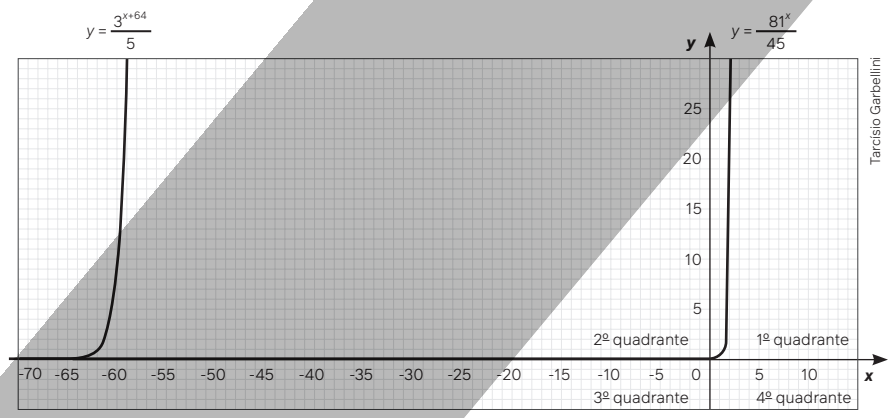
3. (Fuvest) O valor de $(0{,}2)^3 + (0{,}16)^2$ é: Alternativa **b**.

a) 0,0264. **b)** 0,0336. **c)** 0,1056. **d)** 0,2568. **e)** 0,6256.

4. (UFMG) O valor da expressão $(a^{-1} + b^{-1})^{-2}$ é: Alternativa **d**.

a) $\frac{ab}{(a+b)^2}$. **b)** $\frac{ab}{(a^2+b^2)^2}$. **c)** $\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}$. **d)** $\sqrt{5}$.

5. (Unesp) Observe, no plano cartesiano de eixos ortogonais, o gráfico de duas funções exponenciais de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Alternativa **d**.



A intersecção entre os gráficos é um ponto:

a) infinitos pontos, localizados no 2º quadrante.

b) um único ponto, localizado no 2º quadrante.

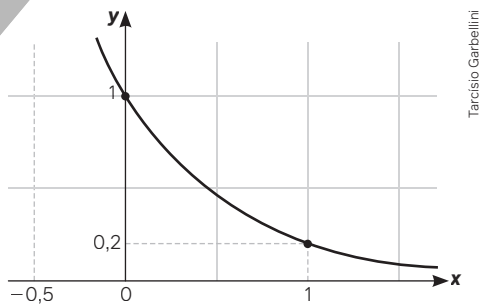
c) um único ponto, localizado no 3º quadrante.

d) um único ponto, localizado no 1º quadrante.

e) um único ponto, localizado no 4º quadrante.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

6. (Unesp) A figura descreve o gráfico de uma função exponencial do tipo $y = a^x$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Alternativa **c**.

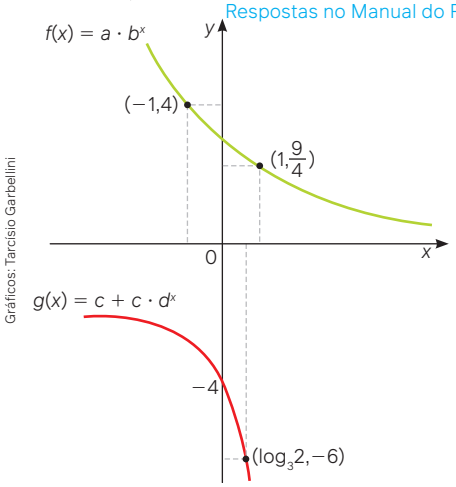


Nessa função, o valor de y para $x = -0{,}5$ é igual a:

a) log 5. **b)** $\log_5 2$. **c)** $\sqrt{5}$. **d)** $\log_2 5$. **e)** 2,5.

7. (Unesp) Os gráficos a seguir referem-se às funções exponenciais f e g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = a \cdot b^x$ e $g(x) = c + c \cdot d^x$ com a, b, c e d sendo números reais, $0 < b \neq 1$ e $0 < d \neq 1$.

Respostas no Manual do Professor.



Gráficos: Tarcísio Garbellini

a) Determine a função f e as coordenadas do ponto de intersecção do seu gráfico com o eixo y.

b) Determine a função g e a equação da assíntota do seu gráfico.

(A assíntota do gráfico de uma função é a reta da qual a função se aproxima sem nunca atingir)

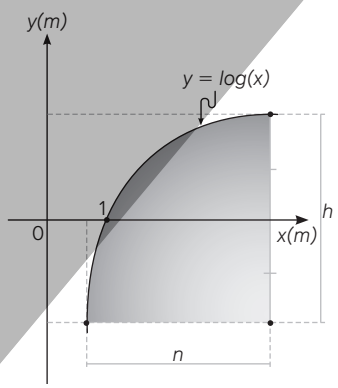
8. (Unesp) Admita que o número de visitas diárias a um *site* seja expresso pela potência 4^n com n sendo o índice de visitas ao *site*. Se o *site* S possui o dobro do número de visitas diárias do que um *site* que tem índice de visitas igual a 6, o índice de visitas ao *site* S é igual a: Alternativa **e**.

a) 12. **c)** 8,5. **e)** 6,5.

b) 9. **d)** 8.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

9. (Enem) Um engenheiro projetou um automóvel cujos vidros das portas dianteiras foram desenhados de forma que suas bordas superiores fossem representadas pela curva de equação $y = \log(x)$, conforme a figura. Alternativa **e**.



A forma do vidro foi concebida de modo que o eixo x sempre divida ao meio a altura h do vidro e a base do vidro seja paralela ao eixo x. Obedecendo a essas condições, o engenheiro determinou uma expressão que fornece a altura h do vidro em função da medida n de sua base, em metros.

A expressão algébrica que determina a altura do vidro é:

a) $\log\left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right) - \log\left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right)$

b) $\log\left(1 + \frac{n}{2}\right) - \log\left(1 - \frac{n}{2}\right)$

c) $\log\left(1 + \frac{n}{2}\right) + \log\left(1 - \frac{n}{2}\right)$

d) $\log\left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right)$

e) $2\log\left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right)$

10. (Unesp) No artigo "Desmatamento na Amazônia Brasileira: Com que intensidade vem ocorrendo?", o pesquisador Philip M. Fearnside, do Inpa, sugere como modelo matemático para o cálculo da área de desmatamento a função $D(t) = D(0)\ \Sigma\ e^{k \cdot t}$, em que $D(t)$ representa a área de desmatamento no instante t, sendo t medido em anos desde o instante inicial, $D(0)$ a área de desmatamento no instante inicial $t = 0$, e k a taxa média anual de desmatamento da região. Admitindo que tal modelo seja representativo da realidade, que a taxa média anual de desmatamento (k) da Amazônia seja 0,6% e usando a aproximação $\ln 2 \approx 0{,}69$, o número de anos necessários para que a área de desmatamento da Amazônia dobre seu valor, a partir de um instante inicial prefixado, é aproximadamente: Alternativa **b**.

a) 51. **c)** 15. **e)** 11.

b) 115. **d)** 151.

11. (Fuvest) Um analgésico é aplicado via intravenosa. Sua concentração no sangue, até atingir a concentração nula, varia com o tempo de acordo com a seguinte relação:

$c(t) = 400 - k\log_3(at + 1)$, em que t é dado em horas e $c(t)$ é dado em mg/L. As constantes a e k são positivas.

a) Qual é a concentração do analgésico no instante inicial $t = 0$? 400 mg/L

b) Calcule as constantes a e k, sabendo que, no instante $t = 2$, a concentração do analgésico no sangue é metade da concentração no instante inicial e que, no instante $t = 8$, a concentração do analgésico no sangue é nula. $a = 1$; $k = 200$

UNIDADE 3

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Arthimedes/Shutterstock.com

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Nos dias de hoje, a alta tecnologia possibilita que troquemos informações com pessoas do mundo todo a qualquer hora e de qualquer lugar.

Nesta unidade, você vai:

- identificar a regularidade existente em sequências numéricas;
- compreender a formação de uma sequência a partir de termo geral;
- determinar o termo geral de uma progressão geométrica;
- empregar as propriedades de uma progressão geométrica para resolver problemas;
- identificar e relacionar o cálculo de montantes em juros compostos com crescimento em progressão geométrica;
- utilizar o conceito de logaritmo para resolver situações-problema relacionadas à progressão geométrica;
- corresponder os termos de uma progressão geométrica com imagens de função exponencial;
- associar o estudo de fractais com progressão geométrica identificando sua formação.

Fenômenos

O maior sonho de um pesquisador é, em um experimento, descobrir como as variáveis envolvidas se relacionam e, com base nisso, descrever, por meio de um modelo, o comportamento delas.

Um fenômeno observável é o caso das redes sociais. A velocidade de propagação de uma notícia hoje é algo assustador!

1. Qual é a denominação que você dá a um crescimento muito acentuado?

2. O que significa, em sua opinião, crescimento em progressão geométrica?

As respostas são pessoais e dependem do conhecimento dos alunos. Entretanto, é esperado que eles comentem que um crescimento acentuado é geralmente denominado, na mídia, de crescimento exponencial. Como a unidade irá trabalhar com progressão geométrica, você pode retomar a segunda questão informando que há uma relação entre progressão geométrica e função exponencial que será trabalhada na unidade.

1 Sequências numéricas

Os fractais e as sequências

Na BNCC

Nesta unidade você vai trabalhar as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias 3, 4 e 5 e as habilidades EM13MAT304, EM13MAT305, EM13MAT405, EM13MAT508.

Esta imagem foi gerada por computador. Parece representar uma paisagem que lembra o mundo natural, porém é virtual.

Zulia Z/Shutterstock.com

DasArts/Shutterstock.com

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Experimento com fractal de Mandelbrot.

Aproximando cada vez mais a imagem, mais detalhes poderão ser observados. Surpreendente é observar que cada forma dentro do conjunto contém um número de formas menores, que contêm um número de outras formas ainda menores, indefinidamente.

Isso você também pode observar na ilustração ao lado.

Essas imagens ilustram a teoria dos fractais.

Os primeiros fractais foram descobertos por K. Weierstrass, G. Cantor, H. von Koch e outros no início do século XIX.

Para que você possa ter uma ideia, vamos exemplificar com a curva de H. von Koch, que pode ser obtida considerando o **algoritmo** a seguir.

1. Trace uma linha de determinado comprimento.
2. Divida essa linha em três partes iguais e remova a parte central.
3. Trace dois segmentos idênticos ao retirado e coloque-os lado a lado construindo um triângulo equilátero sem base.
4. Repita esse procedimento indefinidamente para cada segmento da figura.

Para entender melhor o conceito destacado, consulte o tópico **Algoritmos e fluxogramas** na **Caixa de ferramentas**.

A ideia desse algoritmo é que você consiga obter a seguinte sequência de figuras:

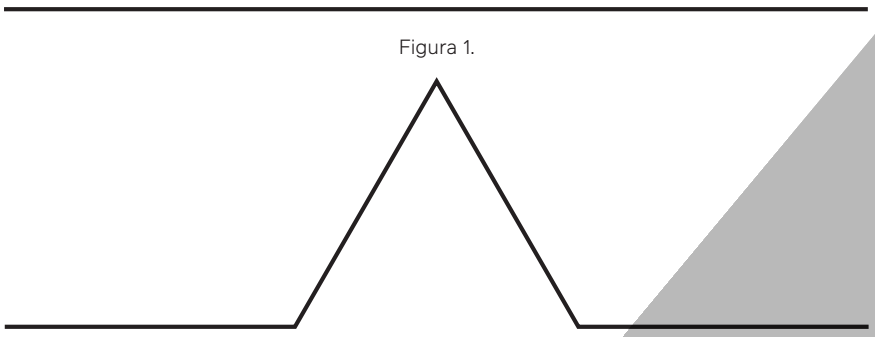


Figura 1.

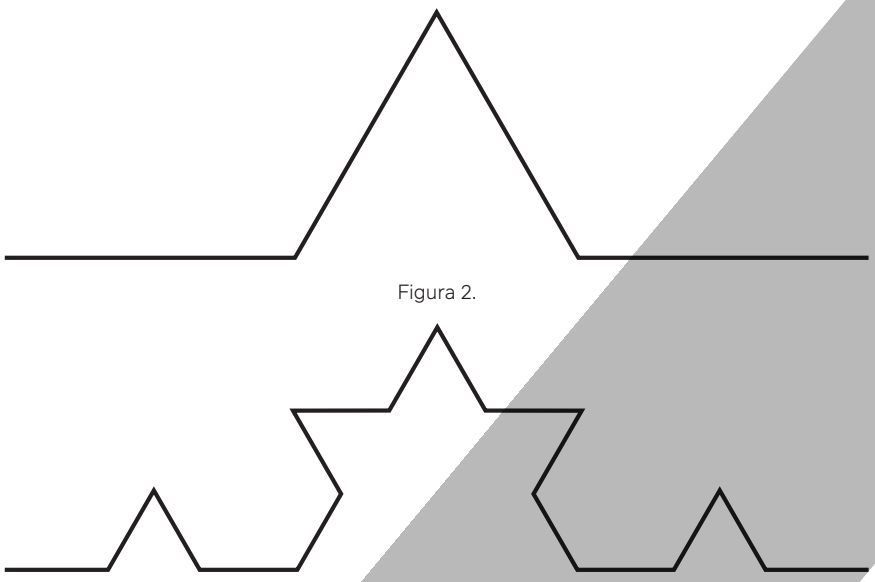


Figura 2.

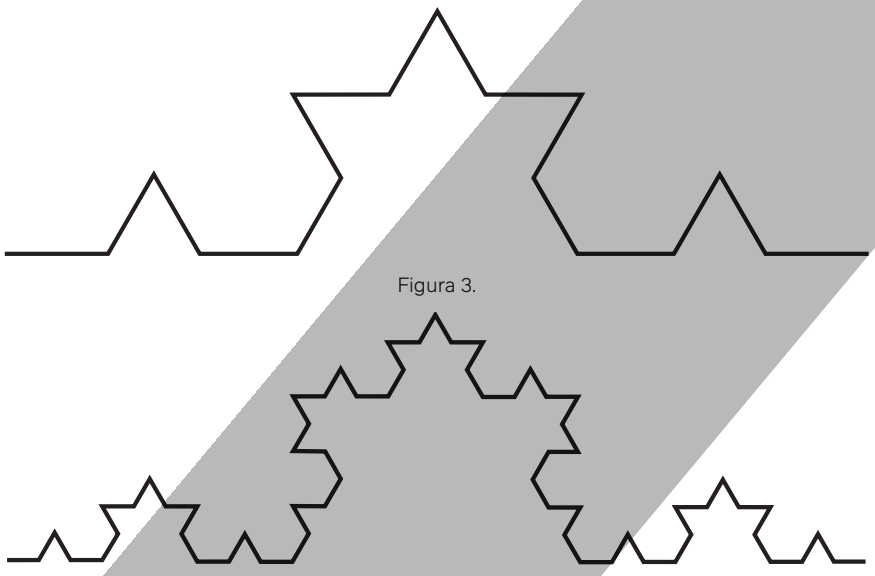


Figura 3.

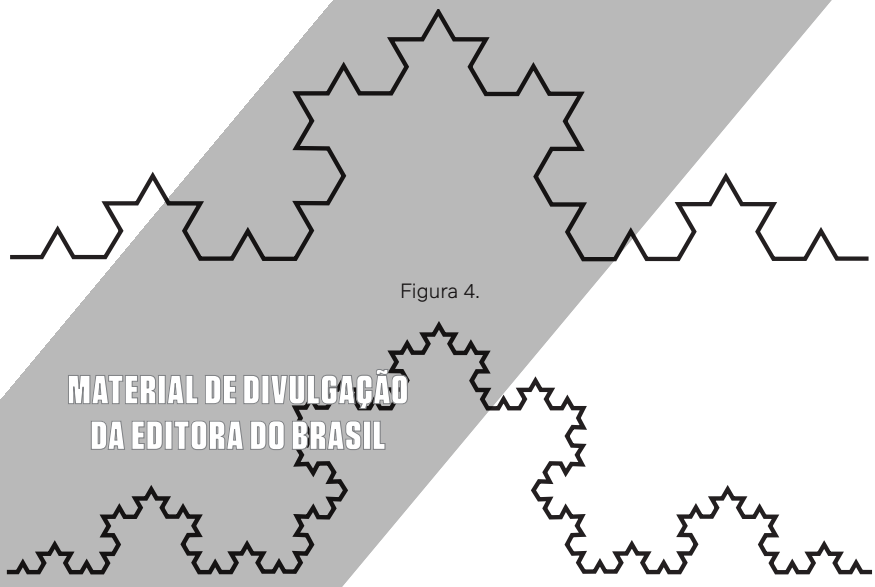


Figura 4.

Figura 5.

Tarcísio Garbellini

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

⋮

Para pensar e discutir Orientações no Manual do Professor.

1. Você saberia escrever outro algoritmo para a construção da curva de Koch? Explique. Resposta pessoal.
2. A linha da figura 2 tem comprimento maior, menor ou igual ao comprimento da linha da figura 3? Menor.
3. Se o comprimento da linha da figura 1 for unitário (1 u.c.), qual número representa o comprimento da linha da figura 5? $\frac{256}{81}$ u.c.

Ao analisarmos os comprimentos das linhas das figuras construídas, temos uma **sequência** denominada progressão geométrica. Voltaremos a essa situação. Por ora, vamos trabalhar o conceito de sequências.

Embora tenhamos mencionado aqui alguns personagens importantes no desenvolvimento da teoria dos fractais, normalmente aquele que é tido como o "Pai dos fractais" é o polonês Benoît B. Mandelbrot. O texto a seguir pode ser considerado não apenas de história da Matemática como também a história de um personagem e de sua grande descoberta.

Raphael GAILLARDE/Gamma-Rapho/Getty Images

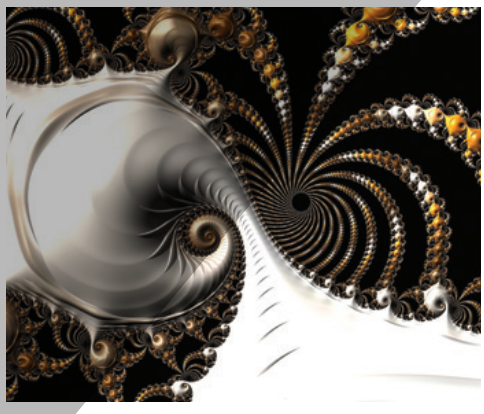
Benoit Mandelbrot (1924-2010).

Nelson Charette Photo/Shutterstock.com

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Exemplo de fractal.

Nelson Charette Photo/Shutterstock.com



Exemplo de fractal.

Pai dos fractais

A interrupção causada pela Segunda Guerra Mundial adiou em seis meses os exames de admissão para duas grandes instituições educacionais parisienses, a École Normale Supérieure e a École Polytechnique. Os exames duravam um mês e eram extremamente difíceis, mas o jovem Benoît Mandelbrot completou os dois. Um de seus professores descobriu que, em meio a todos os candidatos, apenas um respondera a uma questão de matemática particularmente difícil. Ele adivinhou que teria sido Mandelbrot, e, ao indagar, descobriu que estava certo. O professor confidenciou que ele próprio achara o problema impossível, por causa de uma "integral tripla realmente horrorosa" que residia no coração dos cálculos.

Mandelbrot riu. "É muito simples." Então explicou que a integral era na realidade o volume de uma esfera disfarçada. Caso se usasse o sistema de coordenadas correto, o problema ficava óbvio. E todo mundo sabia a fórmula para o volume da esfera. Isso era tudo. Uma vez que se percebia o truque... Mandelbrot estava obviamente certo. Chocado, o professor saiu vagando, murmurando: "Claro, claro". Por que ele próprio não havia percebido isso?

Porque ele vinha pensando simbolicamente, não geometricamente.

Mandelbrot era um geômetra natural, com forte intuição visual. Depois de uma infância difícil, judeu na França ocupada, em constante perigo de ser preso pelos nazistas e muito provavelmente acabar num campo de extermínio, ele esculpiu para si uma carreira matemática heterodoxa mas altamente criativa, construída fundamentalmente enquanto membro dos Laboratórios Thomas J. Watson da IBM, em Yorktown Heights, no estado de Nova York. Ali produziu uma série de artigos sobre tópicos variando da frequência das palavras nos idiomas até o nível das enchentes nos rios. Então, num surto de inspiração, sintetizou o grosso dessas diversificadas e curiosas pesquisas num único conceito geométrico: o conceito de fractal.

As formas tradicionais da matemática, como esferas, cones ou cilindros, possuem um formato muito simples. Quanto mais de perto você olha, mais lisas e planas elas parecem. O detalhe global some, e o que sobra se assemelha muito com um plano sem características especiais. Os fractais são diferentes. O fractal tem uma estrutura detalhada em qualquer escala de ampliação. Ele é infinitamente sinuoso. "Nuvens não são esferas", escreveu Mandelbrot, "montanhas não são cones, linhas costeiras não são círculos e uma casca de árvore não é lisa, tampouco os raios viajam em linha reta." Os fractais captam aspectos da natureza que as estruturas tradicionais da física matemática não captam. Eles levaram a mudanças fundamentais na maneira como os cientistas modelam o mundo real, com aplicações em física, astronomia, biologia, geologia, linguística, finanças internacionais e muitas outras áreas. E também possuem profundas características de matemática pura e fortes ligações com dinâmica caótica.

Orientações no Manual do Professor.

Fractais são uma das muitas áreas da matemática que, conquanto não inteiramente novas, decolaram durante a segunda metade do século XX e modificaram a relação entre a matemática e suas aplicações, criando novos métodos e pontos de vista. As raízes da geometria fractal podem ser remontadas até a busca de rigor lógico em análise, levando à invenção, por volta de 1900, de uma variedade de "curvas patológicas" cujo principal papel era mostrar que argumentos intuitivos ingênuos podem dar errado. Por exemplo, Hilbert definiu uma curva que passa por todo ponto dentro de um quadrado – não só chega perto, mas atinge exatamente cada ponto. Ela chama-se curva de preenchimento espacial por motivos óbvios, e ele nos adverte para tomar cuidado quando pensarmos sobre o conceito de dimensão. Uma transformação contínua pode aumentar a dimensão de um espaço, aqui, de 1 para 2. Outros exemplos são a curva do floco de neve de Helge von Koch, que tem comprimento infinito, mas cerca uma área finita, e a junta de Waclau Sierpinski, a curva que cruza a si mesma em todo ponto.

No entanto, esses primeiros trabalhos tiveram pouco significado fora de áreas especializadas e eram vistos principalmente como curiosidades isoladas. Para uma área temática "acontecer de verdade", alguém precisa juntar os pedaços, compreender sua unidade subjacente, formular os requeridos conceitos em generalidade suficiente e então sair e vender as ideias para o mundo. Mandelbrot, embora não fosse um matemático no sentido ortodoxo, teve visão e tenacidade para fazer exatamente isso.

STEWART, Ian. *Desbravadores da Matemática*: da alavanca de Arquimedes aos fractais de Mandelbrot. Rio de Janeiro: Zahar, 2019. p. 281-283.

Embora o texto contenha diversas menções sobre teorias matemáticas, tais como "integral tripla", além de termos que não são de nosso conhecimento no Ensino Médio, podemos conhecer um pouco a vida de um importante personagem e compreender parte de sua teoria.

Ao falar de nuvens, montanhas e cascas de árvore, o texto aborda talvez a maior das inspirações para Mandelbrot. Observe atentamente as imagens a seguir: uma samambaia, nuvens e um brócolis.

Leriaphoto/Shutterstock.com

Folha de samambaia.

Serban Enache/Dreamstime.com

Céu com nuvens.

J_K/Shutterstock.com

Brócolis.

Agora experimente pesquisar em *sites* de busca as imagens referentes aos fractais. Comparando algumas delas, é possível observar que existe uma forte relação da natureza com a teoria dos fractais.

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Junte-se a mais dois colegas para fazer pesquisas sobre fractais na internet.

1. Selecionem quatro imagens de fractais em 2D (duas dimensões) e quatro imagens de fractais em 3D (três dimensões) para apresentar à turma toda.
2. Pesquisem na internet o vídeo a seguir e assistam a ele:
   - *The Hardest Mandelbrot Zoom in 2017 – New record, 750 000 000 iterations!*
3. Em seguida, cada um de vocês deve escrever um pequeno texto sobre o que compreendeu da teoria dos fractais.

Lei de formação de uma sequência

Vamos considerar a seguinte sequência de números naturais, representada entre parênteses, cujos elementos estão separados por ponto e vírgula:

(0; 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; ...) → sequência de números naturais que são múltiplos de 3

Podemos representar essa sequência numérica por meio da seguinte tabela:

1º termo	2º termo	3º termo	4º termo	5º termo	6º termo	7º termo	8º termo	...
0 ou 3 · 0	3 ou 3 · 1	6 ou 3 · 2	9 ou 3 · 3	12 ou 3 · 4	15 ou 3 · 5	18 ou 3 · 6	21 ou 3 · 7	...

Para pensar e discutir

1. Qual é o 25º termo dessa sequência? E o 100º termo? 72; 297
2. Qual expressão matemática representa o enésimo (nº) termo dessa sequência? $3(n - 1)$
3. Substituindo n, nessa expressão, por 45, qual termo obtemos? 132

A expressão que você obteve na questão **2** acima é chamada de **lei de formação da sequência**. Como o próprio nome sugere, ela possibilita determinar qualquer termo da sequência conhecendo-se sua posição nela. Há uma maneira de representar os termos de uma sequência por meio de uma letra – por exemplo, a letra a – com **um índice que indica a posição do termo** na sequência.

Assim, retomando a sequência dos múltiplos naturais de 3, temos:

nº termo → $a_n = 3 \cdot (n - 1)$ → lei de formação da sequência

1º termo → $a_1 = 3 \cdot 0 = 0$
2º termo → $a_2 = 3 \cdot 1 = 3$
3º termo → $a_3 = 3 \cdot 2 = 6$
4º termo → $a_4 = 3 \cdot 3 = 9$
5º termo → $a_5 = 3 \cdot 4 = 12$
6º termo → $a_6 = 3 \cdot 5 = 15$
7º termo → $a_7 = 3 \cdot 6 = 18$
⋮

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Podemos dizer que, de modo geral, as sequências numéricas obedecem a uma lei de formação, que pode ser apresentada ou obtida de maneiras diferentes. Observe os exemplos a seguir.

Exemplo 1

Considere a sequência cujos termos são dados por $a_n = 5n - 6$, sendo n um número natural não nulo, isto é, $n \in \mathbb{N}^*$.

Atribuindo valores naturais não nulos a n, obtemos os termos da sequência:

$n = 1 \rightarrow a_1 = 5 \cdot 1 - 6 = -1 \Rightarrow a_1 = -1$

$n = 5 \rightarrow a_5 = 5 \cdot 5 - 6 = 19 \Rightarrow a_5 = 19$

$n = 11 \rightarrow a_{11} = 5 \cdot 11 - 6 = 49 \Rightarrow a_{11} = 49$

$n = 88 \rightarrow a_{88} = 5 \cdot 88 - 6 = 434 \Rightarrow a_{88} = 434$

Lei de formação pelo termo geral a_n

Quando conhecemos a lei de formação pelo termo geral, cada termo é expresso em função de sua posição na sequência, ou seja, temos uma fórmula que representa a_n em função de n.

Exemplo 2

Seja a sequência cujos termos obedecem às seguintes condições:

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 5, \text{ sendo } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geqslant 2 \end{cases}$$

Note que foi dado o **primeiro termo** e fornecida uma regra que possibilita determinar um termo se conhecemos o termo anterior. Dessa forma podemos, sucessivamente, conhecer novos termos. Vamos obter o 2º, o 3º, o 4º e o 5º termos dessa sequência:

$n = 2 \rightarrow a_2 = 2 \cdot a_1 + 5 = 2 \cdot 10 + 5 \Rightarrow a_2 = 25$

$n = 3 \rightarrow a_3 = 2 \cdot a_2 + 5 = 2 \cdot 25 + 5 \Rightarrow a_3 = 55$

$n = 4 \rightarrow a_4 = 2 \cdot a_3 + 5 = 2 \cdot 55 + 5 \Rightarrow a_4 = 115$

$n = 5 \rightarrow a_5 = 2 \cdot a_4 + 5 = 2 \cdot 115 + 5 \Rightarrow a_5 = 235$

Fórmula de recorrência

Na fórmula de recorrência acima exemplificada temos duas regras: uma que identifica o primeiro termo e a outra que possibilita obter cada termo seguinte com base no correspondente termo anterior.

Observação

Existem fórmulas de recorrência que envolvem mais termos. Um exemplo, que não trataremos aqui, está na formação da intrigante sequência de Fibonacci. Que tal uma pesquisa sobre essa sequência e a sua fórmula de recorrência?

Para explorar

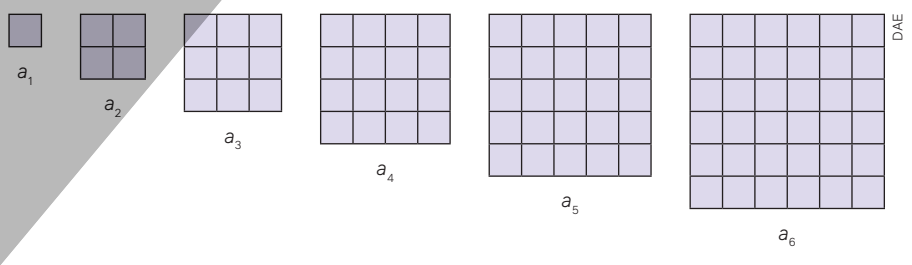
Junte-se a um colega para elaborar duas sequências numéricas conforme descrito a seguir.

1. Escrevam uma fórmula do termo geral de uma sequência e em seguida determinem os 10 primeiros termos dessa sequência. Resposta pessoal.
2. Escrevam uma fórmula de recorrência de uma sequência e em seguida determinem os 10 primeiros termos dessa sequência. Resposta pessoal.
3. Apresentem as duas fórmulas elaboradas anteriormente para outra dupla e solicitem que obtenham os 10 primeiros termos das duas sequências. Depois, verifiquem se a dupla obteve os mesmos 10 primeiros termos que vocês obtiveram. Resposta pessoal.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Atividades

1. Na sequência de figuras parcialmente representada a seguir, as figuras são formadas por quadradinhos de mesmo tamanho.



Considere que, nessa sequência, a_1, a_2, a_3, ... representam as quantidades de quadradinhos de mesmo tamanho que formam as figuras. Então, faça o que se pede.

a) Escreva os seis primeiros termos dessa sequência. (1; 4; 9; 16; 25; 36)

b) Qual é o 10º termo dessa sequência? 100

c) Qual é a expressão do termo geral dessa sequência? $a_n = n^2$

2. a) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{81}; \frac{1}{243}; \frac{1}{729}\right)$ **b)** Uma resposta possível: Cada termo é um terço do valor do termo anterior.

2. O termo geral de uma sequência é dado por $a_n = 3^{-n}$, em que n é um número natural não nulo, isto é, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Escreva os 6 primeiros termos dessa sequência.

b) Descreva como, com base no segundo termo, cada termo da sequência é obtido.

3. Determine:

a) o 100º termo da sequência dos números naturais pares (lembre que o 1º natural par é zero); 198

b) o 100º termo da sequência dos números naturais ímpares. 199

4. Escreva os cinco primeiros termos de cada sequência abaixo considerando que $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $a_n = 7 - 3n$
(4; 1; −2; −5; −8)

b) $a_n = 2n^2$
(2; 8; 18; 32; 50)

c) $a_n = \frac{n+1}{n}$ $\left(2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \frac{6}{5}\right)$

d) $a_n = (-1)^n \cdot n$
(−1; 2; −3; 4; −5)

5. Escreva o termo geral de cada uma destas sequências numéricas.

a) (0; 5; 10; 15; ...)

b) (0; 7; 14; 21; ...)

6. Escreva os 10 primeiros números de cada sequência abaixo.

a) Sequência formada pelos números naturais que são maiores que 4 e que, quando divididos por 4, deixam resto igual a 3. (7; 11; 15; 19; 23; 27; 31; 35; 39; 43)

b) Sequência formada pelos números naturais que são maiores que 7 e que, quando divididos por 7, deixam resto igual a 5.
(12; 19; 26; 33; 40; 47; 54; 61; 68; 75)

7. Os números hexagonais estão entre os números figurados que os pitagóricos conheciam. Abaixo estão representados os quatro primeiros termos dessa sequência.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

A fórmula do termo geral dessa sequência é dada por $H_n = n \cdot (2n - 1)$. Com base nessa fórmula faça o que se pede. **7. a)** (1; 6; 15; 28; 45; 66; 91)

b) 780 é um número hexagonal. Ele representa o 20º número hexagonal.

5. a) Múltiplos naturais de 5: $a_n = 5n$, n pertencente ao conjunto dos números naturais. **b)** Múltiplos naturais de 7: $a_n = 7n$, n pertencente ao conjunto dos números naturais.

a) Escreva a sequência formada pelos 7 primeiros números hexagonais.

b) Verifique se 780 é um número hexagonal. Caso seja, indique a ordem dele na sequência.

8. Determine o 7º termo da sequência dada por:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 4, \text{ sendo } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geqslant 2 \end{cases}$$

27; os termos dessa sequência vão aumentando de 4 em 4

Depois, responda: Como os termos dessa sequência são formados?

9. Retome a atividade anterior e explique o que acontecerá com a sequência se alterarmos apenas o primeiro termo, isto é, se tivermos a sequência definida por:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = a_{n-1} + 4, \text{ sendo } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geqslant 2 \end{cases}$$

Os termos dessa sequência são diferentes, porém continuam aumentando de 4 em 4.

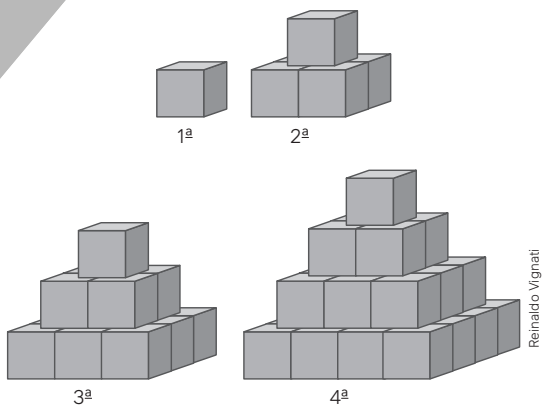
10. Faça o que se pede a seguir.

a) Elabore a lei de recorrência de uma sequência.
Resposta pessoal.

b) Escreva os 10 primeiros termos dessa sequência.
Resposta pessoal.

c) Solicite que um colega verifique, com base na lei de recorrência que você elaborou, se os 10 primeiros termos conferem com aqueles que você obteve. Resposta pessoal.

11. Observe na figura a seguir as quantidades de pequenos cubos que formam as quatro primeiras pilhas de uma sequência. **a)** 55 cubos



a) Quantos pequenos cubos são necessários para formar a 5ª figura dessa sequência?

b) Explique como essa sequência é formada.
Resposta no Manual do Professor

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Junte-se a um colega para fazer o que se pede a seguir.

1. Pesquisem o crivo de Eratóstenes.

2. Elaborem uma tabela com os números naturais de 1 a 100.

3. Utilizem o crivo de Eratóstenes para obter, nessa tabela, a sequência dos números primos menores que 100.

4. Individualmente, cada um de vocês deve escrever um pequeno texto sobre o procedimento de Eratóstenes.

Aproveitando a oportunidade

Os padrões na Arte

Em Matemática, nosso primeiro contato com padrões geralmente acontece quando estudamos as sequências numéricas. Nesse contexto, trabalha-se então com a lei de formação (termo geral) de uma sequência para determinar uma relação que possibilite construir a sequência. Esses padrões também aparecem, como vimos, nos fractais e nas figuras geométricas presentes em calçadas ou paredes com faixas decorativas, por exemplo.

Também podemos encontrar certos padrões riquíssimos em detalhes olhando um pouco mais para nossa história e suas influências. O que dizer dessas faixas presentes em tecidos, conforme mostrado a seguir?

Shutterstock_Transia Design

Shutterstock_latynina nataliya

Essas imagens representam apenas exemplos da cultura africana que faz parte do que hoje identificamos como cultura afro-brasileira. Leia o texto a seguir para compreender um pouco essa história.

> A cultura afro-brasileira nasceu profundamente baseada nas raízes das culturas africanas e percorreu um longo caminho de séculos para que essa cultura fosse realmente conquistando autonomia e singularidade própria em seus costumes.
>
> Iniciando a cultura afro-brasileira com a chegada dos escravos ao país, primeiramente as artes produzidas localmente eram na verdade releituras e recriações das obras vindas da cultura africana, porém ao passar do tempo, fi[illegible] que a principal herança deixada pela cultura africana foram os sentimentos e os valores emocionais deixados para as comunidades descendentes que possuíam um caráter cultural já constituído.
>
> Muito das artes e os elementos artísticos produzidos esculturalmente e artesanalmente pelos afrodescendentes no Período Colonial e Imperial, foi uma união com as culturas portuguesas e indígenas presentes no convívio dos escravos.
>
> Além do destaque artístico afro-brasileiro nas esculturas e pinturas durante o Período Barroco, a arte musical foi notoriamente a mais difundida e até hoje repassada e ensinada para as novas gerações. Através dos atabaques, agogôs, tambores e berimbaus, a música afro-brasileira é ainda disseminada através das religiões, dos ensinos culturais e também pela capoeira.
>
> HISTÓRIA da arte afro-brasileira. *In*: PORTAL EDUCAÇÃO. São Paulo, [20--]. Disponível em: https://siteantigo.portaleducacao.com.br/conteudo/artigos/idiomas/historia-da-arte-afro-brasileira/52159. Acesso em: 28 abr. 2020.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Atividades

Orientações no Manual do Professor

1. Pesquise em *sites* de busca alguma fotografia de tecido da cultura afro-brasileira que contenha elementos matemáticos, como figuras geométricas formando padrões. Depois, elabore um texto para descrever o padrão geométrico que você identificou.
2. Agora, para toda a turma, apresente a fotografia pesquisada e leia o texto que você elaborou.

2 A ideia de progressão geométrica

Há uma curiosa lenda sobre a criação do jogo de xadrez. Você poderá encontrá-la no livro *O homem que calculava*, do autor que usa o pseudônimo de **Malba Tahan**. Além dessa lenda, diversas curiosidades matemáticas são narradas por meio de fantasiosos contos que certamente irão atrair sua leitura.

Contamos essa curiosa lenda, com base no livro de Malba Tahan:

O jogo de xadrez

Conta-se que um rajá da Índia Antiga estava muito entediado com os jogos que havia em seu reino. Observava que, em todos eles, acabava prevalecendo a sorte, e não a inteligência do jogador. Queria um jogo novo, que, acima de tudo, enaltecesse a perícia e a habilidade do jogador. Foi então que solicitou a um sábio de sua corte que inventasse um jogo que tivesse como característica principal a valorização de qualidades mais nobres que a sorte.

Algum tempo depois, o sábio se apresentou ao rajá dizendo que havia inventado um jogo conforme o soberano tinha solicitado. Tratava-se de um tabuleiro diferente, todo quadriculado, formado por 64 quadrados de mesmo tamanho e por peças diferentes: bispos (inicialmente eram carros indianos), cavalos, torres (inicialmente eram elefantes), peões (inicialmente eram os soldados indianos), um rei e uma rainha. O tema escolhido para o jogo era a guerra, pois, para o sábio, conforme este explicou ao soberano, era exatamente ali que mais pesava a sabedoria, entre tantas outras habilidades.

O rajá, logo após a apresentação do jogo pelo sábio, ficou encantado. A admiração foi tanta que disse ao sábio para escolher o que quisesse como recompensa. O sábio, entretanto, recusava qualquer prêmio, pois não existia para ele maior recompensa do que ter criado o jogo. Mas a insistência do rajá acabou convencendo o sábio, que fez uma solicitação estranhíssima: "Como recompensa, desejo 1 grão de trigo para a primeira casa do tabuleiro, 2 grãos de trigo para a segunda casa, 4 grãos de trigo para a terceira casa, 8 grãos de trigo para a quarta casa, e assim por diante, até a última casa do tabuleiro".

O rajá considerou que tal pedido era muito modesto e até tentou persuadir o sábio, orientando-o a pedir recompensa mais valiosa. Contudo, o sábio insistiu no pedido dizendo que não desejava nada mais do que aquilo. Intrigado, o rajá ordenou que dessem um saco de grãos ao sábio, julgando estar não apenas dando o que este lhe solicitara, como também muito mais grãos de trigo. O sábio insistiu que desejava exatamente a quantidade que havia solicitado, nem um grão a mais nem a menos.

Novamente o rajá estranhou tal solicitação, mas a alegria era tanta pelo novo jogo que resolveu chamar alguém versado na arte de contar e calcular. Assim, incumbiu o calculista de obter exatamente a quantidade de grãos de trigo solicitada pelo sábio.

Após inúmeros cálculos, o rajá foi informado de que a quantidade solicitada pelo sábio era extremamente absurda. A conclusão era que nem todo o trigo produzido na Índia ou no mundo seria suficiente. O calculista chegou à seguinte quantidade: 18 446 744 073 709 551 615 grãos de trigo.

Sem saber o que fazer, o rajá chamou à sua presença o sábio criador do jogo de xadrez. O sábio disse ao soberano que já sabia do resultado e também da impossibilidade de juntar aquela quantidade de grãos. Além disso, informou ao rajá que a quantidade daria para cobrir toda a superfície da Índica com uma camada bem espessa. Tratava-se, apenas, de uma brincadeira com os números, pois essa era uma de suas paixões.

TAHAN, Malba. *O homem que calculava*. Rio de Janeiro: Record, 2001.

Shutterstock_Macrovector

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Onde está a curiosidade dessa lenda?
A quantidade de grãos de trigo que foi solicitada é astronômica. Observe:
1ª casa: **1** grão
2ª casa: **2** grãos
3ª casa: **4** grãos
4ª casa: **8** grãos
⋮
64ª casa: ????

As quantidades de grãos de trigo formam uma sequência conhecida como **progressão geométrica**.

Para pensar e discutir Orientações no Manual do Professor.

1. Como a sequência das quantidades de grãos de trigo é formada? Explique. Resposta pessoal.
2. Quantos grãos de trigo seriam dados, de acordo com a lenda, para a 11ª casa? 1024
3. Quantos algarismos tem o número correspondente à quantidade de grãos de trigo solicitada para a 64ª casa? 19

Voltaremos ainda nesta unidade para discutir a questão **3** do **quadro acima**.

A sequência correspondente às quantidades de grãos de trigo para as casas do tabuleiro é conhecida por progressão geométrica:

Progressão geométrica (PG) é toda sequência numérica na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo anterior multiplicado por uma constante. Essa constante é chamada de razão da progressão.

Quando os termos são não nulos há outra maneira de conceituarmos uma progressão geométrica: é a sequência de números na qual o quociente entre cada termo, a partir do segundo, e o termo anterior é constante.

Analise a seguir exemplos de progressão geométrica.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Exemplo 1

Iniciando pelo número 10 vamos formar uma sequência em que cada número a partir do segundo é o dobro do termo anterior, isto é:

(10; 20; 40; 80; 160; ...)

PG **crescente** de razão igual a 2

Exemplo 2

Iniciando pelo número 1000 vamos formar uma sequência em que os números vão diminuindo 10% em relação ao que vem imediatamente antes, isto é, cada número a partir do segundo é 90% do termo anterior.

(1000; 900; 810; 729; ...)

PG **decrescente** de razão igual a 0,9

Exemplo 3

Iniciando pelo número 3 vamos construir uma sequência em que cada número a partir do segundo é o termo anterior multiplicado pelo número negativo −2:

(3; −6; 12; −24; 48; −96; ...)

PG **oscilante** de razão igual a −2

1. Sim. Exemplo: (10, 10, 10, 10, ...) é uma PA constante e também uma PG constante. Embora não seja assunto deste livro, explique o que é uma progressão aritmética por meio de um ou mais exemplos.

Para pensar e discutir

1. É possível termos uma progressão geométrica constante? Exemplifique.
2. Quando uma progressão geométrica é oscilante? Exemplifique.
3. Podemos ter uma progressão geométrica decrescente com razão positiva? Exemplifique.

2. Quando termos consecutivos têm sinais contrários, isto é, um positivo e outro negativo. Exemplo: (1, −2, 4,-8, ...)

3. Sim. Exemplo: $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots\right)$.

Termo geral de uma progressão geométrica

Há uma relação que nos possibilita obter qualquer termo de uma progressão geométrica conhecendo a posição do termo, o primeiro termo e a razão da sequência. Essa relação é chamada de fórmula do termo geral da progressão geométrica. Observe como podemos obtê-la:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3$$
$$a_5 = a_4 \cdot q = (a_1 \cdot q^3) \cdot q \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^4$$
$$a_6 = a_5 \cdot q = (a_1 \cdot q^4) \cdot q \Rightarrow a_6 = a_1 \cdot q^5$$
$$\vdots$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

Observe que o expoente da razão, nos casos particulares acima, é uma unidade inferior à ordem do termo considerado, podemos dizer que o termo a_n, que ocupa a n-ésima posição na sequência, é dado por:

nº termo → $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

fórmula do termo geral da PG

Exemplo 1

Obtenha a fórmula do termo geral da progressão geométrica (1024; 512; 256; ...; a_n; ...).

Como conhecemos o primeiro termo e a razão da progressão geométrica, podemos estabelecer uma fórmula que represente qualquer termo em função de sua posição na sequência:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_n = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow a_n = 2^{10} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow a_n = \frac{2^{10}}{2^{n-1}}$$

$$a_n = 2^{10-n+1} \Rightarrow a_n = 2^{11-n}$$

Exemplo 2

Uma progressão geométrica tem seu termo geral dado por $a_n = \frac{2}{3^n}$, sendo n um número natural diferente de zero. Determine os cinco primeiros termos dessa sequência e indique a razão da PG.

Atribuindo valores para n, temos:

$$n = 1 \rightarrow a_1 = \frac{2}{3^1} \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3}$$

$$n = 2 \rightarrow a_2 = \frac{2}{3^2} \Rightarrow a_2 = \frac{2}{9}$$

$$n = 3 \rightarrow a_3 = \frac{2}{3^3} \Rightarrow a_3 = \frac{2}{27}$$

$$n = 4 \rightarrow a_4 = \frac{2}{3^4} \Rightarrow a_4 = \frac{2}{81}$$

$$n = 5 \rightarrow a_5 = \frac{2}{3^5} \Rightarrow a_5 = \frac{2}{243}$$

A sequência é uma progressão geométrica de razão igual a $\frac{1}{3}$.

Agora que você já analisou esses dois exemplos, podemos retomar a situação apresentada no início da unidade relacionada aos fractais. Uma das questões levantadas foi a determinação do comprimento das linhas da figura 5 considerando que o segmento inicial tenha 1 u.c.

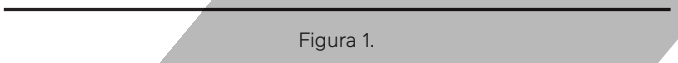


Figura 1.

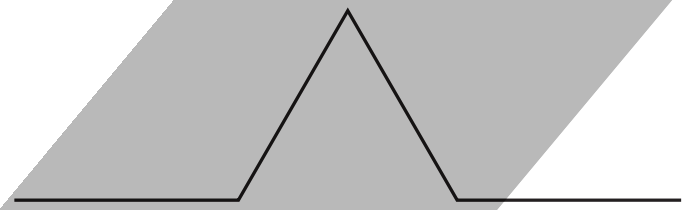


Figura 2.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Figura 3.

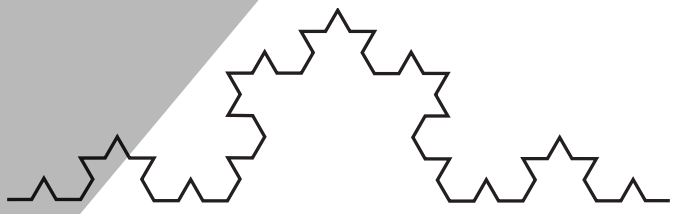


Figura 4.

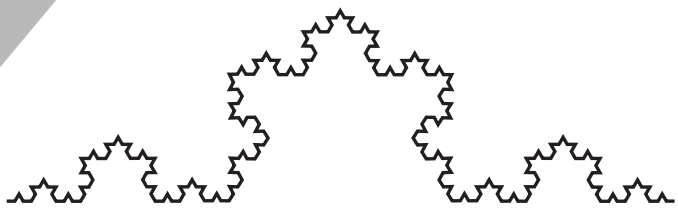


Figura 5.

Ilustrações: Tarcisio Garbellini

A sequência formada pelos comprimentos são termos de uma progressão geométrica:

Figura 1 $\rightarrow a_1 = 1$

Figura 2 $\rightarrow a_2 = \frac{4}{3}$ $\left(\text{são 4 segmentos de comprimento } \frac{1}{3}\right)$

Figura 3 $\rightarrow a_3 = \frac{16}{9}$ $\left(\text{são 16 segmentos de comprimento } \frac{1}{9}\right)$

Figura 4 $\rightarrow a_4 = \frac{64}{27}$ $\left(\text{são 64 segmentos de comprimento } \frac{1}{27}\right)$

Figura 5 $\rightarrow a_5 = \frac{256}{81}$ $\left(\text{são 256 segmentos de comprimento } \frac{1}{81}\right)$

Assim, os comprimentos formam uma progressão geométrica de razão $\frac{4}{3}$.

4. a) 1 024
b) $\frac{1}{64}$ ou 0,015625
c) 128

5. Existem duas possibilidades:
(1; 3; 9; 27; 81; 243; 729) e (1; −3; 9; −27; 81; −243; 729).

Atividades

1. Na progressão geométrica $(10^{-1};\ 10^{-2};\ 10^{-3};\ ...)$, determine:

a) a razão; $q = 10^{-1}$

b) o termo geral. $a_n = 10^{-n}$

2. Obtenha a quantidade de termos da progressão geométrica finita $\left(\frac{1}{9};\ \frac{1}{3};\ 1;\ ...;\ 243\right)$. 8 termos

3. Numa progressão geométrica sabe-se que o 1º termo é 3 e o 5º termo é 30 000. Qual deverá ser o valor da razão dessa PG? A razão poderá ser 10 (PG crescente) ou −10 (PG oscilante).

4. Obtenha:

a) o 6º termo da progressão geométrica (1; 4; ...);

b) o 7º termo da progressão geométrica (1; 0,5; 0,25; ...);

c) o 8º termo da progressão geométrica (−1; 2; −4; ...).

5. Escreva uma progressão geométrica de sete termos, sendo o primeiro igual a 1 e a razão igual a 729.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

6. (Enem) Para comemorar o aniversário de uma cidade, a prefeitura organiza quatro dias consecutivos de atrações culturais. A experiência de anos anteriores mostra que, de um dia para o outro, o número de visitantes do evento é triplicado. É esperada a presença de 345 visitantes para o primeiro dia do evento. Uma representação possível do número esperado de participantes para o último dia é: Alternativa **c**.

a) 3×345.

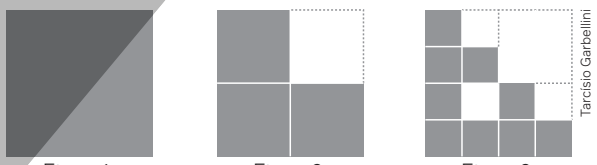
b) $(3 + 3 + 3) \times 345$.

c) $3^3 \times 345$.

d) $3 \times 4 \times 345$.

e) $3^4 \times 345$.

7. (UFRGS-RS) Considere o padrão de construção representado pelos desenhos abaixo.



Etapa 1. Etapa 2. Etapa 3.

Tarcísio Garbellini

Na Etapa 1, há um único quadrado com lado 10. Na Etapa 2, esse quadrado foi dividido em quatro quadrados congruentes, sendo um deles retirado, como indica a figura. Na Etapa 3 e nas seguintes, o mesmo processo é repetido em cada um dos quadrados da etapa anterior. Nessas condições, a área restante na Etapa 6 será de: Alternativa **e**.

a) $100 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5$.

b) $100 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6$.

c) $100 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5$.

d) $100 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6$.

e) $100 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$.

8. (IFSul-RS) Conforme a Agência da ONU para os Refugiados (Acnur), temos testemunhado o aumento do deslocamento forçado de pessoas em todo o mundo, ocasionado por guerras e conflitos. Em 2014, segundo esta agência, estes deslocamentos afetavam 59,5 milhões de pessoas. Se o número de deslocamentos forçados crescer anualmente, segundo uma progressão geométrica de razão 1,14, então, em 2015 esse número será de: Alternativa **b**.

a) 60,54 milhões de pessoas.

b) 67,83 milhões de pessoas.

c) 120,14 milhões de pessoas.

d) 127,33 milhões de pessoas.

9. (Enem) O padrão internacional ISO 2016 define os tamanhos de papel utilizados em quase todos os países, com exceção dos EUA e Canadá. O formato-base é uma folha retangular de papel, chamada de A0, cujas dimensões são 84,1 cm × 118,9 cm. A partir de então, dobra-se a folha ao meio, sempre no lado maior, obtendo os demais formatos, conforme o número de dobraduras. Observe a figura: A1 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio uma vez, A2 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio duas vezes, e assim sucessivamente.

Tarcísio Garbellini

Quantas folhas de tamanho A8 são obtidas a partir de uma folha A0? Alternativa **e**.

a) 8 **b)** 16 **c)** 64 **d)** 128 **e)** 256

10. (Enem) Uma maneira muito útil de se criar belas figuras decorativas utilizando a matemática é pelo processo de autossemelhança, uma forma de se criar fractais. Informalmente, dizemos que uma figura é autossemelhante se partes dessa figura são semelhantes à figura vista como um todo. Um exemplo clássico é o Carpete de Sierpinski, criado por um processo recursivo, descrito a seguir:

Passo 1: considere um quadrado dividido em nove quadrados idênticos (figura 1). Inicia-se o processo removendo o quadrado central, restando 8 quadrados pretos (figura 2).

Passo 2: Repete-se o processo com cada um dos quadrados restantes, ou seja, divide-se cada um deles em 9 quadrados idênticos e remove-se o quadrado central de cada um, restando apenas os quadrados pretos (figura 3).

Passo 3: Repete-se o passo 2.

Admita que esse processo seja executado 3 vezes, ou seja, divide-se cada um dos quadrados pretos da figura 3 em 9 quadrados idênticos e remove-se o quadrado central de cada um deles.

Tarcísio Garbellini

Figura 1. Figura 2. Figura 3.

O número de quadrados pretos restantes nesse momento é: Alternativa **b**.

a) 64. **b)** 512. **c)** 568. **d)** 576. **e)** 648.

11. (Cefet-RJ) Considere o seguinte procedimento: na primeira etapa, pegue uma folha de papel e corte-a ao meio, colocando os dois pedaços um sobre o outro. Em uma próxima etapa, corte novamente os papéis ao meio e coloque os pedaços um sobre o outro, formando uma pilha de papéis. Continue fazendo isso em cada etapa: sempre cortando todos os pedaços de papel da etapa anterior ao meio e formando uma nova pilha com todos os pedaços. Se fosse possível realizar o que foi exposto, em quantas etapas, no mínimo, poderíamos formar uma pilha de papel com cerca de 200 m de altura? Considere que 100 folhas empilhadas têm 1 cm de altura e podemos fazer a aproximação $2^{10} = 1024 \cong 10^3$. Alternativa **a**.

a) 21 etapas **c)** 2 001 etapas

b) 201 etapas **d)** infinitas etapas

12. (Unesp) O artigo Uma estrada, muitas florestas relata parte do trabalho de reflorestamento necessário após a construção do trecho sul do Rodoanel da cidade de São Paulo.

O engenheiro agrônomo Maycon de Oliveira mostra uma das árvores, um fumo-bravo, que ele e sua equipe plantaram em novembro de 2009. Nesse tempo, a árvore cresceu – está com quase 2,5 metros –, floresceu, frutificou e lançou sementes que germinaram e formaram descendentes [...] perto da árvore principal. O fumo-bravo [...] é uma espécie de árvore pioneira, que cresce rapidamente, fazendo sombra para as espécies de árvores de crescimento mais lento, mas de vida mais longa.

(*Pesquisa Fapesp*, jan. 2012 (adaptada).

UNESP 2012

Considerando que a referida árvore foi plantada em 1º de novembro de 2009 com uma altura de 1 dm e que em 31 de outubro de 2011 sua altura era de 2,5 m e admitindo ainda que suas alturas, ao final de cada ano de plantio, nesta fase de crescimento, formem uma progressão geométrica, a razão deste crescimento, no período de dois anos, foi de: Alternativa **c**.

a) 0,5. **c)** 5. **e)** 50.

b) $5 \times 10^{-\frac{1}{2}}$. **d)** $5 \times 10^{\frac{1}{2}}$.

13. (Udesc) Em uma escola com 512 alunos, um aluno apareceu com o vírus do sarampo. Se esse aluno permanecesse na escola, o vírus se propagaria da seguinte forma: no primeiro dia, um aluno estaria contaminado; no segundo, dois estariam contaminados; no terceiro, quatro, e assim sucessivamente. A diretoria dispensou o aluno contaminado imediatamente, pois concluiu que todos os 512 alunos teriam sarampo no: Alternativa **b**.

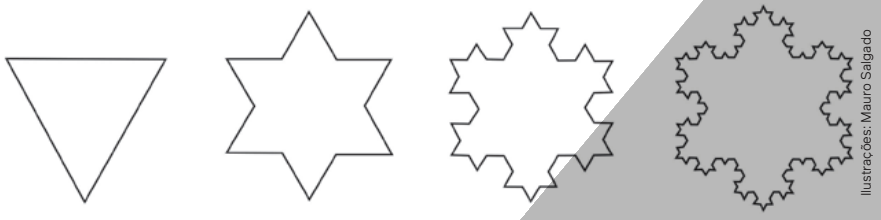
a) 9º dia. **c)** 8º dia. **e)** 6º dia.

b) 10º dia. **d)** 5º dia.

Para explorar

Junte-se a mais dois colegas para explorar a teoria dos fractais.

A sequência abaixo representa a construção do chamado "floco de neve" de Koch. Ela inicia com um triângulo equilátero, conforme a figura 1.



Ilustrações: Mauro Salgado

Figura 1. Figura 2. Figura 3. Figura 4.

Façam o que se pede a seguir.

1. Escrevam um algoritmo que representa a formação do "floco de neve". Resposta no Manual do Professor.
2. Escrevam uma sequência que representa o número de segmentos em cada figura. (3; 12; 48; 192; ...)
3. Determinem o número de segmentos existentes na n-ésima figura dessa sequência. $a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
4. Escrevam uma sequência que representa o perímetro de cada figura considerando que na figura 1 o comprimento de cada lado é unitário (1 u.c.). $\left(3; 4; \frac{16}{3}; \frac{64}{9}; \ldots\right)$
5. Façam uma pesquisa a respeito dos fractais e redijam um texto comentando os fatos pesquisados. Resposta pessoal.

Propriedades de uma progressão geométrica

Nesta unidade, já vimos progressão geométrica e estudamos seu termo geral. Na progressão geométrica podemos observar as seguintes propriedades:

Propriedade 1: Qualquer termo de uma PG, a partir do segundo, é sempre em módulo a média geométrica entre os termos [illegible]

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}, \text{ para } n \geqslant 2$$

Exemplo 1

Considerando a progressão geométrica (2; −6; 18; −54; 162; −486; ...), temos, conforme a propriedade:

$$|-6| = \sqrt{2 \cdot 18}$$
$$|18| = \sqrt{(-6) \cdot (-54)}$$
$$|-54| = \sqrt{18 \cdot 162}$$
$$\vdots$$

Essa propriedade pode ser justificada com base no conceito de razão de uma progressão geométrica. Assim, se considerarmos genericamente que os números a, b e c são termos consecutivos de uma PG, então vale:

$$(\ldots; a; b; c; \ldots) \text{ em PG} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} = q \text{ (I)} \\ \\ \frac{c}{b} = q \text{ (II)} \end{cases}$$

Comparando (I) com (II), temos:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

$$b^2 = a \cdot b$$

$$\sqrt{b^2} = \sqrt{a \cdot c}$$

$$|b| = \sqrt{a \cdot c}$$

O termo central é, em módulo, a média geométrica dos outros dois.

Observação

Em geral, temos para um número real x:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Exemplo 2

No quadro a seguir foram colocados números, formando uma progressão geométrica da esquerda para a direita.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
2	**−6**	**18**	**−54**	**162**	**−486**	**1458**	**−4374**

Para pensar e discutir

1. Considerando o quadro do exemplo 2, adicione dois termos que são equidistantes dos extremos e compare essa soma com o resultado da adição dos dois termos extremos. O que você observa? O resultado não é o mesmo.

2. Se, no lugar de adicionar, você resolver multiplicar dois termos que são equidistantes dos extremos e comparar esse produto com o resultado da multiplicação dos dois termos extremos, o que acontece?
Obtemos o mesmo resultado, isto é, −8748.

3. Elabore outra progressão geométrica finita e verifique o que acontece quando você multiplica dois termos equidistantes dos extremos e os compara com o resultado da multiplicação dos dois termos extremos.
Resposta pessoal.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Propriedade 2: Em uma PG finita, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos termos extremos.

Quando consideramos o produto de dois termos equidistantes dos extremos numa progressão geométrica finita formada por n termos e os comparamos com o produto dos termos extremos, observe o que ocorre:

$$(a_1; a_2; a_3; \ldots; a_r; \ldots a_s; \ldots; a_{n-2}; a_{n-1}; a_n)$$

- Se os termos a_r e a_s são equidistantes dos extremos, então a quantidade de termos que existe antes de a_r é a mesma quantidade de termos que existe após a_s, isto é:

$$r - 1 = n - s \text{ (I)}$$

- Utilizando o termo geral da progressão geométrica, temos:

$$a_r = a_1 \cdot q^{r-1} \text{ (II)}$$

$$a_s = a_1 \cdot q^{s-1} \text{ (III)}$$

• Multiplicando membro a membro (II) com (III):

$$a_r \cdot a_s = (a_1 \cdot q^{r-1}) \cdot (a_1 \cdot q^{s-1})$$

$$a_r \cdot a_s = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{r-1+s-1}$$

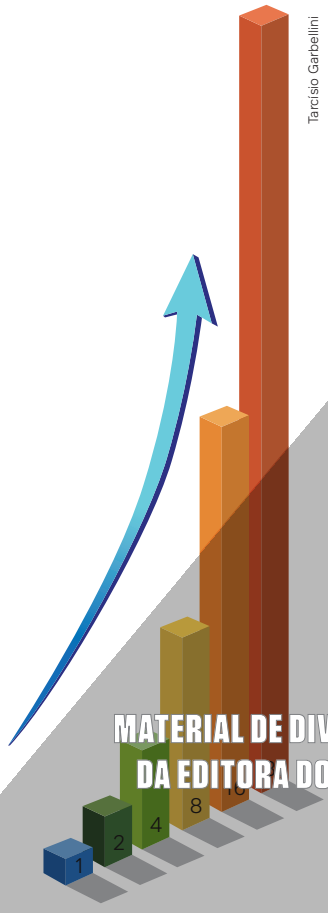
(I)

$$a_r \cdot a_s = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{n-s+s-1}$$

$$a_r \cdot a_s = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_r \cdot a_s = a_1 \cdot a_n$$

Essa é a relação entre os termos equidistantes dos extremos numa progressão geométrica finita.



Tarcísio Garbellini

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Progressão geométrica e outras relações

A ilustração ao lado evidencia um crescimento em progressão geométrica que também pode ser dito crescimento exponencial.

Para você ter uma ideia onde ocorre esse tipo de crescimento, de forma aproximada, basta observar o que as autoridades de saúde denominam epidemia, por exemplo, causada por um vírus: número de casos acentuados num pequeno intervalo de tempo. As chamadas funções exponenciais descrevem, de forma aproximada, esses fenômenos.

Veremos agora que a progressão geométrica está relacionada com função exponencial, com logaritmos e com juros compostos, justamente para descrever comportamentos diversos de crescimento.

Juros compostos, logaritmos e progressão geométrica

Há uma situação interessante sobre juros compostos que é a seguinte:

> Em quanto tempo certa quantia aplicada a uma taxa fixa de 1% ao mês, no regime de juros compostos, irá duplicar?

Voltaremos a essa questão. Antes vamos observar a relação entre juros compostos e progressão geométrica. Na primeira unidade deste livro vimos que a fórmula que possibilita calcular o montante gerado por um capital C aplicado à taxa de i% por um período ao longo de n períodos é dada por:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$

Como n é um número natural diferente de zero, atribuindo valores consecutivos a n, teremos a sequência dos montantes por período de aplicação:

$$M_1 = C \cdot (1 + i)^1$$
$$M_2 = C \cdot (1 + i)^2$$
$$M_3 = C \cdot (1 + i)^3$$
$$M_4 = C \cdot (1 + i)^4$$
$$\vdots$$

> Os montantes formam uma progressão geométrica de razão igual a $\mathbf{1} + \boldsymbol{i}$.

Exemplo

Rafael aplicou R$ 20.000,00 a uma taxa fixa de 0,7% ao mês na modalidade de juros compostos. Se ele não fizer nenhuma retirada ao longo de 8 meses, qual será o montante ao final do 8º mês?

- Podemos calcular o montante substituindo o capital, a taxa e o número de meses na fórmula que fornece o montante, isto é:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$
$$M_8 = 20\,000 \cdot (1 + 0{,}007)^8$$
$$M_8 = 20\,000 \cdot 1{,}007^8$$
$$M_8 \cong 20\,000 \cdot 1{,}05739 \Rightarrow M_8 \cong 21147{,}80$$

- Também podemos utilizar a fórmula do termo geral da PG, em que o primeiro termo é o montante ao final do 1º mês, a razão é 1 + 0,007 e o número de termos é igual a 8:

$$a_1 = M_1 = 20\,000 \cdot 1{,}007 = 20140$$
$$a_8 = M_8 = a_1 \cdot q^7$$
$$a_8 = M_8 = 20140 \cdot 1{,}007^7$$
$$a_8 \cong M_8 \cong 20140 \cdot 1{,}05004 \Rightarrow a_8 \cong M_8 \cong 21147{,}80$$

Portanto, ao final de 8 meses o montante será de aproximadamente R$ 21.147,80.

Vamos retomar e resolver a situação relacionada ao tempo para duplicar um capital aplicado na modalidade de juros compostos (retorne à página anterior e releia a situação apresentada):

- Como o montante será o dobro do capital aplicado, temos:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n$$
$$2C = C \cdot (1 + 0{,}01)^n$$
$$2 = 1{,}01^n$$

- Essa equação exponencial pode ser resolvida considerando os logaritmos decimais dos dois membros da igualdade e utilizando uma propriedade de logaritmos:

$$\log 2 = \log 1{,}01^n$$
$$\log 2 = n \cdot \log 1{,}01$$

calculadora ↓

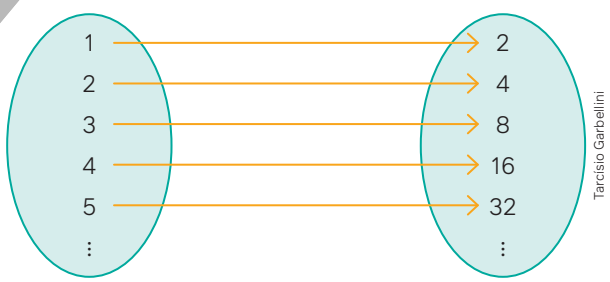
$$0{,}30103 \cong n \cdot 0{,}00432$$
$$\frac{0{,}30103}{0{,}00432} \cong n \Rightarrow n \cong 69{,}68287$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Como n é um número natural que representa o número de meses, para $n = 69$ o montante não irá duplicar o valor investido. Para $n = 70$, teremos a primeira vez que o capital será duplicado, ou seja, serão necessários 70 meses para que o capital investido duplique.

Função e progressão geométrica

Quando escrevemos o termo geral de uma progressão geométrica, expressamos qualquer termo em **função** de sua posição na sequência. Por exemplo, vamos considerar a progressão geométrica (2, 4, 8, 16, 32, ...). No diagrama a seguir representamos a relação entre os índices (que indicam as posições dos termos na sequência) e os termos da PG:



Tarcisio Garbellini

Para entender melhor o conceito destacado, consulte o tópico **A linguagem das funções** na **Caixa de ferramentas**.

Agora observe o que acontece quando obtemos o termo geral dessa progressão geométrica:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
$a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$
$a_n = 2^n$
$a_n = f(n) = 2^n$

O termo geral é uma função de n ($n \in \mathbb{N}^*$) que indica a posição do termo na sequência.

Para pensar e discutir

Na progressão geométrica, a base indica o valor da razão.

1. Na função exponencial obtida no exemplo, isto é, $f(n) = 2^n$, o que a base representa em relação à PG?
2. Qual é o significado de $f(8)$ em relação à progressão geométrica? É o 8º termo da progressão geométrica.
3. Na função exponencial definida por $f(x) = 2 \cdot 3^x$, a sequência $(f(1); f(2); f(3); ...)$ representa uma PG. Qual é a razão dessa PG? Representa uma PG de primeiro termo igual a 6 e razão igual a 3.

Exemplo

Considere a função exponencial definida no conjunto dos números reais por $f(x) = 10 \cdot 3^{-x}$. Vamos calcular alguns valores para essa função considerando valores naturais e consecutivos para x:

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 10 \cdot 3^{-0} = 10 \cdot 1 = 10$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 10 \cdot 3^{-1} = 10 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = 10 \cdot 3^{-2} = 10 \cdot \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$

$x = 3 \Rightarrow f(3) = 10 \cdot 3^{-3} = 10 \cdot \frac{1}{27} = \frac{10}{27}$

⋮

Para pensar e discutir

Respostas no Manual do Professor.

1. Enquanto o x está variando de 1 em 1, isto é, uma variação constante, o que ocorre com os valores de suas imagens? Sua variação também é constante?
2. E se nessa função atribuirmos consecutivamente os valores 0, 2, 4, 6, ..., o que acontecerá com a sequência correspondente aos valores de $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$, ...?
3. Elabore a lei de formação de uma função exponencial. Construa a sequência $(f(0); f(1); f(2); f(3); ...)$. Depois, responda: Como se dá a variação de x? E a variação de suas imagens?

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Atividades

1. A lei de formação da função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ é $f(x) = 4 \cdot 5^{-x}$. Faça o que se pede:
   a) Obtenha a sequência formada pelos valores de: $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ e $f(5)$. $\left(\frac{4}{5}; \frac{4}{25}; \frac{4}{125}; \frac{4}{625}; \frac{4}{3125}\right)$
   b) Classifique essa sequência. É uma progressão geométrica decrescente de razão igual a $\frac{1}{5}$.
2. Considere a função logarítmica definida por $f(x) = \log_2 x$. Obtenha e classifique a sequência correspondente aos valores de $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(8)$, ... 0, 1, 2, 3, ... É uma sequência em que os termos crescem de 1 em 1. (Recebe o nome de progressão aritmética de razão igual a 1.)
3. Bruna contraiu um empréstimo de R$ 5.000,00 com a taxa fixa de 2,5% ao mês na modalidade de juros compostos. Respostas no Manual do Professor.
   a) Elabore uma tabela com os montantes dessa dívida ao longo dos 6 primeiros meses considerando que não houve nenhum pagamento nesse período.
   b) Classifique a sequência formada pelos montantes.
4. Utilizando logaritmos (em calculadora científica) calcule em quantos meses a dívida de Bruna, conforme dados da atividade anterior, irá superar o dobro do valor do empréstimo supondo não haver nenhum pagamento nesse período. Em 29 meses.

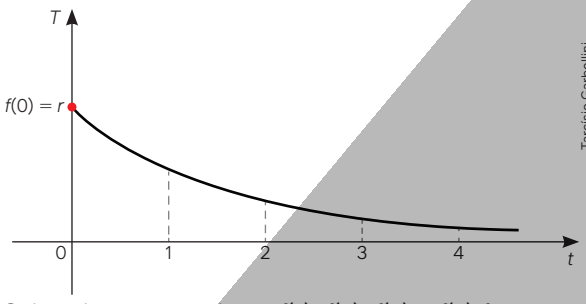
5. Suponha que o preço de determinado equipamento se desvaloriza 10% ao ano nos seus 5 primeiros anos de uso. Se esse equipamento novo custou R$ 10.000,00, qual será o seu valor em reais após os 5 anos de uso? Alternativa **d**.

a) 5.550,00
b) 5.804,00
c) 6.204,30
d) 5.904,90
e) 5.745,20

6. Resposta pessoal que dependerá do valor do carro atribuído por cada aluno.

6. Atribua um valor para um carro zero e, a partir dele, elabore uma tabela com os valores desde a compra até os seus primeiros 5 anos de uso. Utilize o mesmo percentual de redução do valor do carro da atividade anterior. Ao final, calcule o percentual correspondente à desvalorização total do carro nesse período.

7. (UFU-MG) Assuma que a função exponencial de variável real $T = f(t) = r \cdot e^{k \cdot t}$, em que r e k são constantes reais não nulas, representa a variação da temperatura T ao longo do tempo t (em horas) com $0 \leqslant t \leqslant 4$.



Tarcísio Garbellini

Sabendo que os valores $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ e $f(4)$ formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$ e soma igual a $\frac{255}{128}$, então o valor de r é um número múltiplo de: Alternativa **c**.

a) 9. **b)** 5. **c)** 3. **d)** 7.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

8. (Acafe-SC) Uma pessoa deseja comprar um carro, o qual pode ser financiado em 6 parcelas e uma entrada e o saldo devedor em 6 parcelas que se encontram em progressão geométrica. Na hora de pagar a entrada, o cliente foi informado que a segunda parcela seria de R$ 12.800,00 e a quinta parcela seria de R$ 1.600,00. Sendo o valor da entrada na compra desse carro equivalente a 15% do total do valor das prestações, analise as afirmações a seguir.

I. O valor da entrada corresponde, aproximadamente, a 30% do valor da primeira prestação.
II. O valor do carro é superior a R$ 60.000,00.
III. O total das três últimas prestações é inferior a 15% do valor do carro.
IV. O valor das três primeiras prestações juntas é superior a $\frac{3}{4}$ do valor do carro.

Todas as afirmações corretas estão em: Alternativa **c**.

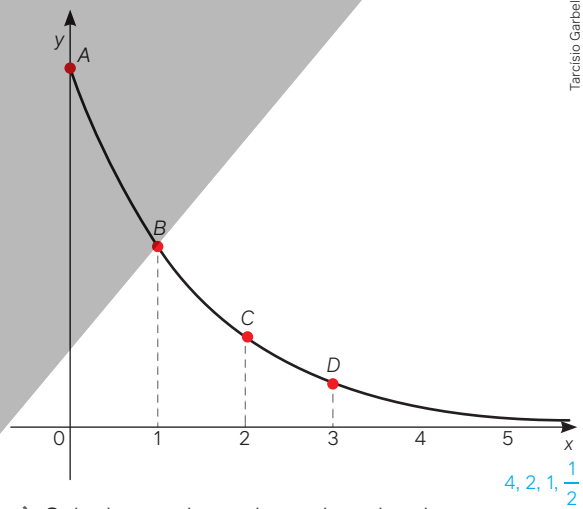
a) I – II – III.
b) II – IV.
c) I – III – IV.
d) III – IV.

9. Júlia observou que um carro zero km, ao final de cada ano, tem seu valor diminuído em aproximadamente 10% em função da depreciação do bem. Considere que isso continua acontecendo nos próximos 7 anos.

a) Nessas condições, se V_0 representa o valor do carro zero km, obtenha uma função que possibilite calcular o valor desse carro em função do tempo t em anos, sendo $0 \leqslant t \leqslant 7$. $V = V_0 \cdot 0{,}90^t$

b) Sabendo que o valor de um carro zero km é igual a R$ 32.000,00, nas condições acima, calcule o valor aproximado desse carro ao final de 6 anos. Use uma calculadora. R$ 17.000,00

10. Parte do gráfico da função real definida por $f(x) = \frac{4}{2^x}$ está representado abaixo. Os pontos A, B, C e D estão indicados.



Tarcísio Garbellini

4, 2, 1, $\frac{1}{2}$

a) Calcule os valores das ordenadas desses pontos.
b) As ordenadas dos pontos A, B, C e D, nessa ordem, formam uma progressão geométrica. Qual é a razão dela? $\frac{1}{2}$

11. Bruna montou a tabela a seguir para verificar, ano a ano (nos 5 primeiros anos), o montante correspondente a um empréstimo de R$ 1.000,00, a juros compostos, caso ela não efetuasse nenhum pagamento.

Montante da dívida					
Ano	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Montante R$	1.060,00	1.123,60	1.191,02	1.262,48	1.338,23

Fonte: Dados verificados por Bruna (dados fictícios).

a) Qual é a taxa de juros anual que está sendo cobrada? 6%
b) Esses montantes estão em progressão geométrica. Qual é a razão? Sim. A razão da progressão geométrica é 1,06.
c) Expresse o montante M em função do tempo t dado em anos. $M(t) = 1.000 \cdot (1{,}06)^t$

Soma dos termos de uma progressão geométrica

Em progressão geométrica também precisamos determinar a soma de todos os termos quando a PG é finita. Um exemplo disso é a situação que apresentamos relacionada à lenda da criação do jogo de xadrez. Havíamos feito uma questão sobre a quantidade total de grãos de trigo solicitada pelo inventor do jogo, isto é:

Para retomar

A quantidade de grãos de trigo que foi solicitada é astronômica. Observe:

1ª casa: **1** grão
2ª casa: **2** grãos
3ª casa: **4** grãos
4ª casa: **8** grãos
⋮
64ª casa: ????

As quantidades de grãos de trigo formam uma sequência conhecida como **progressão geométrica**.

Para a 64ª casa serão necessários 2^{63}. Agora, para saber o total de grãos de trigo será necessário obter a seguinte soma:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$$ → soma dos termos de uma PG

Observe a seguir como podemos obter a soma dos n termos de uma progressão geométrica de razão q diferente de 1:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

- Multiplicamos a igualdade anterior, membro a membro, pela razão da progressão geométrica:

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \ldots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

$$S_n \cdot q = a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q$$

- Observando que $a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ representa $S_n - a_1$, temos:

$$S_n \cdot q = S_n - a_1 + a_n \cdot q$$
$$S_n \cdot q - S_n = a_n \cdot q - a_1$$
$$S_n \cdot (q - 1) = a_n \cdot q - a_1$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1} \quad (q \neq 1)$$ → soma dos *n* primeiros termos da PG

Para pensar e discutir

1. Por que esse procedimento não se aplica para calcular a soma dos termos de uma progressão geométrica de razão igual a 1? O denominador da fórmula obtida não pode ser igual a zero.
2. Se a razão da PG for igual a 1, como você calculará a soma de todos os seus termos?
3. Se você substituir na fórmula da soma da PG o termo a_n por $a_1 \cdot q^{n-1}$, qual será a fórmula da soma dos termos obtida? Obtém-se $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$, $q \neq 1$.

2. Se $q = 1$, a PG é constante. A soma dos *n* termos pode ser obtida multiplicando-se o primeiro termo (valor comum) pela quantidade de termos da sequência.

Utilizando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica, podemos obter agora a quantidade total de grãos de trigo que deveria ser dada ao criador do jogo de xadrez, de acordo com a lenda:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$$

$$S_{64} = \frac{a_{64} \cdot q - a_1}{q - 1}$$

$$S_{64} = \frac{2^{63} \cdot 2 - 1}{2 - 1} \Rightarrow S_{64} = 2^{64} - 1$$

Essa quantidade de grãos de trigo é astronômica. Acompanhe a seguir como podemos fazer uma aproximação para evidenciar a ordem de grandeza do número correspondente a 2^{64}:

$$2^{64} = 2^4 \cdot 2^{60}$$

$$2^{64} = 16 \cdot (2^{10})^6$$

$$2^{10} = 1024 \cong 1000 = 10^3$$

$$2^{64} \cong 16 \cdot (10^3)^6$$

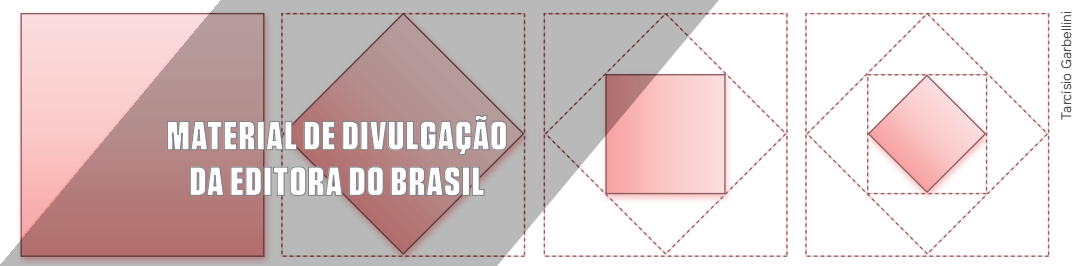
$$2^{64} \cong 16 \cdot 10^{18}$$

$$2^{64} \cong 16 \cdot \underbrace{1\,000\,000\,000\,000\,000\,000}_{\text{18 zeros}}$$

$$2^{64} \cong \underbrace{16\,000\,000\,000\,000\,000\,000}_{\text{20 algarismos}}$$

Limite da soma dos termos de uma sequência

Considere que você desenhou um quadrado de lado com medida unitária. Com base nele, desenhou outro quadrado ligando os pontos médios dos lados do quadrado anterior. Continuou esse processo indefinidamente, como sugere a ilustração a seguir:



Tarcísio Garbellini

Para pensar e discutir

1. Qual é a relação entre a área do 1º quadrado e do 2º quadrado da sequência?
   O 2º quadrado tem a metade da área do 1º quadrado.
2. As áreas dos quadrados formam uma progressão geométrica. Qual é a razão dessa sequência? $\frac{1}{2}$
3. Adicionando-se as áreas dos infinitos quadrados construídos, qual será a tendência do resultado? Resposta pessoal

Na situação apresentada acima, tanto a sequência formada pelas medidas dos lados dos quadrados construídos quanto a sequência formada pelas áreas desses quadrados formam progressões geométricas. Como os quadrados construídos ficam cada vez menores, a tendência é que a medida do lado e também a área se aproximem cada vez mais de zero. Para obtermos a "tendência" da soma das áreas, por exemplo, dos infinitos quadrados construídos que formam uma progressão geométrica, precisaremos obter uma relação matemática com base na fórmula da soma dos termos uma PG finita:

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$$

n tende ao infinito e a_n tende a zero.

Indicamos por: $n \to \infty$ e $a_n \to 0$.

Vamos indicar por S o limite (tendência) dessa soma. Assim, escrevemos:

$$S = \lim_{a_n \to 0} S_n$$

$$S = \lim_{a_n \to 0} \left[\frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1} \right]$$

Como o $a_n \to 0$ (tende a zero, ou seja, fica próximo de zero) à medida que $n \to \infty$ (tende ao infinito, que significa ficar arbitrariamente grande), faz sentido considerar $a_n = 0$:

$$S = \frac{0 \cdot q - a_1}{q - 1}$$

$$S = \frac{-a_1}{q - 1} \Rightarrow S = \frac{a_1}{1 - q}$$ → limite da soma

Em uma progressão geométrica em que o número de termos tende ao infinito e o termo geral tende a zero, o limite da soma de seus termos é dado por:

$$\boldsymbol{S = \frac{a_1}{1 - q}}$$

sendo a_1 o primeiro termo e q a razão da sequência.

Observações

1. Na obtenção dessa fórmula utilizamos $S = \lim_{a_n \to 0} \left[\frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1} \right]$. O assunto "Limites" é estudado em Matemática do Ensino Superior. Aqui o mencionamos para justificar a relação obtida.
2. Quando dizemos $a_n \to 0$ numa PG, isso ocorre se em módulo a razão for menor que 1,

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Já que falamos em intuição, vamos considerar um exemplo que envolva números racionais escritos na forma decimal com infinitas casas decimais: dízima periódica.

$x = 0{,}444444...$ (dízima periódica)

$x = 0{,}4 + 0{,}04 + 0{,}004 + 0{,}0004 + 0{,}00004 + ...$

A sequência é uma progressão geométrica de razão 0,1 com infinitos termos e $a_n \to 0$. Logo:

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{0{,}4}{1 - 0{,}1} \Rightarrow S = \frac{0{,}4}{0{,}9} \Rightarrow S = \frac{4}{9}$$

→ (fração geratriz da dízima)

Vamos retomar a situação apresentada sobre as áreas dos quadrados. Observe que a sequência é uma PG com infinitos termos, então o limite da soma é:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... \Rightarrow S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow S = 2$$

Para explorar

Orientações no Manual do Professor.

Junte-se a um colega para fazer o que se pede a seguir.

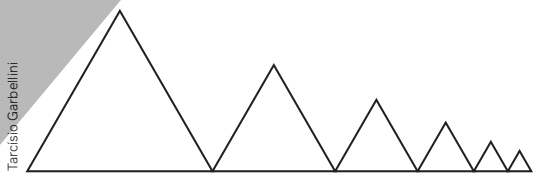
1. Retomem a situação do quadrado, formem a sequência das medidas dos lados dos quadrados construídos e calculem:
   a) o limite da soma dos termos da progressão geométrica formada pelas medidas dos lados construídos;
   b) o limite da soma dos termos da progressão geométrica formada pelos perímetros dos quadrados construídos.
2. Verifiquem o que acontece quando, na situação anterior (item **1**), substituímos o quadrado por triângulo equilátero, ou seja, por meio de um triângulo equilátero de lado unitário, construímos infinitos triângulos equiláteros ligando os pontos médios dos lados.
3. Apresentem aos demais colegas suas conclusões, conferindo-as.

Atividades

1. Utilizando o limite da soma dos termos de uma progressão geométrica, obtenha a fração geratriz das dízimas periódicas:
   a) 0,5555... $\frac{5}{9}$
   b) 0,212121... $\frac{21}{99}$
2. Numa progressão geométrica, o primeiro termo é 10 e a razão é 2. Calcule a soma dos 10 primeiros termos dessa sequência. 10 230
3. Utilizando o limite da soma dos termos de uma progressão geométrica, faça o que se pede.
   a) Resolva a equação $x + \frac{x}{4} + \frac{x}{16} + ... = 64$. 48
   b) Obtenha na forma de fração o valor de y considerando que $y = 0{,}001 + 0{,}000001 + 0{,}000000001 + ... + \frac{1}{99}$.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

4. Considere que, na progressão geométrica finita $(1, 2, 4, ..., a_n)$, a soma de todos os seus termos é igual a 1023. Determine:
   a) o último termo dessa PG; 512
   b) o número de termos dessa PG. 10 termos
5. Na equação $1 + x^2 + x^4 + ... + x^{2n} + ... = \frac{25}{16}$, o primeiro membro representa a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica. Determine:
   a) a razão da progressão geométrica em função de x; x^2
   b) o 25º termo dessa progressão em função de x; x^{48}
   c) a solução da equação. São duas soluções: $\frac{3}{5}$ e $-\frac{3}{5}$.
6. Determinado tipo de plantação de árvore frutífera foi atacado por uma praga desconhecida. Seus frutos foram apodrecendo dia após dia, obedecendo a uma progressão geométrica em que o primeiro termo é igual a 2 e a razão igual a 3. No 10º dia apodreceram os últimos frutos existentes.
   a) Calcule quantos frutos apodreceram no 10º dia. 39 366 frutos
   b) Quantos frutos havia? 59 048 frutos
7. (UFRGS-RS) A sequência representada na figura abaixo é formada por infinitos triângulos equiláteros. O lado do primeiro triângulo mede 1, e a medida do lado de cada um dos outros triângulos é $\frac{2}{3}$ da medida do lado do triângulo imediatamente anterior.


Tarcísio Garbellini

A soma dos perímetros dos triângulos dessa sequência infinita é: Alternativa **a**.
   a) 9.
   b) 12.
   c) 15.
   d) 18.
   e) 21.
8. Elabore uma situação similar à da questão anterior, porém que envolva quadrados cujas medidas vão diminuindo em progressão geométrica. Respostas pessoais.

Tarcísio Garbellini

Após a elaboração da situação, faça o que se pede.
   a) Resolva a situação.
   b) Apresente-a a um colega para que ele a resolva e, então, vocês confrontam os resultados obtidos.

9. (Insper-SP) Para percorrer 1 km, o jovem Zeno adota a estratégia de dividir seu movimento em várias etapas, percorrendo, em cada etapa, metade da distância que ainda falta até o ponto de chegada. A tabela mostra a distância percorrida por ele em cada etapa.

Etapa	Distância percorrida (km)
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$
⋮	⋮
n	$\frac{1}{2^n}$

Ao final da etapa n, a distância total percorrida por Zeno será igual a: Alternativa **a**.

a) $\frac{2^n - 1}{2^n}$.

b) $\frac{2^n + 1}{2^n}$.

c) $\frac{n}{2^n}$.

d) $\frac{2n - 1}{2^n}$.

e) $\frac{2n + 1}{2^n}$.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

10. (Ufes) Maria [illegible] Em cada dia de viagem, a partir do segundo dia, ela percorreu metade da distância percorrida no dia anterior. No sexto dia, ela percorreu 48 km. A distância total, em quilômetros, percorrida durante os 8 dias de viagem foi: Alternativa **e**.

a) 2900.

b) 2940.

c) 2980.

d) 3020.

e) 3060.

11. (IFSul-RS) Uma clínica de emagrecimento desafiou seus pacientes, um de cada vez, e perderam juntos, um total de 1023 kg. O primeiro paciente emagreceu 1 kg, o segundo 2 kg, o terceiro 4 kg, e assim sucessivamente. Quantos pacientes participaram do desafio? Alternativa **c**.

a) 8

b) 9

c) 10

d) 11

12. (IFCE) O valor do número x dado por $x = 3 + \frac{7}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \ldots$ é: Alternativa **c**.

a) $\frac{90}{337}$.

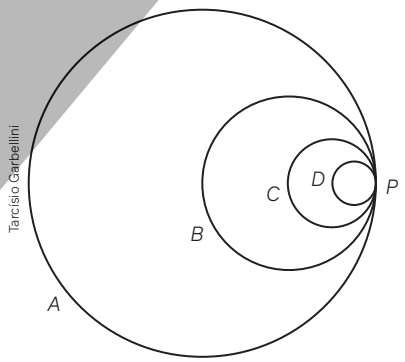
b) $\frac{223}{32}$.

c) $\frac{337}{90}$.

d) $\frac{589}{78}$.

e) $\frac{987}{26}$.

13. (UFRGS-RS) Considere o padrão de construção representado pelo desenho abaixo.



O disco A tem raio medindo 1. O disco B é tangente ao disco A no ponto P e passa pelo centro do disco A. O disco C é tangente ao disco B no ponto P e passa pelo centro do disco B. O disco D é tangente ao disco C no ponto P e passa pelo centro do disco C. O processo de construção dos discos é repetido infinitamente. Considerando a sucessão infinita de discos, a soma das áreas dos discos é: Alternativa **e**.

a) $\frac{\pi}{4}$.

b) $\frac{\pi}{3}$.

c) $\frac{2\pi}{3}$.

d) π.

e) $\frac{4\pi}{3}$.

Atividades finais

1. h) A relação é: $S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$, $q \neq 1$. **1. i)** A relação é: $S = \frac{a_1}{1 - q}$, $-1 < q < 1$

1. Sobre os assuntos desta unidade, responda:

a) Qual fração gera a dízima periódica representada pela soma $0{,}32 + 0{,}0032 + 0{,}000032 + \ldots$? $\frac{32}{99}$

b) Qual fórmula fornece o montante M de um capital C aplicado a juros compostos à taxa i por cento ao mês depois de n meses? $M_n = C \cdot (1 + i)^n$

c) Se numa sequência numérica o quociente entre um termo e seu antecessor é constante, qual é a denominação dessa sequência? Progressão geométrica.

d) Qual é a condição para que possamos ter uma progressão geométrica constante? A razão deverá ser igual a 1 ou o primeiro termo é nulo.

e) Qual é o termo geral da progressão geométrica $(3; 9; 27; \ldots)$? O termo geral é: $a_n = 3^n$.

f) Qual é o termo geral da progressão geométrica $(3; 6; 12; \ldots)$? O termo geral é: $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

g) Se um capital C aumenta 1% ao mês na modalidade de juros compostos, qual é a sequência formada pelos montantes correspondentes aos 3 primeiros meses? $(C \cdot 1{,}01; C \cdot (1{,}01)^2; C \cdot (1{,}01)^3)$

h) Qual relação matemática possibilita calcular a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica considerando que a razão da sequência é diferente de zero?

i) Qual relação matemática possibilita calcular o limite da soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica cujo n-ésimo termo tende a zero?

j) Qual é a condição para termos uma progressão geométrica oscilante? A razão deverá ser negativa e o primeiro termo não pode ser nulo.

2. (Enem) Alguns modelos de rádios automotivos estão protegidos por um código de segurança. Para ativar o sistema de áudio, deve-se digitar o código secreto composto por quatro algarismos. No primeiro caso de erro na digitação, a pessoa deve esperar 60 segundos para digitar o código novamente. O tempo de espera duplica, em relação ao tempo de espera anterior, a cada digitação errada. Uma pessoa conseguiu ativar o rádio somente na quarta tentativa, sendo de 30 segundos o tempo gasto para digitação do código secreto a cada tentativa. Nos casos da digitação incorreta, ela iniciou a nova tentativa imediatamente após a liberação do sistema de espera.

O tempo total, em segundo, gasto por essa pessoa para ativar o rádio foi igual a: Alternativa **c**.

a) 300.
b) 420.
c) 540.
d) 660.
e) 1020.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

Alternativa **b**.

3. (IFCE) Numa progressão geométrica, o segundo e o sétimo termos valem, respectivamente, 32 e 243. Nessa progressão, o quarto termo é o número:

a) 64. **b)** 72. **c)** 56. **d)** 48. **e)** 36.

4. (Enem) Uma pessoa fez um depósito inicial de R$ 200,00 em um Fundo de Investimentos que possui rendimento constante sob juros compostos de 5% ao mês. Esse Fundo possui cinco planos de carência (tempo mínimo necessário de rendimento do Fundo sem movimentação do cliente). Os planos são:

Plano A: carência de 10 meses;
Plano B: carência de 15 meses;
Plano C: carência de 20 meses;
Plano D: carência de 28 meses;
Plano E: carência de 40 meses.

O objetivo dessa pessoa é deixar essa aplicação rendendo até que o valor inicial aplicado duplique, quando somado aos juros do fundo. Considere as aproximações: $\log 2 \cong 0{,}30$ e $\log 1{,}05 \cong 0{,}02$.

Para que essa pessoa atinja seu objetivo apenas no período de carência, mas com a menor carência possível, deverá optar pelo plano: Alternativa **b**.

a) A. **b)** B. **c)** C. **d)** D. **e)** E.

5. (UFP-RS) Considere a área de uma folha de papel A4, com 297 mm de comprimento e 210 mm de largura. Dobrando ao meio a folha de papel por sucessivas vezes, são formados retângulos cada vez menores. A tabela a seguir relaciona as medidas e a área dos retângulos obtidos a cada dobragem.

Nº de dobragens	1	2	3	4
Largura (mm)	148,5	105	74,25	52,5
Comprimento (mm)	210	148,5	105	74,25
Área (mm^2)	31185	15592,5	7796,25	3898,125

Considerando os dados da tabela referentes à área do retângulo obtido a cada dobragem, observamos que essas medidas formam uma progressão geométrica. Realizando o processo de dobragem infinitas vezes, o valor da soma das áreas dos sucessivos retângulos formados a cada dobragem é: Alternativa **d**.

a) 124740 mm^2.
b) 120842 mm^2.
c) 60421 mm^2.
d) 62370 mm^2.
e) 31185 mm^2.

6. Os termos de uma sequência são definidos recursivamente por:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = 2 + a_{n-1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ tal que } n \leqslant 2 \end{cases}$$

Sendo assim, a soma dos 4 primeiros termos da sequência deve ser: Alternativa **d**.

a) 8. **c)** 24. **e)** 64.
b) 16. **d)** 32.

7. (FGV-SP) Três números formam uma progressão geométrica. A média aritmética dos dois primeiros é 6, e a do segundo com o terceiro é 18. Sendo assim, a soma dos termos dessa progressão é igual a:

a) 18. Alternativa **c**. **c)** 39. **e)** 48.
b) 36. **d)** 42.

8. (Ifal) Num triângulo equilátero de lado L, constrói-se outro triângulo equilátero nos pontos médios de seus lados. Esse processo é feito indefinidamente, gerando infinitos outros triângulos equiláteros. Então, podemos dizer que o limite da soma dos perímetros desses triângulos vale: Alternativa **c**.

a) $2L$. **c)** $6L$. **e)** $10L$.
b) $4L$. **d)** $8L$.

9. (UFRN) O nono termo de uma progressão geométrica A, de razão q, é 1792 e seu quarto temo é 56. Dessa forma, o quarto termo de outra progressão geométrica, B, com razão $q + 1$ cujo primeiro termo é igual ao primeiro termo da progressão A, é:

a) 189. **b)** 243. **c)** 729. **d)** 946.
Alternativa **a**.

10. (Ufal) Em uma cultura de bactérias, o número de microrganismos duplica a cada 20 minutos. Iniciando-se com uma população de 100 bactérias, o tempo t necessário para se alcançar uma população de 5000 bactérias é tal que: Alternativa **b**.

a) 1 h $< t <$ 1 h 45 min.
b) 1 h 40 min $< t <$ 2 h.
c) 2 h $< t <$ 2 h 30 min.
d) 2 h 30 min $< t <$ 2 h 50 min.
e) 2 h 50 min $< t <$ 3 h.

11. (UFJF-MG) Um aluno do curso de biologia estudou durante nove semanas o crescimento de uma determinada planta, a partir de sua germinação. Observou que, na primeira semana, a planta havia crescido 16 mm. Constatou ainda que, em cada uma das oito semanas seguintes, o crescimento foi sempre a metade do crescimento da semana anterior. Dentre os valores a seguir, o que MELHOR aproxima o tamanho dessa planta, ao final dessas nove semanas, em milímetros, é: Alternativa **c**.

a) 48. **c)** 32. **e)** 24.
b) 36. **d)** 30.

12. (UFRGS-RS) A tabela apresenta, em cada linha, o número de cabeças de um rebanho no final do ano dado.

Ano	Cabeças
1997	2000
1998	1600
1999	1280
...	...

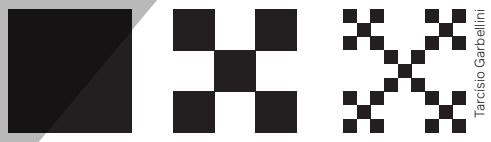
Se o rebanho continuar decrescendo anualmente na progressão geométrica indicada pela tabela, no final de 2006 o número de cabeças do rebanho estará entre (dado log 2 = 0,3010): Alternativa **c**.

a) 10 e 80. **c)** 100 e 400. **e)** 800 e 1000.
b) 80 e 100. **d)** 400 e 800.

13. (PUC-SP) A soma dos n primeiros termos da sequência (6, 36, 216, ..., 6^n, ...) é 55986. Nessas condições, considerando log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48, o valor de log n é: Alternativa **a**.

a) 0,78. **b)** 1,08. **c)** 1,26. **d)** 1,56. **e)** 1,68.

14. (UFRGS-RS) Considere o padrão de construção representado pelos desenhos abaixo.

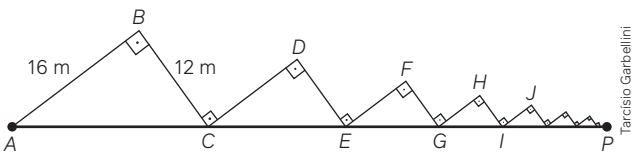


Etapa 1. Etapa 2. Etapa 3.

Na etapa 1, há um único quadrado com lado 1. Na etapa 2, esse quadrado foi dividido em nove quadrados congruentes, sendo quatro deles retirados, como indica a figura. Na etapa 3 e nas seguintes, o mesmo processo é repetido em cada um dos quadrados da etapa anterior. Nessas condições, a área restante, na etapa 5, é: Alternativa **e**.

a) $\frac{125}{729}$. **c)** $\frac{625}{729}$. **e)** $\frac{625}{6561}$.
b) $\frac{125}{2187}$. **d)** $\frac{625}{2187}$.

15. (ESPM-SP) A figura abaixo mostra a trajetória de um móvel a partir de um ponto A, com $BC = CD$, $DE = EF$, $FG = GH$, $HI = IJ$ e assim por diante. Alternativa **c**.



Considerando infinita a quantidade desses segmentos, a distância horizontal AP alcançada por esse móvel será de:

a) 65 m. **c)** 80 m. **e)** 100 m.
b) 72 m. **d)** 96 m.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

16. (Udesc) O primeiro termo de uma progressão geométrica é 10, o quarto termo é 80; logo, a razão dessa progressão é: Alternativa **a**.

a) 2.

b) 10.

c) 5.

d) 4.

e) 6.

17. (UEL-PR) Leia o texto a seguir.

> Van Gogh (1853-1890) vendeu um único quadro em vida a seu irmão, por 400 francos. Nas palavras do artista: "Não posso evitar os fatos de que meus quadros não sejam vendáveis. Mas virá o tempo em que as pessoas verão que eles valem mais que o preço das tintas".
>
> Disponível em: https://www.naturale.med.br/artes/4_Van_Gogh.pdf. Acesso em: 2 out. 2013.

A mercantilização da cultura impulsionou o mercado de artes nos grandes centros urbanos. Hoje, o quadro *Jardim das Flores*, de Van Gogh, é avaliado em aproximadamente 84 milhões de dólares. Supondo que há 61 anos essa obra custasse 84 dólares e que sua valorização até 2013 ocorra segundo uma PG, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o valor dessa obra em 2033, considerando que sua valorização continue conforme a mesma PG.

a) $1{,}68 \times 10^9$ dólares Alternativa **b**.

b) $8{,}40 \times 10^9$ dólares

c) $84{,}00 \times 10^7$ dólares

d) $168{,}00 \times 10^6$ dólares

e) $420{,}00 \times 10^7$ dólares

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

18. (AFA) Uma escultura de chapa de aço com espessura desprezível foi feita utilizando-se inicialmente uma chapa quadrada de 1 metro de lado apoiada por um de seus vértices sobre um tubo cilíndrico.

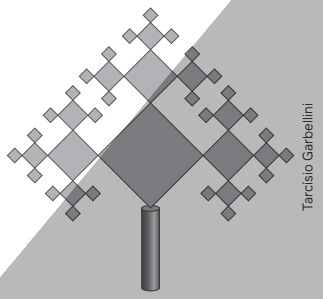
A partir desse quadrado, a escultura foi surgindo nas seguintes etapas:

1ª) Em cada um dos 3 vértices livres do quadrado foi construído um quadrado de lado $\frac{1}{2}$ metro.

2ª) Em cada um dos vértices livres dos quadrados construídos anteriormente, construiu-se um quadrado de lado $\frac{1}{4}$ de metro.

E assim, sucessivamente, em cada vértice livre dos quadrados construídos anteriormente, construiu-se um quadrado cuja medida do lado é a metade da medida do lado do quadrado anterior.

A figura seguinte esquematiza a escultura nas etapas iniciais de sua confecção.



Tarcísio Garbellini

Considerando que a escultura ficou pronta completadas sete etapas, é correto afirmar que a soma das áreas dos quadrados da 7ª etapa é igual a:

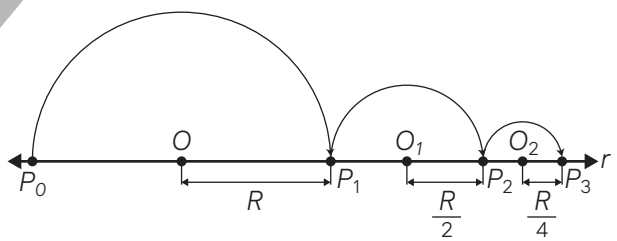
a) $\left(\frac{1}{4}\right)^7$. Alternativa **d**.

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^8$.

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^8$.

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^7$.

19. (Unesp) Uma partícula em movimento descreve sua trajetória sobre semicircunferências traçadas a partir de um ponto P_0, localizado em uma reta horizontal r, com deslocamento sempre no sentido horário. A figura mostra a trajetória da partícula, até o ponto P_3, em r. Na figura, O, O_1 e O_2 são os centros das três primeiras semicircunferências traçadas e R, $\frac{R}{2}$, $\frac{R}{4}$ seus respectivos raios.



Tarcísio Garbellini

A trajetória resultante do movimento da partícula será obtida repetindo-se esse comportamento indefinidamente, sendo o centro e o raio da n-ésima semicircunferência dados por O_n e $R_n = \frac{R}{2^n}$, respectivamente, até o ponto P_n, também em r. Nessas condições, o comprimento da trajetória descrita pela partícula, em função do raio R, quando n tender ao infinito será igual a: Alternativa **e**.

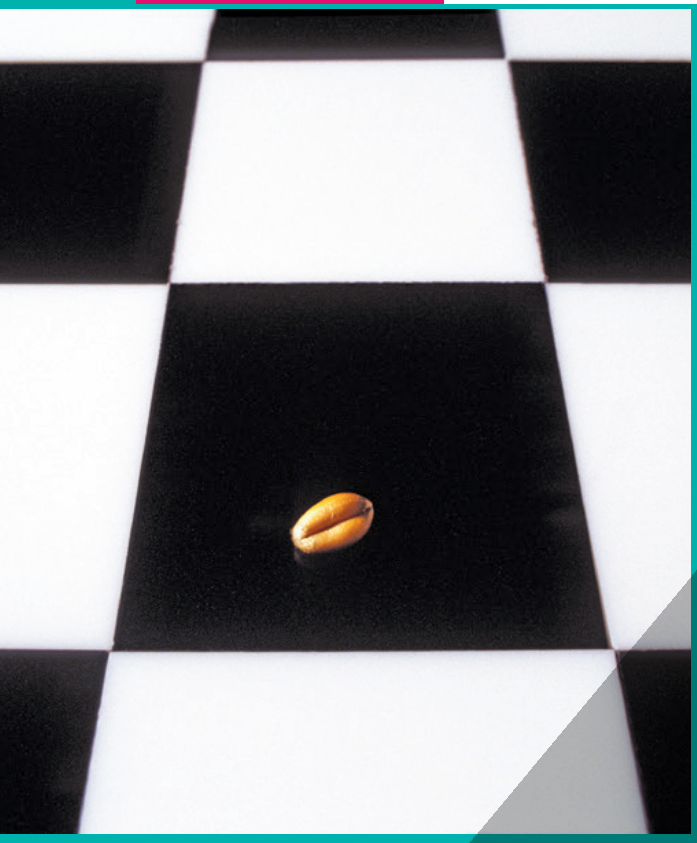
a) $2^2 \cdot \pi \cdot R$.

b) $2^3 \cdot \pi \cdot R$.

c) $2^n \cdot \pi \cdot R$.

d) $\left(\frac{7}{4}\right) \cdot \pi \cdot R$.

e) $2 \cdot \pi \cdot R$.



Fotos: Lothar Schiffler/imageBROKER/Getty Images

As *fake news* devem ser combatidas assim como pragas em plantações de trigo, ou seja, antes que se espalhem entre a população e atinjam cada vez mais indivíduos.

damircudic/E+/IStockphoto.com

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Estudantes reunidos para resolução de exercícios.

USANDO O CRESCIMENTO EXPONENCIAL A SEU FAVOR

Projeto 1

Como fazer seu dinheiro render

Na BNCC

Neste projeto você vai trabalhar as competências gerais 2, 4, 6, 8, 9 e 10, as competências específicas de Matemática 1, 2, 3, 4 e 5 e as habilidades EM13MAT101, EM13MAT203, EM13MAT303, EM13MAT304, EM13MAT404, EM13MAT508, EM13MAT510.

Para que serve este projeto?

A educação financeira é uma das aplicações matemáticas mais recorrentes na vida cotidiana. Por isso, explorar ferramentas matemáticas para auxiliar no planejamento financeiro é uma prática de grande utilidade.

Este projeto aborda a análise de dois personagens com situações financeiras factíveis e requer a indicação de formas de investimentos compatíveis com cada um. Você desenvolverá a habilidade de argumentação acerca de gastos, endividamentos e investimentos com base em estratégias de planejamento financeiro.

Conheça o investidor brasileiro

Têm, em média, **53** anos

53% são homens

51% são casados

66% têm filhos

85% trabalham e têm atividade remunerada

Mauro Salgado

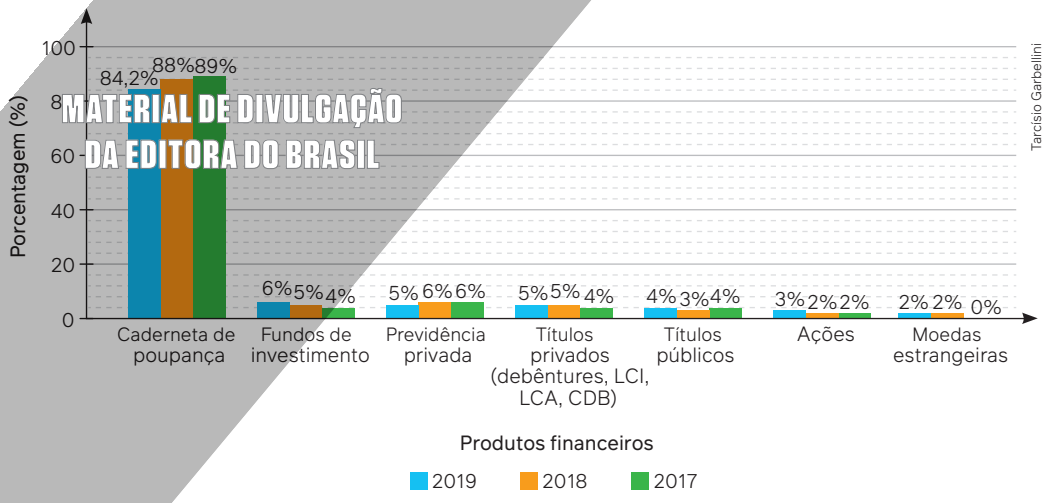
54% moram na região Sudeste e **17%** no Nordeste

Renda familiar mensal **R$ 5.600**

45% têm Ensino Médio e **36%** têm Ensino Superior

Fonte: ANBIMA. *Raio X do investidor brasileiro*. 3. ed. Rio de Janeiro: Anbima, 2020. Disponível em: https://www.anbima.com.br/pt_br/especial/raio-x-do-investidor-2020.htm. Acesso em: 4 jul. 2020.

Produtos financeiros mais usados pelos investidores



Tarcísio Garbellini

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

Base: Investidores - 2019 (1 506 pessoas), 2018 (1 446 pessoas) e 2017 (1 216 pessoas)

Fonte: ANBIMA. *Raio X do investidor brasileiro*. 3. ed. Rio de Janeiro: Anbima, 2020. Disponível em: https://www.anbima.com.br/pt_br/especial/raio-x-do-investidor-2020.htm. Acesso em: 4 jul. 2020.

Questão disparadora

Como a organização financeira pode auxiliar na escolha de bons investimentos?

Contexto

Segundo a Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), a educação financeira é o processo pelo qual os indivíduos aprimoram sua compreensão sobre produtos, conceitos e riscos financeiros e, por meio de informação, desenvolvem os princípios, habilidades e competências necessários para se tornarem mais conscientes de riscos e oportunidades financeiras, para fazer escolhas informadas, para saber onde buscar ajuda, e para tomar outras medidas efetivas visando melhorar seu bem-estar financeiro. De acordo com o relatório da Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais (Anbima), o brasileiro investe pouco e, mesmo quando investe, não tem conhecimento suficiente sobre os investimentos disponíveis para fazer escolhas. Além disso, há uma forte crença generalizada de que para investir é necessário ter muito dinheiro, o que exclui a maioria dos cidadãos.

Desenvolvimento

Para melhorar sua educação financeira, você irá desenvolver uma planilha orçamentária alinhada a um determinado perfil de consumo. Para isso, complete os passos a seguir.

1. Escolha um dos dois perfis abaixo para embasar seu projeto.
   Caso 1: Um trabalhador assalariado de 35 anos usa 100% do salário com os gastos mensais. Há seis meses precisou fazer uma despesa extraordinária por problemas de saúde, que comprometeu 5% do salário. Ao fim do mês, esse valor estava negativo em sua conta-corrente. Nos meses seguintes, continuou usando 100% do salário com os gastos mensais, mas a dívida no banco foi gerando juros.
   Para resolver a situação, ele abriu uma conta em outro banco e transferiu o salário para ela. O objetivo é conseguir poupar um valor mensal que supere os juros do outro banco e, após um ano, ele possa pagar a dívida e obter uma sobra que represente ao menos 5% do salário, para o caso de nova emergência.
   Caso 2: Um trabalhador autônomo de 28 anos tem uma renda que varia mês a mês, embora seus gastos mensais sejam sempre os mesmos. Em alguns meses, recebe mais do que gasta, e em outros gasta mais do que recebe. De modo geral, seu objetivo é sempre garantir que ao longo do ano suas contas estejam pagas. Ele conseguiu terminar o último ano com uma sobra de dinheiro equivalente a um mês de gastos. Seu plano é investir esse dinheiro de modo que, no ano seguinte, essa quantia seja suficiente para cobrir ao menos um mês e meio de gastos. A longo prazo ele pretende ter uma reserva que lhe garanta um ano sem precisar trabalhar.

2. Faça uma pesquisa com conhecidos que se encontrem em situações similares a do perfil escolhido e crie um personagem com base nesses dados. O seu personagem deve ter nome, descrição, profissão e outras características que você achar relevante.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

3. Construa um perfil de gastos do seu personagem. Esse perfil deve conter tudo o que o personagem consome por mês: aluguel, alimentação, transporte, lazer, compras etc.

4. Construa a planilha orçamentária do seu personagem.

5. Com base nesses perfis, desenvolva uma análise e uma projeção da situação financeira dos personagens.

   Para o caso 1: indique o valor do salário do personagem e calcule os valores da sua dívida de acordo com a situação proposta, utilizando dados de taxa de juros obtidos em bancos ou corretoras. Preencha a planilha de gastos e recebimentos mensais e construa em um mesmo plano cartesiano dois gráficos: o da dívida e o do investimento realizado, progredindo mês a mês. Por fim, verifique se o personagem conseguirá ou não atingir seus objetivos em um ano.

   Para o caso 2: determine qual valor o personagem conseguiu juntar para investir e faça uma pesquisa em bancos para determinar qual investimento é mais rentável, considerando que ele poderá precisar retirar o dinheiro após um ano. Coloque na planilha o valor recebido e os gastos mensais do personagem, além do valor gerado pelo investimento a cada mês. Considere que todas as vezes que o saldo mensal do personagem fica abaixo de zero, esse valor é retirado de seu investimento, acrescido de 20%. Verifique se ao final do ano o objetivo do seu personagem foi ou não atingido.

Produto

O seu projeto deve gerar uma planilha financeira associada ao perfil escolhido por vocês. Essa planilha deve vir acompanhada de gráficos que indiquem a projeção da vida financeira do personagem, indicando se ele irá ou não atingir seus objetivos econômicos.

Apresentação

O produto final deve conter um perfil detalhado do personagem com uma projeção sobre sua situação financeira daqui a um ano e um relatório de conclusão.

O perfil pode ser apresentado na forma de currículo, depoimento gravado, cartaz, rede social ou descrição narrativa. A apresentação deve deixar claro quem é o personagem e em qual caso (1 ou 2) ele se enquadra.

A projeção deve ser embasada em pesquisas e cálculos condizentes com a realidade e coerentes entre si, apresentada na forma de **planilhas** e gráficos.

Para entender melhor as planilhas eletrônicas, consulte o tópico **Recursos digitais** na **Caixa de ferramentas**.

Relatório conclusivo

O relatório de conclusão deve ser organizado em três partes.

- Com base na apresentação do produto, o relatório deve informar se o objetivo do personagem foi ou não alcançado e explicar as razões para esse resultado.
- O relatório deve apresentar uma resposta à questão disparadora: **Como a organização financeira pode auxiliar na escolha de bons investimentos?** fundamentada nas conclusões.
- Deve conter também uma reflexão final do grupo indicando o que todos aprenderam com o projeto e como cada um pretende levar esse conhecimento para seu projeto de vida.

Sugestões de fontes

Sites

- **Portal do Investidor**. Disponível em: https://www.investidor.gov.br/menu/primeiros_passos/principios_investimento.html. Acesso em: 8 maio 2020.

Artigos em PDF

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- **Efeitos de Longo Prazo da Educação Financeira em Escolas Brasileiras: evidências e sugestões de políticas**. Disponível em: https://www.vidaedinheiro.gov.br/wp-content/uploads/2019/07/5_EF_escolas_completo.pdf. Acesso em: 8 maio 2020.
- **Raio X do investidor brasileiro.** Disponível em: https://www.anbima.com.br/data/files/25/50/2D/8C/0BBB96109FF4F696A9A80AC2/RaioX_investidor_2019.pdf. Acesso em: 8 maio 2020.
- **A história não contada da Educação Financeira no Brasil.** Disponível em: https://www.boavistaservicos.com.br/wp-content/uploads/2014/08/A-hist%C3%B3ria-n%C3%A3o-contada-da-educa%C3%A7%C3%A3o-financeira-no-Brasil.pdf. Acesso em: 8 maio 2020.

Vídeos

- **Educação financeira – São Paulo**. Disponível em: https://www.vidaedinheiro.gov.br/educacacao-financeira-sao-paulo/. Acesso em: 8 maio 2020.

Apps

- **Calculadora de Poupança & Juros – Para brasileiros**. Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.iacovelli.calculadorapoupanca. Acesso em: 8 maio 2020.
- **Calculadora do Cidadão**. Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=br.gov.bcb.mobile.android.calculadoracidadao. Acesso em: 8 maio 2020.

E-books

- **Educação financeira nas escolas – Ensino Médio – Volume 1**. Disponível em: https://issuu.com/edufinanceiranaescola/docs/livro-aluno-bloco1?e=11624914/49399073. Acesso em: 8 maio 2020.

Projeto 2

Propagação de *fake news*

Na BNCC

Neste projeto você vai trabalhar as competências gerais 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9 e 10, as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias 1, 2, 3 e 5 e as habilidades EM13MAT101, EM13MAT203, EM13MAT303, EM13MAT508, EM13MAT510.

pixelfit/E+/iStockphoto.com

Para que serve este projeto?

O conceito do que é ou não verdade foi bastante discutido filosoficamente na última década. Tempos líquidos, era da pós-verdade e teorias negacionistas são apenas alguns dos termos que surgiram para explicar nossa relação com a verdade.

Diante desse contexto, este projeto propõe a análise da velocidade de propagação de *fake news* – nome pelo qual ficaram conhecidos os boatos divulgados em forma de matéria jornalística – visando ao estudo das notícias falsas e dos modelos matemáticos que podem representar sua divulgação.

Dado que todos os cidadãos são responsáveis pelo aumento ou diminuição dessa propagação, o projeto visa conscientizar as pessoas acerca de sua responsabilidade nesse contexto.

Você desenvolverá sua habilidade de investigação ao descobrir o impacto causado pela propagação de boatos e inferirá as consequências geradas tanto por quem auxilia quanto por quem freia essa propagação.

Questão disparadora

Como e por que devemos impedir a propagação de notícias falsas?

Contexto

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

As notícias falsas, ou boatos, existem há muitos séculos, talvez desde o início da organização complexa das sociedades. Entretanto, no cenário atual, a velocidade de divulgação de notícias via redes sociais impactou muito o alcance desse tipo de informação enganosa.

Alia-se a esse cenário um crescente descrédito acerca do pensamento científico, alimentado por diversas teorias negacionistas, como a teoria da terra plana e o movimento antivacina. Superficialmente, podemos dizer que teorias negacionistas são as que negam conceitos histórica e cientificamente comprovados sem usar embasamento científico ou argumentação lógica consistente.

Ao procurar modelos matemáticos que expliquem como essas notícias falsas se espalham, os professores Jeferson Arenzon (UFRGS) e Marco Antônio Amaral (UFSB, *campus* Paulo Freire) concluíram que a divulgação de mentiras se assemelha à propagação de zumbis encontrada em filmes desse gênero.

> Um dos variados usos de modelagens da Sociofísica está na epidemiologia, na qual uma simulação ajuda a compreender as fases de contágio de uma doença em uma população de acordo com muitos parâmetros, como a agressividade do causador da enfermidade, fatores do cenário do contágio e as medidas para o controle, por exemplo. Quanto mais consistente e articulado esse modelo, mais útil ele será para o planejamento de ações eficazes, com redução de custos e de danos – o que pode gerar valiosos conhecimentos para a gestão em muitas áreas. É comum a criação de *toy models*, que são as simulações que não abordam assuntos reais e que servem para testar a consistência matemática [...].

A decisão de modelar um cenário de contágio zumbi no qual o vírus é a notícia falsa e o boato permite abordar o problema das notícias falsas a partir de um novo prisma – além de ser muito oportuna. No artigo, os autores explicam o modelo SEZR (**S**uscetível, **E**xposto, **Z**umbi e **R**emovido). [...] O modelo desenhado por Arenzon e Amaral permite verificar cenários em que o "zumbi das *fake news*" pode seguir espalhando sua "infecção" ou passar ao estado "removido", no qual deixa de compartilhar informação falsa, mediante o contato com o ceticismo ativo (a pessoa que confronta e desmente a informação falsa) e com o ceticismo passivo (exposto na atitude de quem não repassa *fake news* e boatos). Os resultados deste estudo favorecem o aperfeiçoamento de modelagens que podem aportar indicações de como lidar com o problema.

NAZÁRIO, Heleno Rocha. Em artigo, pesquisadores usam modelo de epidemia zumbi para estudar propagação de rumores e *fake news*. *In*: UNIVERSIDADE FEDERAL DO SUL DA BAHIA, Itabuna, 18 out. 2019. Disponível em https://www.ufsb.edu.br/component/content/article/1830-em-artigo-pesquisadores-usam-modelo-de-epidemia-zumbi-para-estudar-propagacao-de-rumores-e-fake-news. Acesso em: 6 maio 2020.

Desenvolvimento

Vamos criar um experimento de propagação de notícias e compará-lo com um modelo. Para isso, siga os passos propostos.

1. **Escolha uma população para seu experimento**. Pode ser seu bairro, sua escola, a sala de aula, sua família ou qualquer comunidade que você frequente e tenha no mínimo 50 pessoas. Quanto maior for a população, mais tempo durará o experimento e mais dados serão coletados. Entretanto, se a população for muito grande, os dados podem se perder. Um tamanho razoável é uma população de 100 a 150 pessoas.
2. **Elabore o experimento**. Crie uma mensagem do tipo "corrente", como no exemplo a seguir.

   "Essa é uma mensagem de sorte. Passe para três pessoas até amanhã e você terá uma semana de sorte. Caso quebre a corrente, terá dez dias de azar. Atenção: a corrente só funciona se você repassar para pessoas que ainda não receberam a mensagem."

   - Inicie a corrente passando a mensagem para três pessoas. Explique no texto que cada pessoa deve repassar a corrente para três novas pessoas no prazo determinado. Elabore uma forma de registrar quem recebe a mensagem.
   - Verifique em quanto tempo toda a população recebeu a corrente.
3. **Crie um modelo para estudar o comportamento da divulgação desse tipo de corrente**.
   - Escreva os primeiros termos de uma PG cujo primeiro termo seja 1 e a razão seja 3.
   - Determine qual é o valor de n tal que a soma dos n termos da PG seja maior ou igual ao número de pessoas da população que você escolheu.
   - Verifique se n é igual ao número de dias que foram necessários para toda a população receber a corrente. Caso não seja, elabore hipóteses que expliquem o que pode ter acontecido.
4. **Estude possíveis alterações no modelo**.
   - Escreva todos os termos da PG.
   - Escreva uma nova sequência considerando que em alguns dias algumas pessoas quebrarão a corrente.
   - Verifique quantas pessoas são afetadas pela corrente após n dias na nova sequência.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Considere que cada pessoa que repassou a corrente é alguém que acreditou em uma notícia falsa, e cada pessoa que não repassou ou não recebeu é alguém que não está acreditando em uma mentira. Use o modelo que você desenvolveu para analisar o quanto cada pessoa que não acredita em uma notícia falsa pode reduzir a propagação de *fake news*.

Sendo n o número de dias desde o início da propagação da corrente, escreva em função de n as expressões algébricas que representam o número de novas pessoas impactadas a cada dia (a_n) e o total de pessoas impactadas a cada dia (A_n). Considere então que, no terceiro dia ($n = 3$), uma pessoa recebe a corrente, verifica a informação, descobre que é falsa e, mesmo já tendo repassado a mensagem, começa a compartilhar uma nota desmentindo a mensagem anterior. Se cada pessoa que receber a nova mensagem a repassar, a cada dia, para 4 novas pessoas que já receberam a notícia falsa, temos uma quantidade de pessoas esclarecidas que varia em função do tempo de acordo com a sequência $b_n = 4^{n-3}$, com $n > 2$.

Calcule a expressão que determina o total de pessoas esclarecidas a cada dia (B_n) e escreva alguns termos da sequência $A_n - B_n$ com $n > 2$. Essa sequência é crescente ou decrescente? É possível garantir que em algum momento todas as pessoas que receberam a notícia falsa receberão também a informação de que a notícia é falsa?

Produto

Com base no experimento e no modelo, crie um documento com os seguintes itens:

- explicação sobre como uma notícia falsa pode se espalhar rapidamente;
- explicação sobre o fato de o não compartilhamento de notícias falsas desacelerar essa propagação;
- explicação sobre como a divulgação de que uma notícia é falsa pode desacelerar ainda mais a propagação;
- um parágrafo explicando as diferentes atitudes que podemos ter diante da possibilidade de receber notícias falsas e suas consequências. Use o modelo SEZR (**S**uscetível, **E**xposto, **Z**umbi e **R**emovido) para exemplificar a explicação.

Apresentação

O produto final será uma apresentação no formato de *slides* ou artigo escrito, videoaula ou encenação contendo dados quantitativos do experimento realizado e das conclusões obtidas, considerando os quatro itens solicitados.

Relatório conclusivo

O relatório de conclusão deve ser um guia de boas práticas para evitar a propagação de *fake news*. Nele, devem conter:

- uma lista de atitudes que auxiliam na diminuição da propagação de *fake news*;
- justificativas quantitativas para cada atitude citada;
- exemplos de como essas atitudes podem ser colocadas em prática (incluindo, por exemplo, dicas de *sites* de verificação de fatos);
- resposta à questão disparadora: **Como e por que devemos impedir a propagação de notícias falsas?**

#Ficaadica

Para mais informações sobre o modelo SEZR, leia a reportagem completa (disponível em: https://www.ufsb.edu.br/component/content/article/1830-em-artigo-pesquisadores-usam-modelo-de-epidemia-zumbi-para-estudar-propagacao-de-rumores-e-fake-news; acesso em: 6 maio 2020).

Sugestão de fontes

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Sites

- **População pode impedir propagação de *fake news* nas mídias sociais.** Disponível em: http://www.mt.gov.br/-/10288080-populacao-pode-impedir-propagacao-de-fake-news-nas-midias-sociais. Acesso em: 8 maio 2020.
- **Pesquisa global revela que 86% dos internautas já acreditaram em *fake news*.** Disponível em: https://exame.abril.com.br/brasil/pesquisa-global-revela-que-86-dos-internautas-ja-acreditaram-fake-news/. Acesso em: 8 maio 2020.
- **Aos fatos.org.** Disponível em: https://aosfatos.org/. Acesso em: 8 maio 2020.

Artigos em PDF

- **Ética jornalística para o século XXI – Novos desafios, velhos problemas.** Disponível em: http://www.scielo.mec.pt/pdf/mj/v18n32/v18n32a12.pdf. Acesso em: 8 maio 2020.
- **Jornalismo computacional e *fact-checking*: dados estruturados por meio de marcações semânticas na *web*.** Disponível em: http://portalintercom.org.br/anais/nacional2019/resumos/R14-2077-2.pdf. Acesso em: 8 maio 2020.
- ***Fake news* relacionadas à ciência: vazamento radioativo em Natal?!.** Disponível em: http://www1.fisica.org.br/fne/phocadownload/Vol17-Num1/a06.pdf. Acesso em: 8 maio 2020.

Vídeos

- ***How fake news does real harm*.** Disponível em: https://www.ted.com/talks/stephanie_busari_how_fake_news_does_real_harm. Acesso em: 8 maio 2020.

Estes textos estão relacionados a alguns conhecimentos desenvolvidos nos anos finais do Ensino Fundamental, servindo como fonte de consulta e retomadas que se façam necessárias. São acompanhados de exemplos que auxiliarão os alunos na sua compreensão. Leia mais detalhes no Manual do Professor.

Algoritmos e fluxogramas

Algoritmo

Algoritmo é a descrição de uma sequência de passos necessários para a realização de uma tarefa. Um dos exemplos mais simples de um algoritmo é a descrição feita para elaborar determinado prato. A receita representa uma forma de algoritmo. Embora os algoritmos estejam intimamente relacionados com a linguagem de programação, não precisam ser executados por um computador. Qualquer aparato mecânico ou tecnológico que leia e siga os passos de um algoritmo pode executá-lo. Isso inclui os seres humanos.

Assim, quando armamos e resolvemos uma operação matemática executamos um algoritmo.

Exemplo

Algoritmo para adição de dois números naturais com dois algarismos cada

1. Chamaremos os dois números que serão adicionados de *a* e *b*.
2. Escreva *a* sobre *b*, de modo que os algarismos das unidades fiquem alinhados. Veja o exemplo a seguir.

$$\begin{array}{r} 95 \\ +\ 29 \\ \hline \end{array}$$

3. Adicione o algarismo das unidades de *a* com o algarismo das unidades de *b*.
   - **a)** Se a adição resultar em um número de um algarismo, escreva-o abaixo do algarismo das unidades de *b* (posição 1).
   - **b)** Se a adição resultar em um número de dois algarismos, escreva o algarismo da unidade desse número abaixo do algarismo da unidade de *b* (posição 1) e posicione uma unidade acima do algarismo das dezenas de *a*, como a seguir.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 95 \\ +\ 29 \\ \hline 4 \end{array} \quad \rightarrow \textbf{posição 1}$$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO DA EDITORA DO BRASIL

4. Adicione os algarismos das dezenas de *a* e *b* e também a unidade acima de *a*, se houver.
   - **a)** Se a adição resultar em um número de um algarismo, escreva-o abaixo do algarismo das dezenas de *b* (posição 2).
   - **b)** Se a adição resultar em um número de dois algarismos, escreva o algarismo das unidades desse número abaixo do algarismo das dezenas de *b* (posição 2); e escreva o algarismo das dezenas desse número à esquerda daquele das unidades (posição 3).

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 95 \\ +\ 29 \\ \hline 124 \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \textbf{posição 1} \\ \rightarrow \textbf{posição 2} \\ \rightarrow \textbf{posição 3} \end{array}$$

5. Escreva o resultado da adição de *a* e *b* como o número formado pelos algarismos das posições 3, 2 e 1 (note que a posição 3 pode ser vazia).

Como podemos observar pelo exemplo, um algoritmo deve ser um procedimento preciso, não ambíguo, mecânico, eficiente e correto. Em outras palavras, deve determinar uma sequência de ações que não permitem múltiplas interpretações e dão conta de executar, todas as vezes, a tarefa a que se propõem.

Veja outras características importantes dos algoritmos que são essenciais para compreendê-los.

- Um algoritmo não responde à pergunta “O que fazer?”, e sim “Como fazer?”.
- Os algoritmos são construídos com base em regras anteriores. Note que, para adicionar dois números seguindo o procedimento da página anterior, o computador ou a pessoa que irá executá-lo deve conhecer o sistema de numeração decimal e saber adicionar números naturais de um algarismo.
- Para executar um algoritmo é preciso primeiro declarar quais são as variáveis que irão alimentar os passos, garantindo que o mesmo algoritmo possa ser usado para realizar a mesma tarefa diversas vezes. No exemplo dado, declaramos que *a* e *b* são as variáveis que representam os dois números naturais que serão adicionados.
- Existem vários algoritmos para solucionar o mesmo problema, mas a construção de todos eles normalmente segue alguns passos principais.

    1. Compreender o problema e identificar todos os dados apresentados.
    2. Definir os dados de entrada.
    3. Escolher quais passos/cálculos devem ser executados para alcançar o objetivo.
    4. Definir os dados de saída/resultado.
    5. Testar o algoritmo com uma simulação, ou seja, utilizando os valores dados no problema inicial.

Conhecer essas características é importante para entender como os algoritmos funcionam. Por exemplo, se não declarássemos as variáveis *a* e *b* teríamos de escrever um algoritmo para adicionar 10 + 12 e outro para adicionar 22 + 54. Além disso, é preciso notar que, nesse caso, não foi preciso determinar qual número seria *a* e qual seria *b*. Se fosse necessário, incluiríamos no algoritmo a definição de chamar de *a* o maior dos dois números e de *b* o menor deles – nesse caso, teríamos de considerar que quem for executar o algoritmo deve saber ordenar números naturais de dois algarismos.

Esse exemplo mostra também que um sistema de algoritmos pode ser ampliado gradativamente: conhecendo o sistema de numeração decimal, adicionamos números naturais de um algarismo. Esse conhecimento pode ser utilizado para adicionar números de dois, três ou mais algarismos. Ampliando um pouco o conceito, usamos os mesmos passos para adicionar números racionais escritos na forma decimal.

Tipos de algoritmos

Há diversas formas de classificar os algoritmos, por exemplo: de acordo com sua construção; pela forma de aplicação; pelo tipo de problema que ele visa resolver etc. Destacamos aqui apenas três tipos de acordo com sua construção.

- **Algoritmos com iteração**

São aqueles em que o executor precisa repetir uma ou mais ações determinado número de vezes.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

- **Algoritmos com tomada de decisão**

São aqueles em que o executor precisa analisar uma determinada resposta para determinar o caminho.

- **Algoritmos simples**

São seguidos do início ao fim, sem que o executor precise analisar as respostas para tomar decisões ou repetir algum comando.

Alguns algoritmos podem conter as características “tomada de decisão” e “iteração”.

Formas de apresentação de algoritmos

Todos esses tipos podem ser apresentados de diversas maneiras, veja a seguir as três formas mais utilizadas.

- **Descrição narrativa**

Consiste em escrever os passos a serem seguidos para a resolução do problema em linguagem natural. Um exemplo é o próprio idioma. Esse tipo de algoritmo é vantajoso por não exigir novos conhecimentos, mas pode gerar dupla interpretação dependendo das expressões utilizadas.

- **Pseudocódigo ou Portugol**

É uma forma genérica de escrever um algoritmo utilizando uma linguagem lógica simples, com regras predefinidas. A vantagem desse tipo de algoritmo é sua facilidade na conversão para alguma linguagem de programação, mas é necessário aprender as regras.

Fluxograma

É a representação visual ou gráfica do passo a passo para resolução de um problema. Esse tipo de representação é útil porque costuma ser mais fácil entender elementos gráficos do que interpretar um texto. Porém, é necessário que se aprenda a simbologia.

No exemplo da adição de dois números naturais, foi usada a **descrição narrativa**, e ele contém duas **tomadas de decisão**. Veremos a seguir alguns exemplos de todos esses tipos.

Exemplo 1: **algoritmo simples apresentado em descrição narrativa**

Algoritmo para cálculo da hipotenusa de um triângulo retângulo, dados os catetos

1. chame o primeiro cateto de *C1*;
2. chame o segundo cateto de *C2*;
3. chame a hipotenusa de *H*;
4. eleve o valor de *C1* ao quadrado;
5. eleve o valor de *C2* ao quadrado;
6. adicione os valores encontrados nos passos 4 e 5;
7. calcule a raiz quadrada do resultado obtido no passo 6;
8. iguale o resultado obtido no passo 7 a *H*;
9. escreva "O valor da hipotenusa é *H*".

Exemplo 2: **algoritmo simples apresentado em pseudocódigo**

Algoritmo para cálculo da média aritmética de dois números

- INÍCIO
- DECLARE (*C1*, *C2*, *S*, *M*)
- ESCREVA "Digite dois números"
- LEIA (*C1*, *C2*)
- *S* ← *C1* + *C2*
- *M* ← *S*/2
- ESCREVA "Média =", *M*
- FIM

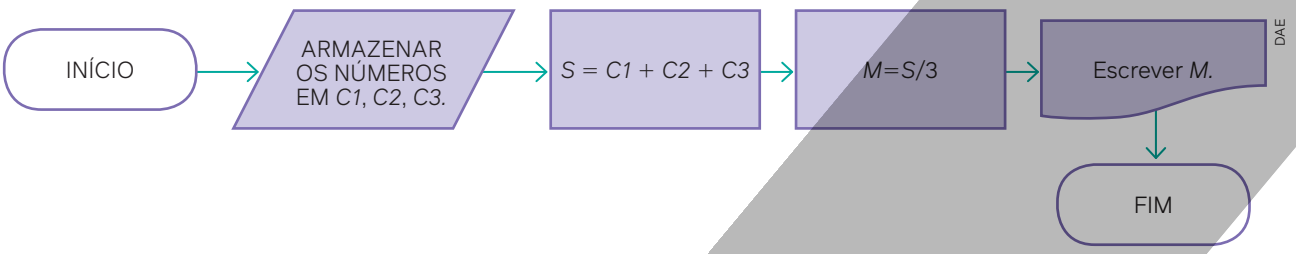
Como dissemos anteriormente, esse tipo de linguagem demanda que algumas regras sejam conhecidas. No caso do código acima, as regras utilizadas estão explicadas na tabela.

Código	Descrição da função
INÍCIO / FIM	Função utilizada para limitar o algoritmo. Tudo que está entre esses dois códigos faz parte da linguagem do pseudocódigo.
DECLARE ( )	Função utilizada para nomear as variáveis que serão utilizadas no algoritmo. No exemplo, as variáveis são *C1*, *C2*, *S* e *M*.
ESCREVA "texto"	Função utilizada para indicar o que deve aparecer na tela, ou seja, o que o algoritmo precisa dizer a quem o está utilizando. No exemplo, a função pede ao leitor que digite dois números. Ao final, mostra a média aritmética dos valores digitados.
LEIA ( )	Função utilizada para ler e armazenar nas variáveis os valores oferecidos por quem está usando o algoritmo. No exemplo dado, a função lê os dois números digitados e os armazena em *C1* e *C2*.
←	A seta leva para alguma variável o resultado de uma operação. No exemplo, leva para *S* o valor da soma dos números digitados e, em seguida, leva para *M* o valor da divisão de *S* por 2.
"="	O sinal de = é usado entre aspas na função ESCREVA. Quando aparece, demanda que seja escrito ao seu lado o valor da variável declarada após a vírgula. No exemplo, temos "**Média =**", ***M***, o que significa que o algoritmo vai escrever na tela, ao lado do sinal de =, o valor que está armazenado na variável *M*.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

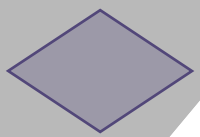
Exemplo 3: **algoritmo simples apresentado em fluxograma**
Algoritmo para cálculo da média aritmética de três números

São dados três números e o algoritmo calcula a média aritmética entre eles.



Esse tipo de linguagem requer o conhecimento de alguns símbolos. Os símbolos mais comuns usados em fluxogramas estão explicados a seguir, podendo essas formas variar um pouco de usuário para usuário.

Alguns símbolos utilizados em fluxogramas

Símbolo	Função
	Indica o início e o fim do processo.
	Utilizada para conectar os símbolos, indica o sentido do fluxo.
	Indica cada atividade que precisa ser executada.
	Indica a entrada/saída de dados genéricos.
	Indica documento gerado ou inserido.
	Indica a necessidade de tomada de decisão.
	Conector, indica que o fluxograma continua.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

No exemplo acima, utilizamos o símbolo ovalado para INÍCIO e FIM, o paralelogramo para declarar as variáveis *C1*, *C2*, *C3* que serão oferecidas pelo executor do algoritmo, o retângulo para carregar as variáveis *S* e *M* que serão calculadas e o retângulo com base ondulada para declarar o resultado de *M*. Não utilizamos o losango e o círculo porque não há tomadas de decisão nem pausas nesse fluxograma.

Exemplo 4: **algoritmo com iteração e tomada de decisão apresentado em fluxograma**

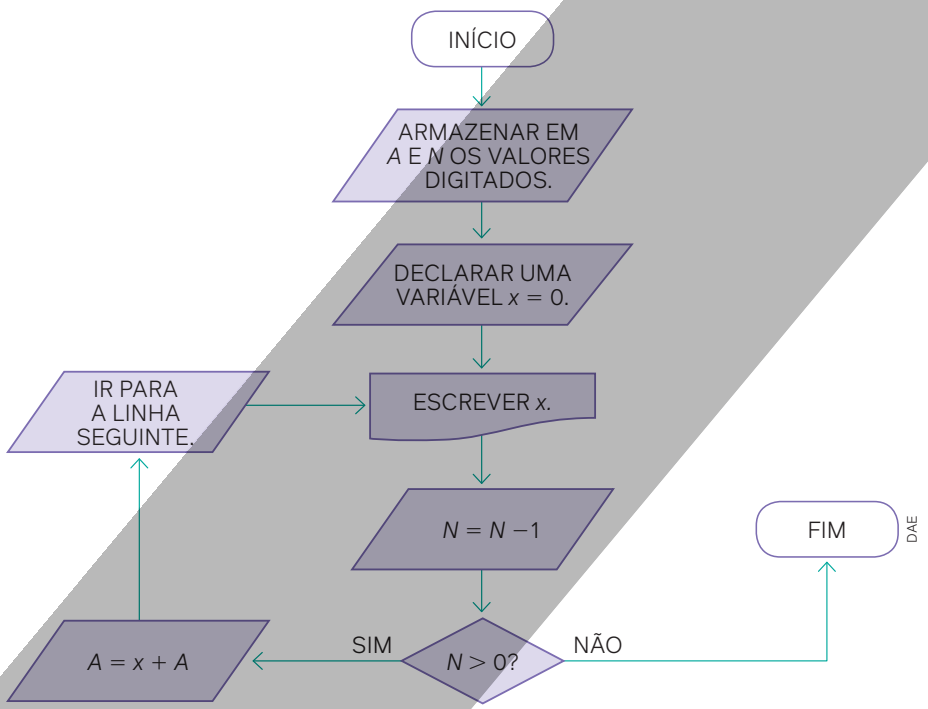
Algoritmo para escrever uma sequência de múltiplos de um número

Assim, as expressões $n = n - 1$ (que não tem sentido em matemática) ou $x = x + a$ (que em matemática significa $a = 0$), no fluxograma representam que a variável n redefine seu valor para $n - 1$ (ou seja, é reduzida em uma unidade) e a variável x recebe o valor de $x + a$ (ou seja, é acrescida de a unidades).

Atenção!

Uma observação importante sobre o fluxograma a seguir, que ilustra esse exemplo: como vimos, em linguagem de programação, o sinal de igualdade não indica a escrita de uma equação.

Vamos agora ao algoritmo. Para executá-lo, determina-se nessa ordem qual número será a base das multiplicações e quantos termos deve ter a sequência de múltiplos desse número. O algoritmo apresenta a sequência com determinada quantidade de múltiplos positivos do número dado.



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Você já sabe que o último passo para verificar se um algoritmo foi bem construído é testá-lo. É interessante escolher alguns valores para testar os algoritmos dos exemplos 3 e 4.

Vamos testar o fluxograma desse exemplo para construir a sequência dos 5 primeiros múltiplos de 3.

INÍCIO
$a = 3, n = 5, x = 0$
0
$n = 5 - 1 = 4; n > 0; x = 0 + 3 = 3$
3
$n = 4 - 1 = 3; n > 0; x = 3 + 3 = 6$
6
$n = 3 - 1 = 2; n > 0; x = 6 + 3 = 9$
9
$n = 2 - 1 = 1; n > 0; x = 9 + 3 = 12$
12
$n = 1 - 1 = 0; n \not> 0;$
FIM

Os fluxogramas representam uma forma visual de compreender os algoritmos, sejam simples ou dotados de iterações e pontos de tomada de decisão.

Recursos digitais

São muitos os recursos digitais que podem auxiliar o estudo da Matemática. Aqui mencionaremos algumas ideias que podem auxiliar na utilização de três deles: planilhas eletrônicas, *software* de geometria dinâmica e calculadoras. Quanto mais se explora de forma autônoma esses recursos mais funções e utilidades se descobre.

Planilhas eletrônicas

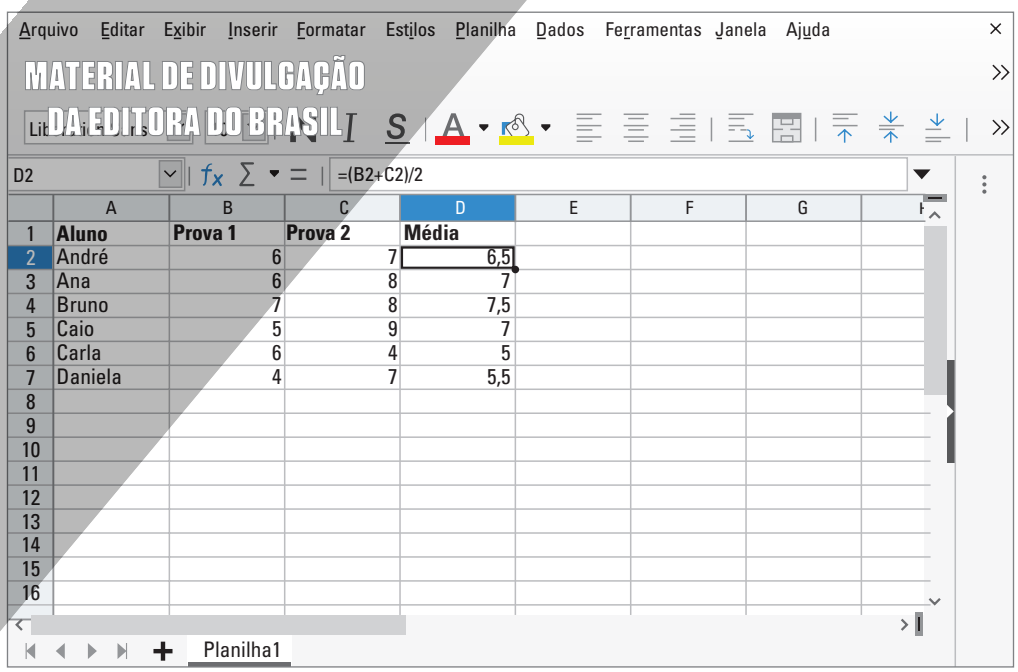
Chamamos de planilhas eletrônicas ou planilhas de cálculo os programas de computador utilizados para organizar e realizar cálculos com dados de tabelas. Sua utilidade, apenas como exemplo, está no cálculo automático de somas e de médias, entre outros.

Para acessar uma planilha eletrônica é preciso ter o *software* instalado no computador e encontrá-lo no menu principal, geralmente chamado menu **Iniciar**. Há versões dessas planilhas que podem ser usadas diretamente na internet, sem necessidade de instalar o programa. Você pode encontrá-las usando um mecanismo de busca e digitar "planilhas eletrônicas *on-line*", por exemplo.

Para preencher uma planilha eletrônica é necessário digitar as informações nas células que a compõem. As listas de valores podem ser digitadas em linhas e/ou em colunas e os dados ficam organizados em tabelas.

Na planilha eletrônica cada célula representa um dado e é indicada por uma letra e um número relacionados, respectivamente, à coluna e à linha em que a informação se encontra. Assim, por exemplo, a célula *D*4 indica o conteúdo que está na coluna *D* e na linha 4 da planilha.

Um exemplo é listar o nome dos alunos na coluna *A*, as notas obtidas por eles em duas provas nas colunas *B* e *C* e, na coluna *D*, determinar a média aritmética entre as notas de cada aluno. Após digitar na célula *D*2 a expressão para determinar a média entre as duas provas digitadas nas células *B*2 e *C*2, ao clicar na célula *D*2 e, em seguida, em cima do quadrado que aparece no canto inferior à direita dessa célula e arrastá-lo até a última linha da tabela, a expressão que determina a média dos valores de cada linha é copiada para as outras células; esse recurso é usado para copiar informações de uma célula para outra.



	A	B	C	D
1	**Aluno**	**Prova 1**	**Prova 2**	**Média**
2	André	6	7	6,5
3	Ana	6	8	7
4	Bruno	7	8	7,5
5	Caio	5	9	7
6	Carla	6	4	5
7	Daniela	4	7	5,5

Tarcísio Garbellini

Figura 1.

Operações e funções

Para que o programa determine uma medida ou resultado automaticamente, é necessário digitar o sinal de igual (=) e, em seguida, a expressão que relaciona o conjunto de dados à medida desejada.

Na planilha eletrônica, os sinais de operações matemáticas são usados para obtermos o valor numérico de expressões numéricas ao digitarmos, em determinada célula, o equivalente a dada expressão numérica. Por exemplo, para calcular o valor de $\frac{2a - (3 + b^2)}{c}$, em que *a*, *b* e *c* são números reais, pode-se organizar os dados, de modo que o valor de *a* seja inserido na célula *F1*, o de *b* na célula *G1* e o de *c* na célula *H1*.

Assim, digita-se a expressão =(2*F1-(3+G1^2))/H1 na célula *H2*, por exemplo, e obtém-se o valor numérico desejado. Em programas de computador a multiplicação é indicada pelo asterisco (*), a divisão pela barra (/) e a potência pelo circunflexo (^).

Além disso, não é preciso utilizar colchetes e chaves para escrever expressões, usa-se parênteses dentro de parênteses. Além de expressões, existem fórmulas pré-programadas que substituem algumas expressões muito utilizadas. Por exemplo, para determinar a soma de um conjunto de dados listados na coluna *A*, da célula *A2* até a célula *A11* (ver célula D1 na figura 2), pode-se digitar a expressão:

$$=A2+A3+A4+A5+A6+A7+A8+A9+A10+A11$$

Ou, de modo equivalente, usar a função **SOMA** do programa e digitar a expressão =SOMA(*A2:A11*).

A média também é determinada, entre outras maneiras, pela função **MÉDIA** predefinida no *software*, digitando-se a expressão =MÉDIA(*A2:A11*). Analogamente, para determinar a moda desses valores, usamos a função **MODO** na expressão =MODO(*A2:A11*). E, para determinar a mediana, usa-se a função **MED** na expressão =MED(*A2:A11*).

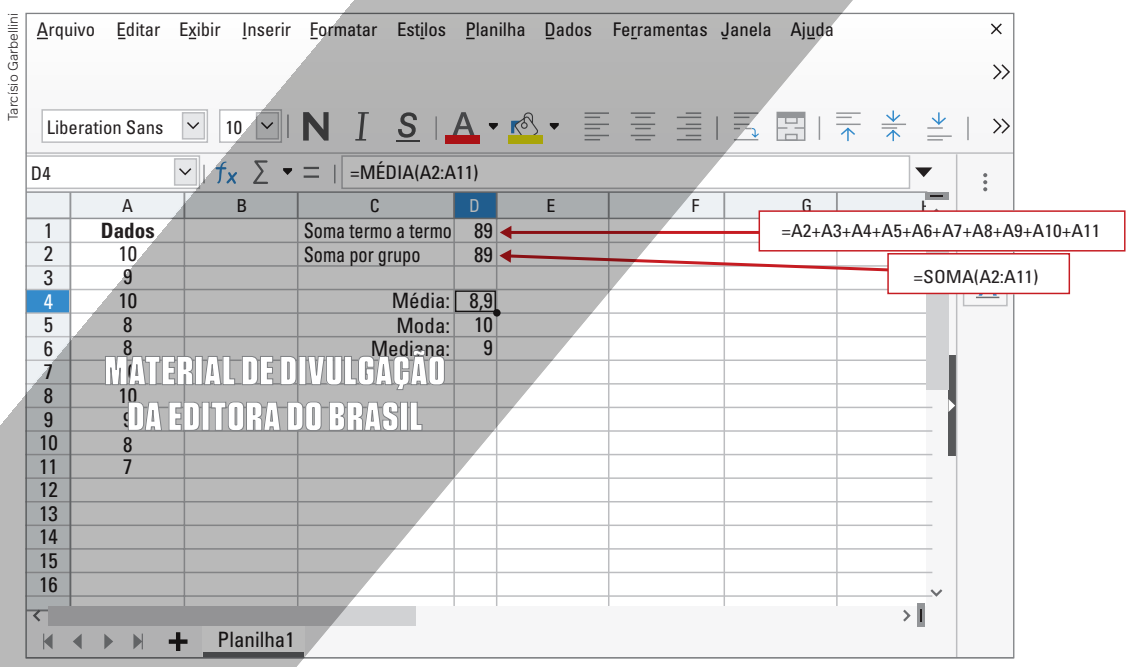


Figura 2.

Assim, podemos determinar a soma, média, moda e mediana de um conjunto de dados sem criar uma expressão numérica para esse cálculo. Há diversas funções arquivadas na biblioteca de uma planilha eletrônica que possibilitam a simplificação dos cálculos.

Você pode encontrar as funções predefinidas do *software* acessando o menu Inserir > Função. No assistente de funções que se abre, faça a busca por categorias de funções ou por ordem alfabética.

Além de determinar automaticamente valores relacionando os conteúdos das células, é possível fazer diferentes tipos de gráficos com base em um conjunto de dados usando esse tipo de *software*.

Gráficos estatísticos

Para criar um gráfico de setores com os dados indicados na coluna *A* da figura 2, por exemplo, basta selecionar o conteúdo da célula *A2* até a célula *A11*, clicar no menu **Inserir** e depois em **Gráfico**. Feito isso, uma janela será aberta para você escolher o tipo de gráfico: de colunas, de barras, de linhas, entre outros (ver figura 3). Para obter um gráfico de setores, escolha o tipo ***Pizza***, que é como geralmente são denominados nesses *softwares*.

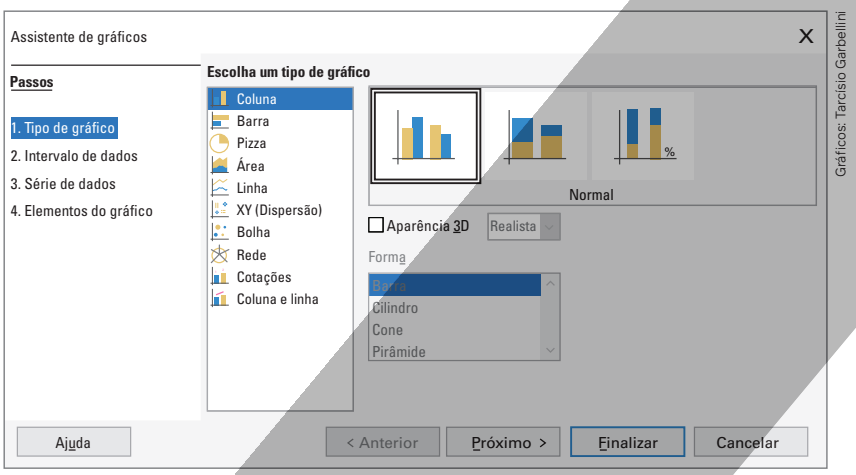


Figura 3.

Depois de escolher o tipo de gráfico, basta clicar em **Finalizar** e o gráfico é inserido na planilha eletrônica. A próxima etapa é compor a legenda e o título do gráfico. Você pode fazer ajustes, como trocar as cores, inserir o título dos dados e outros detalhes que facilitem a divulgação das informações.

Para criar gráficos que relacionem duas variáveis, basta organizar os dados em duas colunas diferentes da planilha (uma coluna para cada variável) – nas células *B2* até *B11* e *C2* até *C11*, por exemplo –, clicar com o *mouse* e selecionar todas as células que contêm os dados digitados. Depois basta repetir o procedimento anterior e escolher o tipo de gráfico mais adequado, que pode ser de barras duplas.

É possível também classificar as variáveis atribuindo título e unidade a elas. Por exemplo, se um par de dados se refere aos valores esperados e reais nos primeiros meses de um ano, digite essas informações em uma coluna (como na coluna *A* da figura a seguir) e na primeira linha das colunas de dados (como nas células *B1* e *C1* da figura 4). Ao selecionar todas as células (de *A1* até *D11*) e criar um gráfico de barras, a legenda e o título dos dados já são automaticamente preenchidos, mas ainda é possível editá-los.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

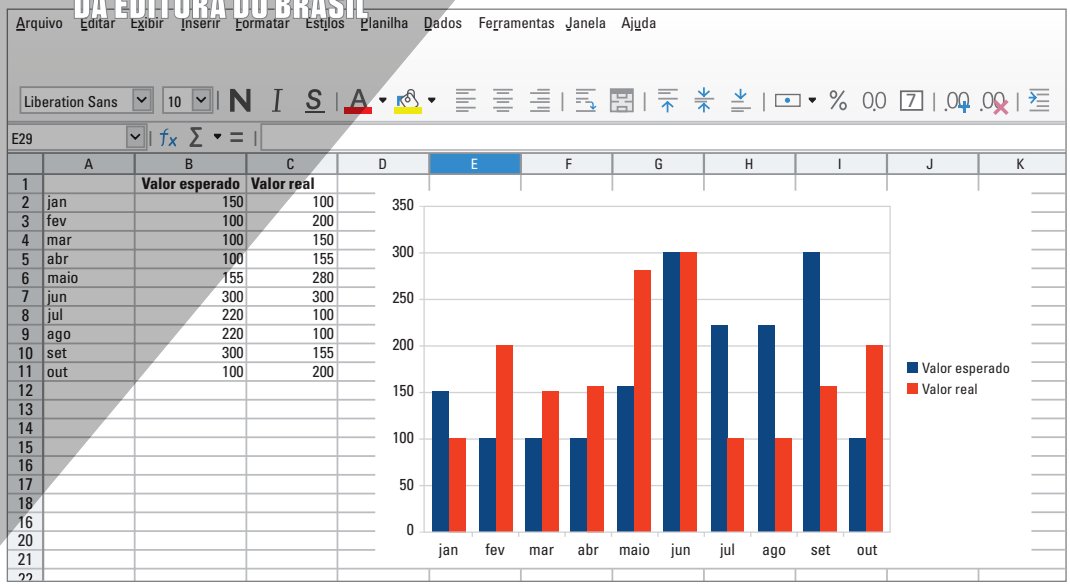


Figura 4.

Software de geometria dinâmica

Software de geometria dinâmica é um programa que, em um ambiente virtual, possibilita o estudo da Geometria simulando o uso de régua e compasso. A principal característica desse ambiente é a possibilidade de movimentar as figuras representadas mantendo algumas características determinadas.

Existem diferentes programas que podem ser usados no trabalho com geometria dinâmica, e algumas versões estão disponíveis na internet, sem necessidade de instalação do *software*.

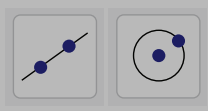
Apesar da variedade de ambientes virtuais de geometria dinâmica, todos têm funcionalidades comuns, necessárias para as construções geométricas.

Construções geométricas

Duas ferramentas são básicas para qualquer construção. A ferramenta **seta** possibilita selecionar e mover pontos, retas, figuras ou construções inteiras. A ferramenta **ponto** pode ser usada para criar pontos diretamente no plano cartesiano, é necessário apenas selecioná-la e clicar no lugar do plano em que o ponto deve ser criado; dessa maneira, automaticamente são atribuídos ao ponto um nome e suas coordenadas.

Exemplos de ícones para as ferramentas **seta** e **ponto**.

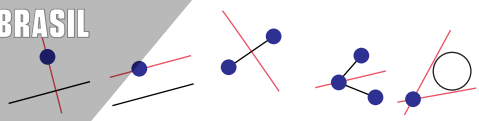
Utilizando as ferramentas principais, **reta** e **círculo**, pode-se fazer qualquer construção geométrica, pois elas simulam a régua e o compasso. A ferramenta **círculo**, dependendo do *software* utilizado, também pode vir indicada como "circunferência" ou "compasso".



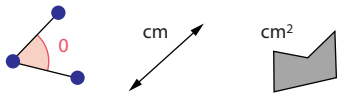
Exemplo de ícones para as ferramentas **reta** e **círculo**.

Há ainda outras ferramentas que facilitam construções geométricas básicas, como **reta perpendicular**, **reta paralela**, **bissetriz**, **mediatriz**, **reta tangente** etc. Além dessas funcionalidades, outra categoria de ferramentas importante é a de medições de **ângulos**, **comprimentos** e **áreas**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL



Exemplo de ícones das ferramentas reta perpendicular, reta paralela, mediatriz, bissetriz e reta tangente.



Exemplo de ícones das ferramentas para ângulo, comprimento e área.

Gráficos: Tarcísio Garbellini

Exemplo

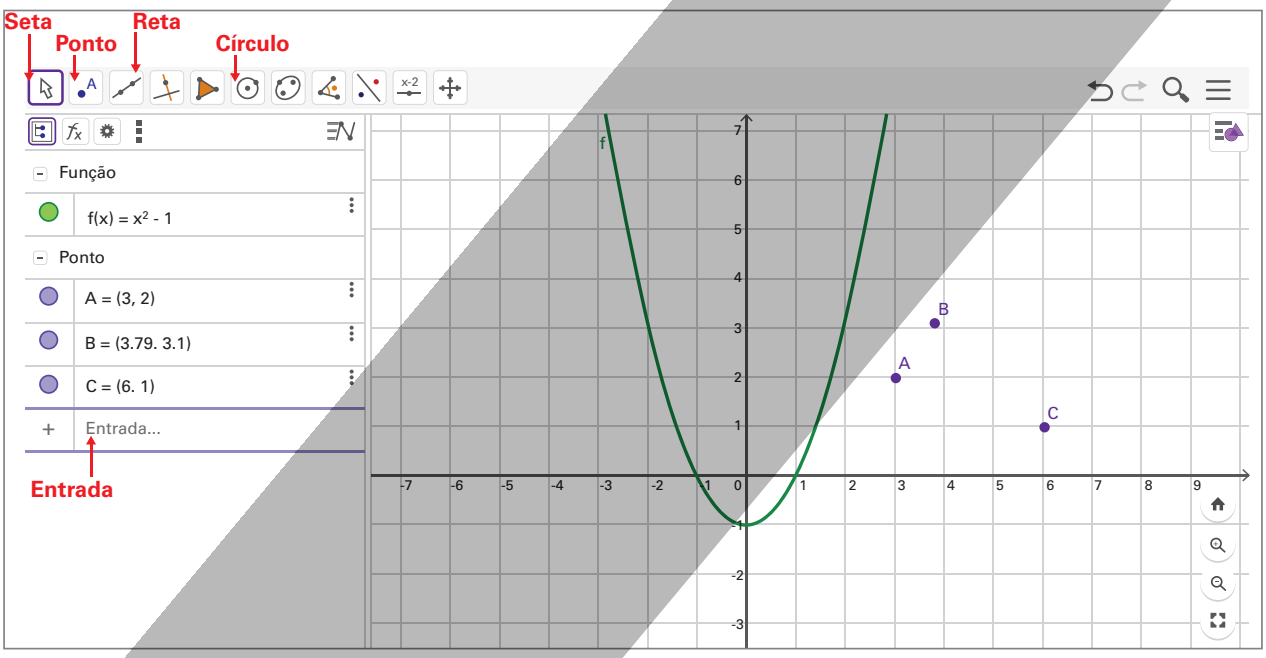
Veja as etapas para a criação de uma reta tangente a uma circunferência cujo raio tem 5 unidades de medida de comprimento e o centro está em (1, 5).

1. Crie o ponto $A(1, 5)$ clicando no ponto (1,5) do plano cartesiano com o botão **ponto** ativado.
2. Com a ferramenta **círculo dados centro e raio**, clique no ponto A e insira o valor 5 na caixa que se abre.
3. Para criar a reta tangente a essa circunferência, basta selecionar o botão **reta tangente** e clicar em um dos pontos da circunferência obtida anteriormente.

Expressões algébricas

O uso da caixa **entrada** também é relevante quando, por exemplo, é necessário determinar a localização de um ponto por meio de suas coordenadas. Nesse caso, na **entrada** é suficiente digitar o valor *x* da abscissa e o valor *y* da ordenada no formato (*x*, *y*). Além disso, pode-se obter a representação gráfica de funções no plano cartesiano com base em sua representação algébrica. Para representar o gráfico de $f(x) = x^2 - 1$, basta digitar a expressão = *x*^2−1 no campo **entrada** (ver figura 5).

> Em geral, nos programas de computador, para indicar uma potência, utiliza-se o acento circunflexo (**^**). Assim x^2 é indicado por *x*^2, ou 10^3 por 10^3 etc. A multiplicação é representada pelo asterisco (*****) e a divisão pela barra (**/**).



Tarcísio Garbellini

Figura 5.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Calculadoras

As calculadoras são ferramentas importantes no dia a dia, pois, assim como outras tecnologias, agilizam o cálculo em diversas operações. Existem diferentes tipos, as mais conhecidas são a convencional e a científica. Atualmente, elas também estão disponíveis nos computadores e *smartphones*.

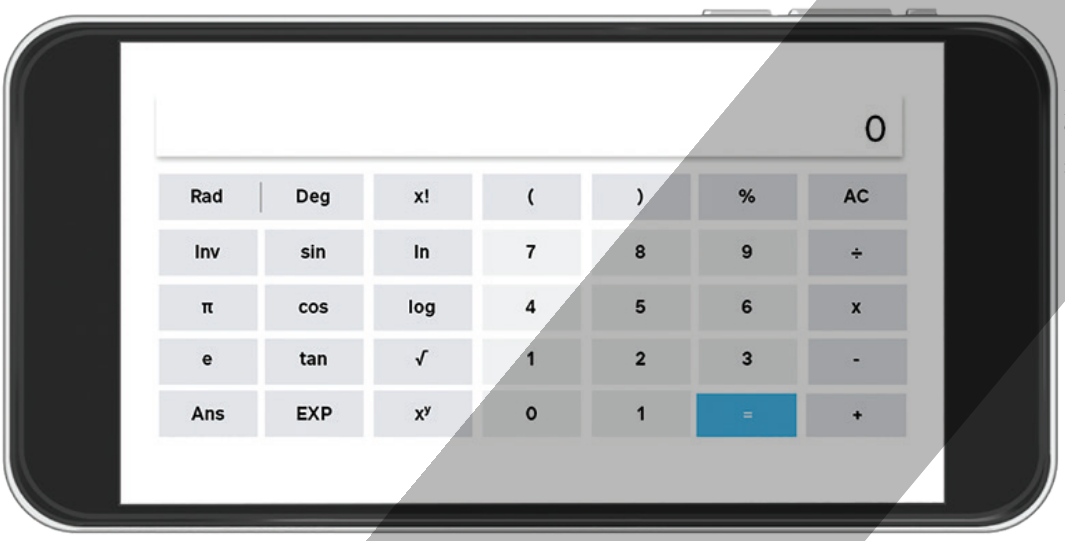
Com a calculadora convencional é feito o cálculo de operações básicas, como adição, subtração, multiplicação e divisão. A maioria delas inclui também uma tecla para o cálculo de porcentagens e outra para raízes quadradas.

Já as calculadoras científicas, além das funcionalidades das convencionais, possibilitam outras operações, como calcular potências com expoentes inteiros ou fracionários com a tecla x^y; determinar a representação fracionária de um número decimal com a tecla $\frac{a\,b/c}{}$; utilizar potências de base 10 com a tecla **EXP**; calcular raízes com diferentes índices com a tecla $\sqrt[x]{\ }$; determinar valores trigonométricos etc. Além disso, é possível utilizar as teclas de parênteses **(** e **)** para digitar uma expressão numérica e obter seu resultado.

Jouke van Keulen/Shutterstock.com

Calculadora científica.

Para acessar a calculadora científica no computador, basta abrir a convencional (também chamada de calculadora-padrão) e, no menu dela, habilitar a calculadora científica. Em *smartphones,* pode ser acessada pelo menu principal do aplicativo da calculadora-padrão ou, na maioria dos aparelhos, girando a tela para que fique na horizontal.



Mauro Salgado

Calculadora científica exibida na tela de um *smartphone*.

Veja como calcular alguns valores utilizando a calculadora do celular.

Comente com os estudantes que os dados da "entrada na calculadora" podem variar de acordo com o modelo.

Expressão numérica	Entrada na calculadora	Expressão no visor da calculadora
$0{,}75^{10} + \sqrt[4]{3}$	Digite **0,75**, digite x^y, digite **10**, digite **+**, digite **3**, digite x^y, digite **(**, digite **1**, digite **÷**, digite **4** e digite a tecla **)**.	0,75^(10) + 3^(1/4)

Apesar de as calculadoras, assim como outras ferramentas tecnológicas, serem importantes por auxiliarem no estudo de propriedades matemáticas e agilizarem cálculos, há um limite de dígitos com os quais elas conseguem operar ou mostrar no visor. Assim, resultados de valores periódicos, como 0,333..., ou irracionais, como $\sqrt{2}$, são representados e operados considerando uma aproximação. Por exemplo, se a calculadora tem capacidade de operar com até 10 dígitos, o valor de $\sqrt{2}$, que é aproximadamente 1,414213562373095, será considerado como sendo exatamente 1,41421356.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Unidades de medida

Lidamos cotidianamente com grandezas discretas e contínuas. Chamamos de grandezas discretas aquelas que são enumeráveis, ou seja, que podemos contar uma a uma, como pessoas e objetos. As grandezas contínuas não são enumeráveis, mas ainda assim lidamos com elas cotidianamente e precisamos medi-las: distâncias, comprimentos, ângulos, áreas, volumes, capacidades, intervalos de tempo, massas etc.

Para essas medições é preciso estabelecer unidades de medida e comparar a grandeza com a unidade de medida. Assim, é preciso estabelecer unidades de medida compatíveis com cada grandeza.

Os sistemas de medida baseiam-se no uso de uma unidade-padrão e de seus múltiplos e submúltiplos. Isso acontece porque, sendo grandezas contínuas, em geral a comparação entre a grandeza e a unidade não resulta em um número inteiro. Por exemplo, ao medir uma distância em metros (como a largura de uma sala), é comum que essa distância contenha uma quantidade inteira de metros e mais uma fração da unidade de medida metro. Para medir essa fração usamos os submúltiplos do metro (decímetros, centímetros e milímetros).

Em contrapartida, ao medir o tamanho de uma rua, é comum que a quantidade de metros seja muito grande, por isso usamos agrupamentos de múltiplos da unidade (decâmetros, hectômetros e quilômetros).

Basicamente, os sistemas de fracionamento (submúltiplos) e agrupamentos (múltiplos) da unidade podem ser decimais, de base 10, ou sexagesimais, de base 60.

Sistemas sexagesimais de medidas

Nos sistemas sexagesimais de medidas, o submúltiplo da unidade é obtido por uma fração da unidade cujo denominador é 60. Utilizamos esse sistema atualmente para medir o tempo em horas e para medir ângulos.

Medidas de tempo

Podemos medir o tempo em anos, meses, dias, e também usando horas (h), minutos (min) e segundos (s).

- 1 minuto equivale a uma fração da hora, precisamente $\frac{1}{60}$, ou seja, $1\ \text{min} = \frac{1}{60}\ \text{h}$
- 1 segundo equivale a uma fração do minuto, também $\frac{1}{60}$, ou seja, $1\ \text{s} = \frac{1}{60}\ \text{min}$

Portanto, 1 segundo equivale a uma fração da hora, precisamente, $\frac{1}{3\,600}$, isto é, $1\ \text{s} = \frac{1}{3\,600}\ \text{h}$.

Ou seja:

$$\mathbf{1\ min = 60\ s\ e\ 1h = 60\ min = 3600\ s}$$

Como nosso sistema de numeração é decimal, é preciso ter cuidado ao fazer transformações de unidades num sistema sexagesimal. Por exemplo, quando dizemos 2,3 h, isso não significa 2 h e 3 min, o correto é 2 h e $\frac{3}{10}$ de hora. Ao transformar 2,3 h para horas e minutos, precisamos multiplicar a parte decimal por 60, assim:

$$\mathbf{2{,}3\ h = 2\ h + 0{,}3\ h = 2\ h + 0{,}3\ \cdot\ 60\ min = 2h18min}$$

Os cálculos para transformação de minutos em segundos são análogos aos utilizados para transformação de horas em minutos.

A partir dos segundos, passamos a usar a base dez para representar partes do segundo: décimos de segundo, centésimos de segundo, milésimos de segundo etc. É comum encontrar essas medidas em competições esportivas que são decididas pelo tempo, como natação ou corridas, entre tantas outras modalidades.

Outro ponto a ser observado é que não agrupamos as horas em conjuntos múltiplos de 60, ou seja, não temos uma unidade de medida que represente 60 h. Em vez disso, utilizamos unidades que fogem ao sistema sexagesimal: agrupamos 24 h em um dia e os dias em semanas, meses e anos.

Medidas de ângulos

As medidas de ângulos também são feitas num sistema sexagesimal, como as medidas de tempo. Os ângulos são medidos em graus. Seus submúltiplos se chamam minutos e segundos, embora utilizem símbolos diferentes daqueles dos [illegible]

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

minutos ’ segundos ’’

$$1' = 60'' \text{ e } 1^\circ = 60' = 3600''$$

Nesse caso também é preciso ter cuidado ao fazer transformações de unidades. De fato,

$$30{,}5^\circ = 30^\circ + 0{,}5^\circ = 30^\circ + (0{,}5 \cdot 60)' = 30^\circ\ 30'$$

Ou ainda:

$$30{,}5^\circ = (30{,}5 \cdot 60)' = 1830'$$

Todos os cálculos são análogos aos do tópico sobre medidas de tempo. Nota-se que aqui também não agrupamos os graus em conjuntos múltiplos de 60, ou seja, não temos uma unidade de medida que represente 60°, mas temos um agrupamento máximo de 360° que ocorre num círculo.

Sistemas decimais de medidas

Nos sistemas decimais de medidas, a partir de uma unidade-padrão de medida temos os submúltiplos e múltiplos dessa unidade, que são representados por prefixos.

- Múltiplos da unidade:

  10 vezes a unidade (prefixo: *deca*); 100 vezes a unidade (prefixo: *hecta*); 1000 vezes a unidade (prefixo: *quilo*).
- Submúltiplos da unidade:

  0,1 vezes a unidade (prefixo: *deci*); 0,01 vezes a unidade (prefixo: *centi*); 0,001 vezes a unidade (prefixo: *mili*).

Se o nome da unidade-padrão é X, os símbolos de seus principais múltiplos serão:

decaX (1 daX = 10 · X),
hectoX (1 hX = 100 · X) e
quiloX (1 kX = 1000 · X).

Os submúltiplos serão:

deciX (1 dX = 0,1 · X),
centiX (1 cX = 0,01 · X) e
miliX (1 mX = 0,001 · X).

Veja um resumo dessas relações no quadro abaixo.

1 kX	1 hX	1 daX	1 X	1 dX	1 cX	1 mX
1000 · X	100 · X	10 · X	1 · X	0,1 · X	0,01 · X	0,001 · X

Mesmo que existam todos esses prefixos no sistema decimal de medidas para os múltiplos e submúltiplos das unidades de medida, nem todos são empregados igualmente; na prática, alguns se destacam em relação a outros. São eles: *quilo*, *centi* e *mili*.

Unidades de capacidade

Utilizamos medidas de capacidade para determinar o tamanho do espaço tridimensional interior de um recipiente ou quanto de ar ele contém. É preciso diferenciar essa medida da medida de massa: se um recipiente tem capacidade de 1 litro, nele cabe um litro de qualquer coisa, seja água, ar, areia, seja outro material qualquer, mesmo que as massas sejam diferentes.

Unidade-padrão
litro (L)
Múltiplos e submúltiplos principais:
1 kL = 1000 L 1 mL = 0,001 L

Unidades de massa

De maneira bastante superficial, podemos dizer que utilizamos medidas de massa para determinar a quantidade de matéria de um corpo. Nesse caso, a unidade de medida tomada como padrão é o quilograma. Isso significa que, diferentemente do que ocorre com as unidades do sistema decimal, as unidades de massa mais comuns são todas formadas por submúltiplos da unidade-padrão.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Unidade-padrão
quilograma (kg)
Submúltiplos principais:
1 g = 0,001 kg ou 1000 g = 1 kg
1 mg = 0,001 g ou 1000 mg = 1 g

Há ainda uma unidade múltipla do quilograma usada para indicar medidas relacionadas a grandes massas: a tonelada (T). Uma tonelada equivale a 1000 quilogramas (1 T = 1000 kg).

Unidades de comprimento

O comprimento é uma grandeza física fundamental que expressa a distância entre dois pontos. Utilizamos medidas de comprimento para determinar o tamanho, por exemplo, de segmentos, distância entre duas cidades, altura de uma pessoa etc.

Unidade-padrão
metro (m)
Múltiplos e submúltiplos principais:
1 km = 1000 m 1 dm = 0,1 m 1 cm = 0,01 m 1 mm = 0,001 m

No sistema métrico existem também medidas de superfície, em metros quadrados (m^2), e medidas de espaço, em metros cúbicos (m^3).

Unidades de área

Chamamos de unidades de área aquelas usadas para medir uma região do espaço em duas dimensões, ou seja, uma superfície delimitada.

Unidade-padrão

metro quadrado (m^2)

Múltiplos e submúltiplos principais:

$1\ km^2 = (1000\ m)^2 = 1000000\ m^2$

$1\ dm^2 = (0{,}1\ m)^2 = 0{,}01\ m^2$

$1\ cm^2 = (0{,}01\ m)^2 = 0{,}0001\ m^2$

$1\ mm^2 = (0{,}001\ m)^2 = 0{,}000001\ m^2$

Exemplo:

Observe como transformar 2,34 m^2 para a medida em centímetros quadrados:

$2{,}34\ m^2 = 2{,}34 \cdot (100\ cm)^2 = 2{,}34 \cdot (10000\ cm^2) = 23400\ cm^2$

Unidades de volume

Chamamos de unidades de medida de volume aquelas usadas para medir uma região do espaço tridimensional, como um sólido maciço.

Unidade-padrão

metro cúbico (m^3)

Múltiplos e submúltiplos principais:

$1\ km^3 = (1000\ m)^3 = 1000000000\ m^3$

$1\ dm^3 = (0{,}1\ m)^3 = 0{,}001\ m^3$

$1\ cm^3 = (0{,}01\ m)^3 = 0{,}000001\ m^3$

$1\ mm^3 = (0{,}001\ m)^3 = 0{,}000000001\ m^3$

Um metro cúbico é a medida do volume de um cubo cuja aresta mede 1 m.

Exemplo:

Vamos transformar 2,3 m^3 em centímetros cúbicos:

$2{,}3\ m^3 = 2{,}3 \cdot (100\ cm)^3 = 2{,}3 \cdot 1000000\ cm^3 = 2300000\ cm^3$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Há ainda uma correspondência entre as medidas de volume e de capacidade, já que ambas medem o espaço tridimensional. Enquanto ao medir o volume medimos o espaço ocupado por um corpo, ao medir a capacidade medimos o espaço da região interna desse corpo. A relação entre as unidades pode ser exposta de várias maneiras.

Entre as relações mais utilizadas temos:

$1\ dm^3$ corresponde a 1000 L

$1\ cm^3$ corresponde a 1 mL

Efetuando transformações de unidades

Utilizando propriedades de potenciação e de acordo com os prefixos utilizados nas medidas do sistema decimal, as transformações das unidades podem ser feitas de maneira mais simples.

Exemplo 1:

Transforme 24,5 kg para a unidade grama.

Substituímos 1 kg por 1000 g:

$24{,}5\ kg = 24{,}5 \cdot 1\ kg = 24{,}5 \cdot (1000\ g) = 24500\ g$

Exemplo 2:

Transforme 452 mL para a unidade litros.

Substituímos 1 mL por 0,001 L:

$452\ \text{mL} = 452 \cdot 1\ \text{mL} = 452 \cdot (0{,}001\ \text{L}) = 0{,}452\ \text{L}$

Exemplo 3:

Transforme 74,27 T para quilogramas.

Substituímos 1 T por 1 000 kg:

$74{,}27\ \text{T} = 74{,}27 \cdot 1\ \text{T} = 74{,}27 \cdot (1\,000\ \text{kg}) = 74\,270\ \text{kg}$

No caso de transformações relacionadas a volumes e áreas, utilizamos propriedades de potenciação que facilitam tais conversões entre unidades. As principais propriedades são:

- multiplicação de bases iguais:
  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- divisão de bases iguais:
  $a^m : a^n = a^{m-n}$
- potência de potência:
  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Também aqui o essencial está no conhecimento do que os prefixos representam. Nesse sentido, vamos exemplificar:

Exemplo 4:

Transformar 8,56 m^2 para centímetros quadrados.

Substituímos 1 m por 100 cm $\rightarrow 10^2$ cm:

$8{,}56\ \text{m}^2 = 8{,}56 \cdot 1\ \text{m}^2 = 8{,}56 \cdot (10^2\ \text{cm})^2 = 8{,}56 \cdot 10^4\ \text{cm}^2 = 8{,}56 \cdot 10\,000\ \text{cm}^2 = 85\,600\ \text{cm}^2$

Exemplo 5:

Transformar 25 000 dm^3 para metros cúbicos.

Substituímos 1 dm por 0,1 m $\rightarrow 10^{-1}$ m:

$25\,000\ \text{dm}^3 = 25\,000 \cdot 1\ \text{dm}^3 = 25\,000 \cdot (10^{-1}\ \text{m})^3 = 25\,000 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 = 25\,000 \cdot 0{,}001\ \text{m}^3 = 25\ \text{m}^3$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Notação científica

A notação científica é um modo de escrever números utilizando potências de dez, de forma que seja possível representar números muito grandes ou muito pequenos, o que facilita a leitura, as comparações e operações entre eles.

Utilizando notação científica, um número deve necessariamente ser escrito com a seguinte estrutura:

$$m \cdot 10^n$$

Nessa estrutura, m é um número real tal que $1 \leqslant m \leqslant 9$ e n é um número inteiro.

Exemplos:

a) $123{,}4 = 1{,}234 \cdot 10^2$

b) $0{,}0067 = 6{,}7 \cdot 10^{-3}$

c) $0{,}00003 = 3 \cdot 10^{-5}$

d) $34\,000 = 3{,}4 \cdot 10^4$

A notação científica também é importante para garantir o bom uso dos **algarismos significativos**, de acordo com a precisão de determinada medida.

Conjuntos numéricos

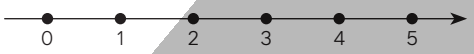
A noção de número é uma das mais sofisticadas e abstratas da Matemática. Uma forma de organizar essa ideia sem, necessariamente, discutir com profundidade o que são números é classificá-los em conjuntos. Veja a seguir uma apresentação dos diversos "tipos" de números usados nas representações e resoluções de problemas.

Conjunto dos números naturais

Os números naturais são usados em contagens. Embora existam infinitos números naturais, eles são enumeráveis, como mostra o conjunto a seguir.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Os números naturais são representados geometricamente por pontos equidistantes em uma reta. Observe o fragmento de reta numérica a seguir; nessa reta é dado um ponto denominado origem (ao qual faremos corresponder o 0), uma unidade de medida e um sentido positivo crescente.



Note que o menor número natural é zero. Para escrevermos apenas os números naturais positivos, precisamos excluir o zero do conjunto dos naturais:

$$\mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}^*$$

Observação

Utilizamos o asterisco para excluir o zero de um conjunto, de modo que o novo conjunto obtido admita apenas termos não nulos.

Conjunto dos números inteiros

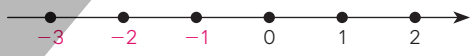
Os números naturais não são suficientes para trabalhar determinadas situações. Imagine que se queira representar, num extrato bancário, o valor do saldo de um cliente que está devendo 1000 reais ao banco. Como indicar isso? Além disso, como fazer a operação $(6 - 8)$? Para essas questões são necessários números negativos.

Com eles, podemos chegar em $6 - 8 = -2$, e o saldo bancário do cliente pode ser representado no extrato do banco como -1000 reais. Acrescentando-se os números negativos ao conjunto dos naturais, obtém-se o conjunto dos números inteiros.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2 ...\}$$

Observe que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, ou seja, todo número natural é inteiro. Esses conjuntos podem ser representados em diagramas de Euler ou na reta numérica, como nas figuras a seguir.



Reta numérica com os números inteiros e, portanto, também os números naturais.

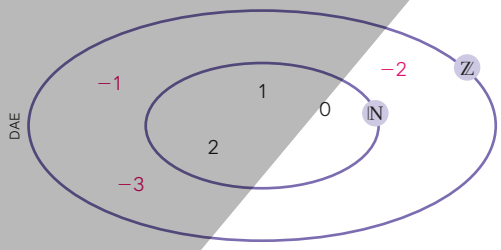


Diagrama de Euler do conjunto dos números naturais como subconjunto dos inteiros.

São subconjuntos do conjunto dos inteiros:

$\mathbb{Z}^* = \{..., -2, -1, 1, 2, ...\} = \mathbb{Z} - \{0\}$ (inteiros não nulos)

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, ...\} = \mathbb{N}$ (inteiros não negativos ou naturais)

$\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, ...\}$ (inteiros não positivos)

$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}^*$ (inteiros estritamente positivos)

$\mathbb{Z}_-^* = \{-1, -2, -3, ...\}$ (inteiros estritamente negativos)

Observação

Os símbolos + e − indexados no símbolo do conjunto representam que o conjunto não admite valores, respectivamente, negativos ou positivos.

Conjunto dos números racionais

Os números inteiros também não são suficientes para resolver determinadas situações. Imagine que se queira dividir igualmente 10 chocolates para 5 crianças. Cada criança receberia $10 \div 5 = 2$ chocolates. Mas e se fosse para dividir 10 chocolates para 20 crianças? O resultado da operação $10 \div 20$ não se encontra no conjunto dos números inteiros. No entanto, se for permitido partir os chocolates ao meio, cada criança receberia metade de um chocolate, isto é: $10 \div 20 = \frac{1}{2}$.

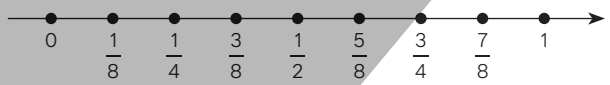
O número $\frac{1}{2}$ também pode ser representado na forma decimal por 0,5. Na notação decimal, os algarismos à direita da vírgula representam um "fragmento" de um inteiro (ou uma "parte" da unidade). Ao se acrescentar ao conjunto dos inteiros as frações, obtém-se o conjunto dos números racionais.

Observe que todo número inteiro também é um número racional. São as frações aparentes, como $\frac{6}{3} = 2$, $-\frac{15}{5} = -3$, $\frac{7}{1} = 7$ etc.

As partes da unidade, citadas anteriormente, são frações não aparentes, como $\frac{1}{2} = 0{,}5$, $\frac{5}{8} = 0{,}625$ etc. Nesse caso, na escrita fracionária o numerador é menor que o denominador, e na escrita decimal o algarismo zero fica à esquerda da vírgula para indicar que a parte inteira desse número é nula.

Há ainda os números mistos que têm parte inteira e parte fracionária, por exemplo $3\frac{2}{5}$ (três inteiros e dois quintos). Esse número pode ser escrito na forma de uma única fração ($\frac{17}{5}$) ou na forma decimal (3,4). Quando escrito na forma de fração, temos uma fração imprópria, que ocorre quando o numerador é maior que o denominador. Quando escrito na forma decimal, temos um número cuja parte inteira é não nula, isto é, alguma ordem à esquerda da vírgula contém um algarismo diferente de zero.

Ao reunirmos todos esses tipos de frações, temos o conjunto dos números racionais, formado por todos os números que podem ser escritos na forma de fração, com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero. Sua representação na reta numérica é:



Veja que estão representados apenas alguns números racionais entre 0 e 1; portanto, entre dois números racionais quaisquer existem infinitos outros números racionais, por isso é impossível colocar todos juntos numa fila em ordem crescente ou decrescente sem que falte algum. Apesar disso, os números racionais não preenchem toda a reta e, embora haja pontos entre eles, é conveniente escrever o conjunto de acordo com sua definição:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

O conjunto dos racionais é, portanto, formado por todos os números que podem ser escritos na forma de fração, isto é, na forma de divisão de um número inteiro por um número inteiro não nulo.

Essa nova notação requer alguns cuidados. Quando escrevemos $\frac{\pi}{4}$, por exemplo, embora usando um "traço" de fração, não é um número racional, pois π não é um número inteiro. Aliás, π também não é um número racional.

Veja a seguir a classificação dos números racionais.

- Números inteiros que podem ser escritos como frações aparentes. Exemplos:

  a) $-3 = -\frac{6}{2} = -\frac{15}{5}$... **b)** $\frac{12}{3} = 4$ **c)** $\frac{0}{7} = 0$

- Decimais exatos, que podem ser escritos como frações decimais, isto é, frações cujo denominador é uma potência de 10, ou quaisquer outras frações que, simplificadas, têm denominadores que são exclusivamente múltiplos de 2 ou de 5.

  a) $0{,}23 = \frac{23}{10}$ **b)** $1{,}15 = \frac{115}{100} = 1\frac{15}{100} = 1\frac{3}{20}$ **c)** $-\frac{3}{4} = -0{,}75$

Para transformar uma fração não aparente em um número na forma decimal, basta dividir o numerador pelo denominador.

- Dízimas periódicas são números decimais com infinitas casas depois da vírgula em uma sequência de algarismos que se repete. Essa sequência de algarismos repetidos é denominada período. Exemplos:

a) $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots = 0{,}\overline{3}$

b) $0{,}2121\ldots = 0{,}\overline{21} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$

Há vários procedimentos para encontrar a fração geratriz de uma dízima periódica. Veja aqui um deles. Sendo $x = 2{,}4545\ldots$, fazemos:

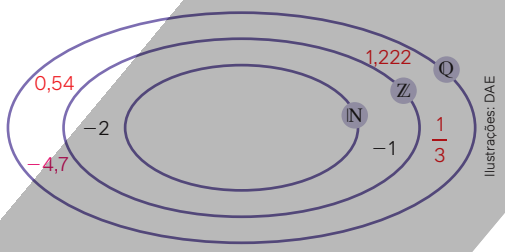
$$100x = 245{,}4545$$

$$100x - x = 245{,}4545\ldots - 2{,}45455\ldots = 243$$

$$99x = 243$$

$$x = \frac{243}{99} = \frac{27}{11}$$

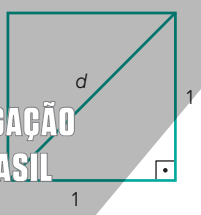
Lembre-se de que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. No diagrama de Euler, com alguns exemplos de elementos, tem-se:



Ilustrações: DAE

Conjunto dos números reais

Os números racionais também não são suficientes para todas as situações. Ao calcular o comprimento da diagonal do quadrado de lado 1 aplicando o Teorema de Pitágoras, chega-se ao seguinte resultado:



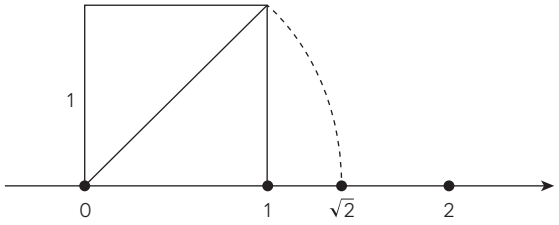
MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

$$d = \sqrt{2}$$

Mas $\sqrt{2}$ não é um número racional, pois sua representação decimal tem infinitas casas depois da vírgula sem uma sequência de algarismos que se repete, isto é, sem um período. Assim, $\sqrt{2}$ não pode ser escrita na forma de uma fração cujos numerador e denominador sejam números inteiros e o denominador diferente de zero.

Na figura a seguir, observe como podemos localizar na reta numérica o número irracional $\sqrt{2}$.



Tarcísio Garbellini

Observe que esse número irracional está situado entre os inteiros 1 e 2, isto é: $1 < \sqrt{2} < 2$. Assim como o $\sqrt{2}$, temos infinitos outros números irracionais, tais como: $-\sqrt{2}$, π, $-\pi$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ etc.

O conjunto dos números reais é a união do conjunto dos números racionais e do conjunto dos números irracionais.

Ao representar por $\mathbb{I}$ o conjunto dos números irracionais, temos as seguintes relações de inclusão entre os conjuntos numéricos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

e

$$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$$

Essas relações podem ser resumidas da seguinte maneira:

- todo número que é racional é também real;
- todo número que é irracional é também real;
- um número real é racional ou irracional.

Ao representarmos na reta todos os números reais, a reta fica completa, isto é, todo ponto da reta corresponde a um número real e todo número real corresponde a um ponto da reta.

Podemos considerar, portanto, que segmentos da reta numérica representam subconjuntos dos números reais. Esses subconjuntos contínuos são chamados de intervalos reais.

Intervalos reais

Quando consideramos dois números reais distintos quaisquer da reta numérica, entre eles existem infinitos outros números reais. Daí a necessidade de representarmos, por meio de intervalos, tais números. Observe os exemplos.

Exemplo 1

Vamos representar na reta numérica todos os números reais de -2 a 4.

Como os extremos fazem parte do intervalo, representamos por "bola fechada" na reta numérica acima. Tal intervalo é dito "fechado à esquerda e fechado à direita". Outras duas maneiras de representarmos são:

- utilizando colchetes: $[-2; 4]$;
- notação de conjuntos: $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 4\}$.

Observação

Caso desejássemos excluir os extremos, colocaríamos "bola aberta" na reta para a indicação dos extremos do intervalo, isto é,

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Outras possíveis representações desse intervalo real são:

- utilizando colchetes: $]-2 ; 4[$;
- utilizando parênteses: $(-2; 4)$;
- notação de conjuntos: $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4\}$.

Exemplo 2

Vamos representar na reta numérica todos os números reais de -2 a 4, porém, vamos excluir o número 4.

Tal intervalo é dito "fechado à esquerda e aberto à direita". Outras duas maneiras de representarmos são:

- utilizando colchetes: $[-2 ; 4 [$;
- utilizando colchetes e parênteses: $[-2; 4)$;
- notação de conjuntos: $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < 4\}$.

Poderíamos ter o intervalo aberto à esquerda (excluindo o -2) e fechado à direita (incluindo o 4), cujos modos de representação seriam feitos em analogia a esse exemplo.

Exemplo 3

Vamos representar na reta numérica todos os números reais que são maiores ou iguais a zero.

Tal intervalo é dito "fechado à esquerda". Como na reta à direita do zero qualquer número real está no intervalo, dizemos que à direita dele "vai ao infinito". Representamos esse intervalo das seguintes maneiras:

- utilizando colchetes: $[0; +\infty[$;
- utilizando colchetes e parênteses: $[0; +\infty)$;
- notação de conjuntos: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$.

O símbolo infinito nessas notações é sempre utilizado como representação de intervalo aberto.

Exemplo 4

Vamos representar na reta numérica todos os números reais que são menores que 3.

Tal intervalo é dito "aberto à direita". Como na reta à esquerda do 3 qualquer número real está no intervalo, dizemos que à esquerda dele "vai ao menos infinito". Representamos esse intervalo das seguintes maneiras:

- utilizando colchetes: $]-\infty; 3[$;
- utilizando parênteses: $(-\infty; 3)$;
- notação de conjuntos: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$.

As notações de intervalos reais exemplificadas aqui são convenções para representar os infinitos números reais de parte da reta real. Recomendamos que a notação utilizando parênteses seja evitada pela inconveniência de também poder estar associada à representação de pares ordenados de um plano cartesiano.

Exemplo 5

Podemos também representar subconjuntos dos reais que não sejam intervalos, como subconjuntos dos conjuntos dos números naturais, inteiros ou racionais.

- $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\} = \{4, 5, 6, 7, ...\}$
- $\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leqslant 1\} = \{-1, 0, 1\}$
- $\left\{x \in \mathbb{Q} \mid x > \frac{1}{3}\right\}$ (não há forma simples de enumerar esse conjunto)
- $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ é múltiplo de $7\} = \{0, 7, 14, 21, ...\}$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Observação

Outra forma de escrever os múltiplos naturais de 7 (ou de qualquer outro número) é utilizando uma segunda variável:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x = 7n, n \in \mathbb{N}\} = \{0, 7, 14, 21, ...\}$$

Conhecer os conjuntos numéricos e as formas de representar intervalos e subconjuntos é essencial para modelar situações contextualizadas, resolver equações, estudar funções, representar corretamente hipóteses e resultados, interpretar medidas, entre inúmeras aplicações matemáticas.

A linguagem das funções

Para introduzir a ideia de função, vamos começar com uma noção intuitiva de um contexto do cotidiano.

Imagine que Camila seja uma bailarina e receba um salário mensal composto de um valor fixo de R$ 1.400,00 acrescido de R$ 500,00 por cada espetáculo de dança do qual participa em um mês. A tabela abaixo mostra alguns exemplos de valores possíveis para o salário de Camila, calculados de acordo com o número de espetáculos de que participa no mês.

Número de espetáculos	0	1	2	3	4
Salário (em reais)	$1400 + 0 \cdot 500 = 1400$	$1400 + 1 \cdot 500 = 1900$	$1400 + 2 \cdot 500 = 2400$	$1400 + 3 \cdot 500 = 2900$	$1400 + 4 \cdot 500 = 3400$

Observe que o salário depende do número de espetáculos e que, chamando-se de S o salário, em reais, e de x o número de espetáculos dos quais Camila participa no mês, podemos representar a relação entre eles pela expressão algébrica $S = 1400 + 500x$.

Quando temos, conforme exemplo, duas grandezas relacionadas em que uma delas depende da outra, estamos diante do conceito de função.

Reconhecimento de uma função

Dados dois conjuntos, A e B, uma relação $\mathcal{R}$ de A em B (denota-se $\mathcal{R}: A \to B$) é um conjunto de pares ordenados (x, y) em que x é um elemento do conjunto A e y é um elemento do conjunto B. Em notação simbólica,

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\} \text{ é uma relação do conjunto } A \text{ no conjunto } B.$$

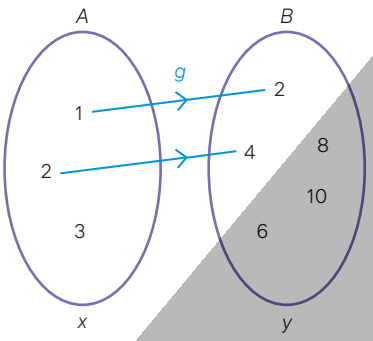
Duas condições devem ser satisfeitas para que uma relação seja uma função:

- todos os elementos x do conjunto A devem pertencer a algum par ordenado;
- cada um dos elementos x do conjunto A só pode pertencer a um único par ordenado.

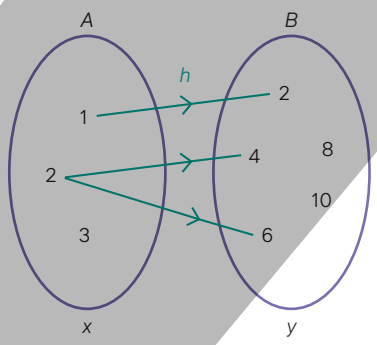
Exemplos

Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e as seguintes relações de A em B, ilustradas nos diagramas a seguir.

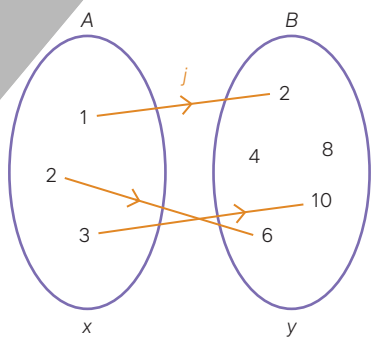
$g = \{(1, 2), (2, 4)\}$



$h = \{(1, 2), (2, 4), (2, 6)\}$



$j = \{(1, 2), (2, 6), (3, 10)\}$



Ilustrações: DAE

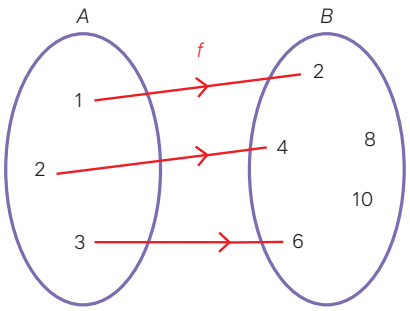
Verificando-se as condições apresentadas, conclui-se que:

- g **não é uma função** de A em B, pois o elemento $x = 3$, do conjunto A, não aparece em nenhum par ordenado da relação, isto é, existe um elemento em A que não se relaciona a nenhum elemento de B;
- h **não é uma função** de A em B, pois o elemento $x = 2$, do conjunto A, aparece em dois pares ordenados diferentes, isto é, um mesmo elemento de A relaciona-se a dois elementos distintos de B;
- j **é uma função** de A em B, pois todos os elementos de A aparecem em algum par ordenado e cada um deles aparece em um único par ordenado, isto é, todos os elementos do conjunto A estão relacionados a elementos de B e cada elemento de A está relacionado a um único elemento de B.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Elementos de uma função

Seja a função $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$, de $A = \{1, 2, 3\}$ em $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, ilustrada no diagrama a seguir.



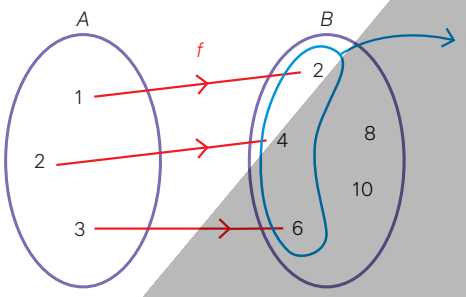
$f: A \to B$

Vejamos algumas denominações associadas a essa função.

Domínio, contradomínio e imagem

O conjunto A é denominado **domínio** da função f, B é o **contradomínio** da função f e o conjunto {2, 4, 6}, formado apenas pelos elementos de B que se relacionam a elementos de A, é denominado **imagem** da função f.

Chamamos de variável independente aquela que representa os valores do domínio da função. A variável que representa os valores da imagem é chamada de variável dependente, pois seu valor depende do valor considerado no domínio.



$D = \{1, 2, 3\}$

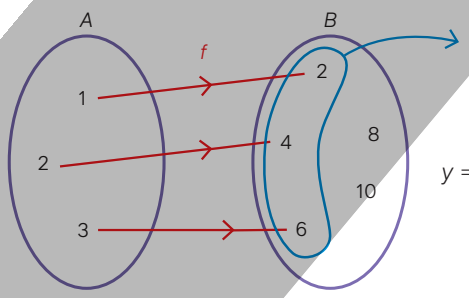
$CD = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$Im = \{2, 4, 6\}$

Lei de formação de uma função

Como nessa função cada elemento do domínio é relacionado a um elemento do contradomínio que é igual a seu dobro, podemos escrever uma expressão para representar algebricamente a relação entre os dois conjuntos, no caso $y = 2x$. Essa expressão é denominada **lei de formação** da função.

Note que y é a variável dependente e é escrita em função de x, que é a variável independente.



$y = 2x$ ou $f(x) = 2x$

Ilustrações: DAE

Cálculo de imagem numa função

O valor da função para determinado elemento x do domínio da função é o elemento y do conjunto-imagem da função, relacionado a ele. Em outras palavras, cada elemento y do conjunto-imagem da função é o **valor da função** para algum elemento x do domínio. Em relação à função f pode-se dizer, genericamente, que

$$y = f(x)$$

Conhecendo-se a lei de formação da função, é possível calcular o valor da função correspondente a determinado elemento do domínio. Para isso, basta substituir o x da expressão por esse elemento. No caso, como $y = 2x$, ou seja, como $f(x) = 2x$:

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

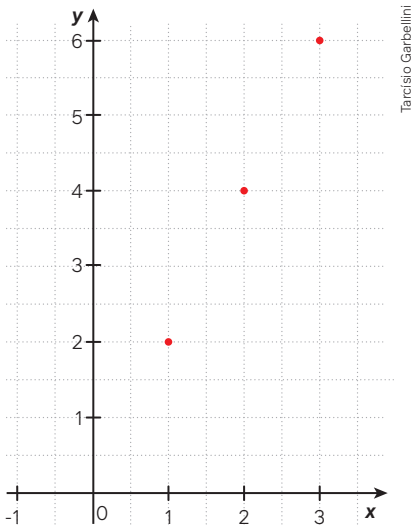
- $f(1) = 2 \cdot 1 = 2$
- $f(2) = 2 \cdot 2 = 4$
- $f(3) = 2 \cdot 3 = 6$

Note que, se um ponto $A\ (x_A, y_A)$ pertence a uma função, então $f(x_A) = y_A$.

Gráfico de uma função

Define-se **gráfico** de uma função como a representação geométrica, no plano cartesiano, de todos os pares ordenados da função. No exemplo, o gráfico da função f é o da figura a seguir.

x	y
1	2
2	4
3	6



Tarcísio Garbellini

No plano cartesiano, o eixo horizontal é chamado de eixo das abscissas. Nele marcamos os valores da variável independente. O eixo vertical é chamado de eixo das ordenadas e nele marcamos os valores da variável dependente.

Observação:
Embora os pontos desse gráfico estejam alinhados, não podemos uni-los traçando uma reta. O motivo é que o domínio dessa função é discreto, ou seja, é um subconjunto dos números naturais. Se o domínio fosse todos os números reais entre 1 e 3, então o gráfico seria o segmento de reta que une os pontos vermelhos e forma uma linha contínua.

Zero de uma função

Zero de uma função é o valor de x para o qual $y = 0$, ou seja, valor que anula a função. Graficamente, o zero de uma função corresponde à abscissa do ponto em que o gráfico intersecta o eixo das abscissas.

Algumas classificações de funções

Há algumas formas de classificar funções. Veja a seguir duas delas.

Quanto ao crescimento de uma função

Uma função é **crescente** se, ao aumentarmos os valores da variável independente, os valores da variável dependente também aumentarem. Simbolicamente:

Dada uma função f: $A \to B$ com m, n pertencentes a A, temos:

$$\text{Se } m > n, \text{ então } f(m) > f(n).$$

Analogamente, dizemos que uma função é **decrescente** quando os valores da variável dependente diminuem sempre que os valores da variável dependente aumentam. Simbolicamente:

Dada uma função f: $A \to B$ com m, n pertencentes a A, temos:

$$\text{Se } m > n, \text{ então } f(m) < f(n).$$

Quando uma função é somente crescente ou somente decrescente em todo seu domínio, dizemos que ela é **monótona**.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Bijeção

Dizemos que uma função é **injetora** quando cada valor da variável dependente provém de um único valor da variável independente. Em outras palavras, quando nenhum valor do conjunto-imagem se relaciona com mais de um valor do domínio. Simbolicamente:

Dada uma função f: $A \to B$ com m, n pertencentes a A, dizemos que f é injetora se:

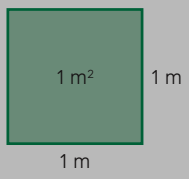
$$f(m) = f(n) \text{ implica } m = n.$$

Dizemos que uma função é **sobrejetora** quando todos os valores da variável dependente se relacionam com algum valor da variável independente. Em outras palavras, quando todos os valores do contradomínio pertencem ao conjunto-imagem. Simbolicamente:

Dada uma função f: $A \to B$, dizemos que f é sobrejetora se, para todo y pertencente a B, existe algum x pertencente a A tal que $y = f(x)$.

Quando uma função é simultaneamente sobrejetora e injetora, dizemos que ela é **bijetora**. Funções bijetoras são inversíveis. Quando uma função é bijetora, todo elemento da imagem está relacionado a um único elemento do domínio. Dessa forma, é sempre possível escrever uma nova função invertendo-se o domínio e a imagem da função original.

Cálculo de áreas

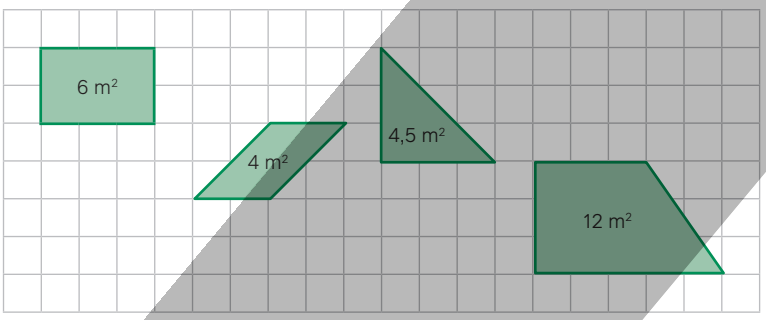


A área representa a medida de uma superfície. Esse cálculo é feito por meio da comparação com um padrão que corresponde a um quadrado de lado unitário. A unidade de medida-padrão do sistema internacional (S.I.) utilizada para uma área é o metro quadrado (m^2), com seus múltiplos e submúltiplos. Um metro quadrado é a área de um quadrado cujo lado mede 1 m, como indicado na figura ao lado.

Da mesma maneira, um centímetro quadrado é a área de um quadrado cujo lado mede 1 cm.

Assim, na malha quadriculada, observamos que a área de determinada figura geométrica, em metros quadrados, é encontrada pela verificação de quantos quadrados unitários (1 m^2) cabem no interior da figura.

Dessa noção podem ser desenvolvidas relações matemáticas para o cálculo das áreas de algumas figuras geométricas planas, conforme figura abaixo.

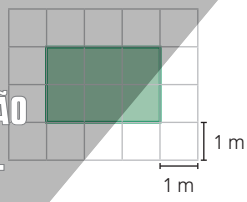


Ilustrações: DAE

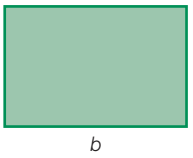
Retângulos

No exemplo da figura a seguir, os lados do retângulo medem 3 m e 2 m de comprimento, respectivamente. Desse modo, no lado de medida 3 m podemos ter 3 lados de quadrados unitários e, no lado de medida 2 m, podemos ter 2 lados de quadrados unitários, ou seja, no retângulo todo, há um total de $3 \cdot 2 = 6$ quadrados de 1 m^2. Nesse caso, dizemos que a área desse retângulo é 6 m^2.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL



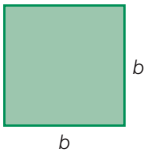
Genericamente falando, a medida da área de um retângulo cuja base mede b e cuja altura mede h, ambas na mesma unidade de medida, é dada por $A = b \cdot h$ nessa unidade de medida ao quadrado.



$A = b \cdot h$

Isso vale também para os quadrados de lados não unitários.

$A = b \cdot b$

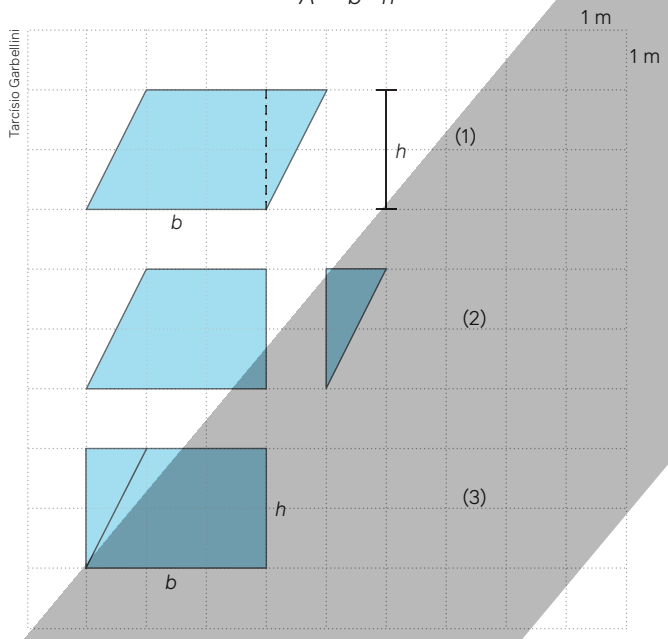


$A = b^2$

Paralelogramos

Na figura a seguir, pode-se observar como um paralelogramo cuja base tem medida b e cuja altura tem medida h se transforma em um retângulo de base e altura com as mesmas medidas, quando se desloca, de um lado para o outro, um dos triângulos que compõem o paralelogramo. Portanto, é possível calcular a área do paralelogramo com base na área do retângulo. Assim, a área do paralelogramo é dada por:

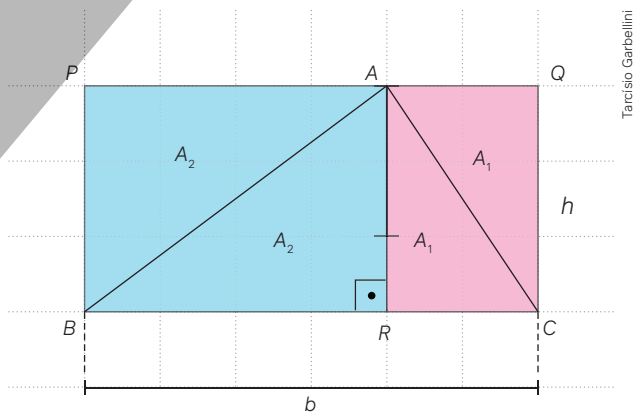
$$A = b \cdot h$$



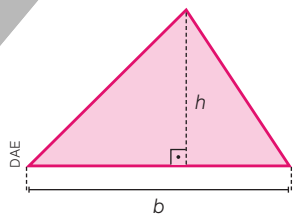
Triângulos

Observe na figura o retângulo $PQCB$, cuja área é dada por $2A_1 + 2A_2$. Observe também os triângulos congruentes ACR e ACQ, cujas áreas são iguais a A_1, e os triângulos congruentes ABP e ABR, cujas áreas são iguais a A_2. A área do triângulo ABC, de base medindo b e altura medindo h, é igual a $A_1 + A_2$, que é metade da área do retângulo. A área do triângulo ABC, portanto, metade da área do retângulo sempre que o triângulo e o retângulo tiverem, como no exemplo, a mesma base e a mesma altura.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL



Assim, se a base de um triângulo mede b e a altura mede h, a sua área será:

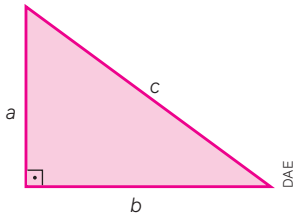


$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Existem outras expressões úteis para o cálculo da área de triângulos.

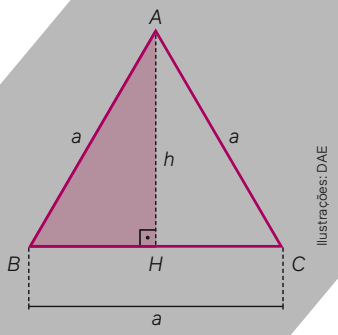
Triângulo retângulo

Se um cateto é tomado como base, o outro será a altura correspondente. Logo, para um triângulo retângulo de catetos medindo respectivamente a e b, a área será $A = \frac{a \cdot b}{2}$.



Triângulo equilátero

Na figura, o triângulo ABC é equilátero de lado de medida a e $\overline{AH}$ é sua altura, que coincide com a mediana. Nesse caso, $BH = HC = \frac{a}{2}$. Considere que a altura do triângulo mede $h = AH$.



Ilustrações: DAE

Aplicando-se o teorema de Pitágoras ao triângulo ABH, temos:

$$(AB)^2 = (AH)^2 + (BH)^2$$

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

A área do triângulo ABC, equilátero de lado de medida a, será:

$$A = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

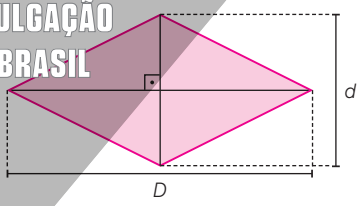
Losangos

Como em todo paralelogramo, a área de um losango pode ser calculada fazendo-se o produto das medidas de sua base e de sua altura. No entanto, por ser formado por quatro triângulos retângulos congruentes, como mostra a figura abaixo, pode-se compor sua área por meio da soma das áreas desses triângulos.

Lembrando que as diagonais de um losango são perpendiculares e cruzam-se em seu ponto médio, cada triângulo retângulo tem catetos medindo, respectivamente, $\frac{D}{2}$ (metade da diagonal maior) e $\frac{d}{2}$ (metade da diagonal menor).

Assim, a área de cada triângulo retângulo vale $\frac{\frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2}}{2}$, e a área do losango será quatro vezes isso, ou seja:

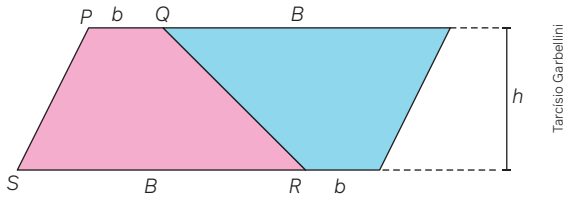
MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL



$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Trapézios

A área de um trapézio pode ser obtida a partir da metade da área de um paralelogramo. Assim, por exemplo, na figura a seguir o trapézio PQRS é copiado e invertido (cor azul) para formar o paralelogramo.



Tarcísio Garbellini

Duplicando-se o trapézio *PQRS*, cujas bases medem *b* e *B* e cuja altura mede *h*, obtém-se um paralelogramo de base medindo $(B + b)$ e altura medindo *h*, cuja área mede $(B + b) \cdot h$.

Como a área do paralelogramo é o dobro da área do trapézio, temos:

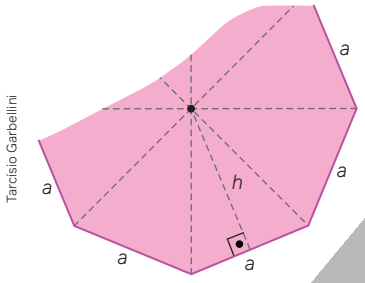
$$A_{trap.} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Polígonos regulares

Todo polígono regular pode ser decomposto em triângulos isósceles.

Assim, os polígonos regulares de *n* lados são formados por *n* triângulos isósceles, cujo vértice se encontra no centro do polígono, cuja altura corresponde ao apótema do polígono e cuja base corresponde ao lado do polígono. Lembre-se de que apótema de um polígono regular é o segmento que liga perpendicularmente o centro dele ao ponto médio de seu lado.

A área do polígono regular é a soma das áreas de todos os triângulos isósceles que o compõem.



Tarcísio Garbellini

A figura mostra um fragmento de um polígono regular de *n* lados, dividido em *n* triângulos.

$$A_{triângulo} = \frac{a \cdot h}{2}$$

$$A_{polígono} = n \cdot \frac{a \cdot h}{2}$$

Como $n \cdot a$ é a medida do perímetro $(2p)$ do polígono, então $\frac{n \cdot a}{2}$ é a medida de seu semiperímetro, *p*. Portanto, a medida da área do polígono regular será o produto das medidas de seu semiperímetro por seu apótema.

$$A_{polígono\ regular} = p \cdot h$$

Hexágono regular

O hexágono regular é um polígono bastante especial, pois é formado por seis triângulos equiláteros. Assim, a medida de sua área será a soma das medidas das áreas dos triângulos.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

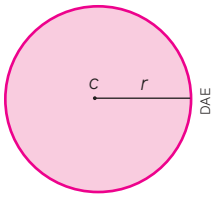
DAE

$$A_{hexágono} = 6 \cdot A_{triângulo} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Círculo

Se um círculo tem raio *r*, a fórmula para a medida de sua área é:

$$A = \pi \cdot r^2$$



DAE

Atenção!

O círculo é uma superfície limitada por uma circunferência. A fórmula anterior permite o cálculo da área do círculo, enquanto a fórmula ao lado fornece, a partir da medida do raio *r*, o comprimento *C* da circunferência.

$$C = 2\pi r$$

Gabarito

Unidade 1

Páginas 43 a 45

Atividades finais

1. **a)** 1,2%
b) 101,2%
c) 8,12%
d) 7,88%
e) 20%
f) O montante é a soma do capital com os juros.
g) Regime de juros simples.
h) Regime de juros simples.
i) $M = C(1 + i)^n$
j) Nos juros simples, o crescimento é linear; nos juros compostos, é exponencial.

2. c
3. e
4. a
5. e
6. b
7. e
8. d
9. a
10. e
11. b
12. b
13. d
14. a
15. d
16. b
17. a
18. b
19. b

Unidade 2

Páginas 86 a 87

Atividades finais

1. b
2. **a)** $x = 2$
b) Nessas condições sempre é possível encontrar um par α e β.
3. b
4. d
5. d
6. c
7. **a)** $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x$
$(0; 3)$
b) $g(x) = -2 - 2 \cdot 3^x$
$y = 2$
8. e
9. e
10. b
11. **a)** 400 mg/L.
b) $a = 1$ e $k = 200$

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Unidade 3

Páginas 115 a 117

Atividades finais

1. **a)** $\frac{32}{99}$
b) $M_n = C \cdot (1 + i)^n$
c) Progressão geométrica.
d) A razão deverá ser igual a 1 ou o primeiro termo é nulo.
e) O termo geral é: $a_n = 3^n$.
f) O termo geral é: $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.
g) $(C \cdot 1{,}01; C \cdot (1{,}01)^2; C \cdot (1{,}01)^3)$
h) A relação é: $S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$, $q \neq 1$
i) A relação é: $S = \frac{a_1}{1 - q}$, $-1 < q < 1$
j) A razão deverá ser negativa e o primeiro termo não pode ser nulo.

2. c
3. b
4. b
5. d
6. d
7. c
8. c
9. a
10. b
11. c
12. c
13. a
14. e
15. c
16. a
17. b
18. d
19. e

Competências gerais da BNCC

Competências gerais da Educação Básica
1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias	
1	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
EM13MAT101	Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT102	Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias	
EM13MAT103	Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
EM13MAT104	Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
EM13MAT105	Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
EM13MAT106	Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
2	Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
EM13MAT201	Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
EM13MAT202	Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
EM13MAT203	Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
3	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
EM13MAT301	Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de [illegible]
EM13MAT302	[illegible] usando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT303	Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
EM13MAT304	Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
EM13MAT305	Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
EM13MAT306	Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
EM13MAT307	Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias	
EM13MAT308	Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
EM13MAT309	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT310	Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
EM13MAT311	Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
EM13MAT312	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
EM13MAT313	Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
EM13MAT314	Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
EM13MAT315	Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
EM13MAT316	Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).
4	Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
EM13MAT401	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
EM13MAT402	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
EM13MAT403	Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
EM13MAT404	Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT405	Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
EM13MAT406	Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
EM13MAT407	Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias	
5	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.
EM13MAT501	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
EM13MAT502	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
EM13MAT503	Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT504	Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
EM13MAT505	Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
EM13MAT506	Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
EM13MAT507	Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
EM13MAT508	Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
EM13MAT509	Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.
EM13MAT510	Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
EM13MAT511	Reconhecer e diferenciar diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 9-10. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 8 maio 2020.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

Referências

ALVES, José Eustáquio Diniz. A dinâmica demográfica importa no crescimento econômico e na degradação ambiental [...]. *In*: UFJF. Laboratório de Demografia e Estudos Populacionais. Juiz de Fora: Ladem, 3 maio 2019. Disponível em: https://www.ufjf.br/ladem/2019/05/03/a-dinamica-demografica-importa-no-crescimento-economico-e-na-degradacao-ambiental-artigo-de-jose-eustaquio-diniz-alves/. Acesso em: 4 maio 2020.

O texto argumenta que a dinâmica entre crescimento demográfico, crescimento econômico e esgotamento dos recursos naturais é uma discussão complexa que ainda enfrenta tabus na busca por um consenso cientificamente apurado.

ARAÚJO, Fernanda. Como funciona o rendimento da poupança. *In*: SERASA ENSINA. São Paulo: Serasa Experian, [2013?]. Disponível em https://www.serasa.com.br/ensina/como-ganhar-dinheiro/rendimento-da-poupanca/. Acesso em: 2 abr. 2020.

O texto trata da poupança, forma mais popular de investimento no Brasil. Também são explorados conceitos como taxa Selic e Taxa Referencial.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. Parecer nº 3, de 8 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, observadas as alterações introduzidas na LDB pela Lei nº 13.415/2017. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, p. 49, 21 nov. 2018.

Neste documento, que substitui o modelo único de currículo do Ensino Médio por uma nova organização flexível e diversificada, encontram-se detalhadas todas as orientações para a implementação do Novo Ensino Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018.

A BNCC é um documento que determina as competências, habilidades e aprendizagens essenciais que todas as crianças, adolescentes e jovens brasileiros devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica.

CONHEÇA a importância da [...]. *In*: A ESCOLHA CERTA. [S. *l*: s. *n*.], 26 jun. 2018. Disponível em: http://www.aescolhacerta.com.br/conheca-a-importancia-da-educacao-financeira-para-jovens/. Acesso em: 5 maio 2020.

O texto tem como argumento central a importância da Educação Financeira como fator de mudança de realidade, planejamento, autoconhecimento e desenvolvimento da autonomia. Nele, fala-se ainda sobre a responsabilidade social associada ao amadurecimento desse conhecimento.

HISTÓRIA da arte afro-brasileira. *In*: PORTAL EDUCAÇÃO. São Paulo, [20--]. Disponível em: https://siteantigo.portaleducacao.com.br/conteudo/artigos/idiomas/historia-da-arte-afro-brasileira/52159. Acesso em: 28 abr. 2020.

O texto trata da arte africana trazida para o Brasil pelos escravos e como ela, como o passar do tempo, se constituiu em uma arte única que extrapolou a comunidade negra e influenciou outras produções artísticas nacionais.

LIMA, Elon Lages *et al. A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 1997. v. 1.

O livro trata do estudo das funções. As demonstrações são apresentadas com rigor e criatividade, o que favorece uma aprendizagem significativa.

LIMA, Elon Lages *et al. A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 1998. v. 2.

O livro trata, em sua primeira parte, das progressões aritméticas e geométricas, com aplicações na Matemática Financeira, análise combinatória e probabilidade.

NAZÁRIO, Heleno Rocha. Em artigo, pesquisadores usam modelo de epidemia zumbi para estudar propagação de rumores e *fakenews*. In: UNIVERSIDADE FEDERAL DO SUL DA BAHIA, Itabuna, 18 out. 2019. Disponível em https://www.ufsb.edu.br/component/content/article/1830-em-artigo-pesquisadores-usam-modelo-de-epidemia-zumbi-para-estudar-propagacao-de-rumores-e-fake-news. Acesso em: 20 jul. 2020.

O artigo mostra um estudo no qual os autores empregam um modelo de simulação para entender fluxos de rumores e informações mentirosas.

PRECIOSO, Juliana Conceição; PEDROSO, Hermes Antonio. História do número *e*: gênese e aplicações. *Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco*, Uberlândia, v. 1, n. 1, p. 31-44, jun. 2013. Disponível em: http://www.seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/13913. Acesso em: 24 abr. 2020.

O texto apresenta alguns aspectos fundamentais da história do número e sua presença nas mais diversas aplicações em vários ramos da ciência.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

PRECIOSO, Juliana Conceição; PEDROSO, Hermes Antonio. História do número *e*: gênese e aplicações. *Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco*, Uberlândia, v. 1, n. 1, p. 42, jun. 2013. Disponível em: http://www.seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/13913. Acesso em: 24 abr. 2020.

O trecho traz parte da biografia de Leonhard Euler, um dos nomes mais importantes para a Matemática. Suas descobertas promoveram o desenvolvimento de diversas áreas das Ciências Naturais.

REIS, Saulo P. dos; SILVA, Silvia Regina V. da. Logaritmos: de sua invenção até a sala de aula. *Ciência e Natura*, Santa Maria, v. 37, n. 3, p. 889-897, set./dez. 2015. Disponível em: https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/view/17318/pdf. Acesso em: 3 abr. 2020.

Este trabalho apresenta aspectos fundamentais da história do famoso "número de Euler" (representado pela letra *e*), passando por relatos de sua origem ainda misteriosa e evidenciando sua aplicação nos ramos da Ciência.

ROQUE, Tatiana. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Visando acabar com o mito de que a Matemática é acessível apenas aos gênios, a autora apresenta uma visão crítica de como sua história vem sendo contada. Ao abordar o desenvolvimento dos sistemas matemáticos ao longo dos tempos, são apresentadas diferentes soluções para problemas semelhantes.

STEWART, Ian. *Desbravadores da Matemática:* da alavanca de Arquimedes aos fractais de Mandelbrot. Rio de Janeiro: Zahar, 2019. p. 281-283.

O texto "Pai dos Fractais" traz a história de Benoît B. Mandelbrot, matemático que definiu os fractais e as estruturas infinitas deles.

TAHAN, Malba. *O homem que calculava*. Rio de Janeiro: Record, 2001.

O autor narra a história de Bereniz Samir, um viajante com o dom intuitivo da matemática, manejando os números com a facilidade de um ilusionista. Problemas aparentemente sem solução são expostos de maneira simplificada. Gráficos facilitam ainda mais a leitura do livro.

Referências complementares

CAZORLA, Irene *et al.* (org.). *Estatística para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental.* Brasília, DF: SBEM, 2017. *E-book.* Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/ebook_sbem.pdf. Acesso em: 3 jul. 2020.

Apesar de o título referir-se aos Anos Iniciais, o livro traz um panorama geral, com exemplos, de uma pesquisa estatística envolvendo o ciclo investigativo, o que pode servir de base para os estudos de qualquer público: da Educação Básica até a universidade. Com linguagem bem acessível, faz um aprofundamento das fases da investigação científica discutindo instrumentos de coleta de dados, variáveis quantitativas e qualitativas, tipos de gráficos, tabelas, média, mediana, amplitude, interpretação de dados e conclusões.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

FERREIRA, Jamil. *A construção dos números*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

Partindo do conjunto dos números naturais até chegar ao conjunto dos números complexos, o livro trata da construção rigorosa dos conjuntos numéricos estudados desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio, abordando as propriedades de cada um.

IEZZI, Gelson *et al. Fundamentos de matemática elementar*. São Paulo: Atual, 2013. v. 2.

Esta coleção contempla vários assuntos abordados no Ensino Médio com rigor conceitual. O volume 2, por exemplo, aborda as funções exponencial e logarítmica.

Sites

Cursos Fundação Bradesco: neste *site* são oferecidos vários cursos nas áreas de Administração, Contabilidade e finanças, Desenvolvimento pessoal e profissional e Informática. Disponível em: https://www.ev.org.br/cursos. Acesso em: 3 jul. 2020.

Dicas de Programação: este *site* apresenta várias dicas de programação e desenvolvimento de *software*. Disponível em: https://dicasdeprogramacao.com.br/. Acesso em: 3 jul. 2020.

Programaê!: este *site* facilita a introdução da linguagem de programação e do pensamento computacional. Disponível em: http://programae.org.br/. Acesso em: 3 jul. 2020.

Scratch: projeto do Lifelong Kindergarden Group do MIT Media Lab, para ajudar jovens a pensar e trabalhar de forma criativa e colaborativa. Disponível em: https://scratch.mit.edu/. Acesso em: 3 jul. 2020.

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
DA EDITORA DO BRASIL

ISBN 978-85-10-08361-4